MATEMATISKA VETENSKAPER

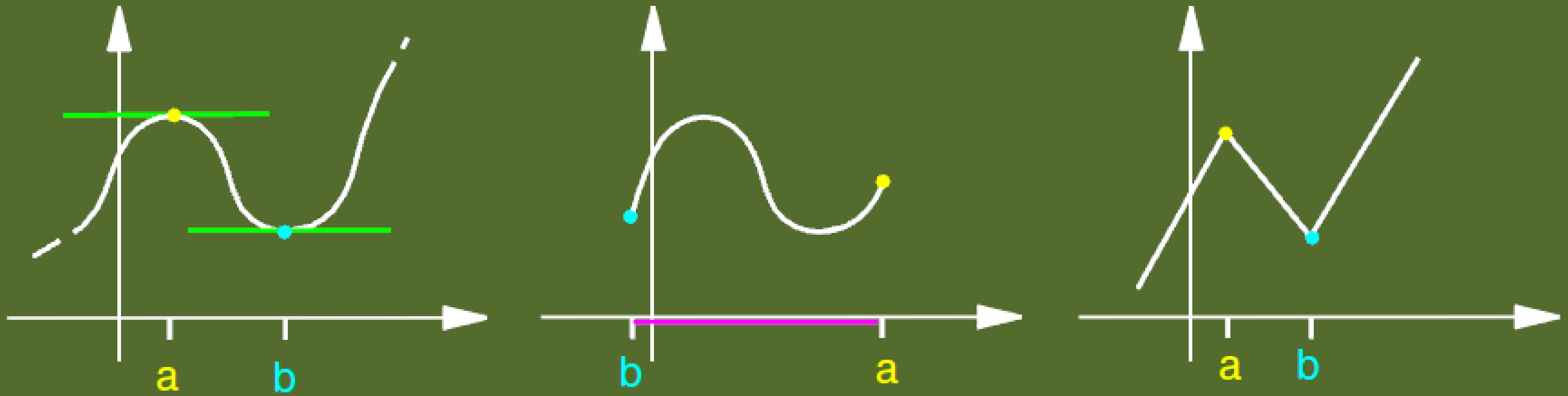
MMGN00
Introduktionskurs för naturvetare

Jan Alve Svensson

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMGN00/S10/

5

Derivata och lokalt max/min



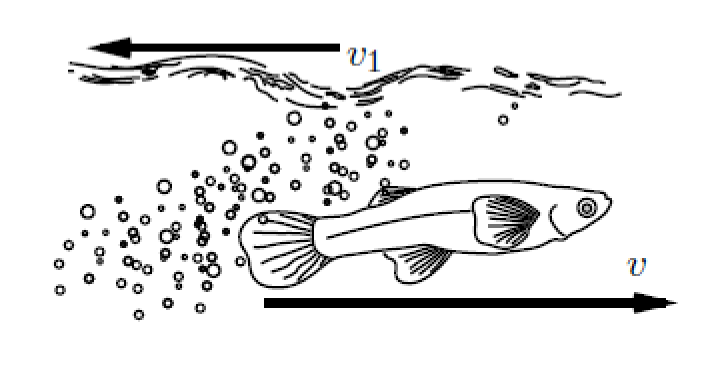
f har ett lokalt minimum i b om $f(b) \leq f(x)$ för alla x nära b.
f har ett lokalt maximum i a om $f(x) \leq f(a)$ för alla x nära a.

- f har ett lokalt minimum i b om $f'(b) = 0$ och f' växlar tecken från negativt till positivt i b.
- f har ett lokalt maximum i a om $f'(a) = 0$ och f' växlar tecken från positivt till negativt i a.

- f har ett lokalt minimum i b om $f'(b) = 0$ och $f''(b) > 0$.
- f har ett lokalt maximum i a om $f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$.

Derivata och lokalt max/min

Exempel Bestäm lokala max- och min-punkter till $f(x) = x^3 + 6x^2$.



Exempel En fisk simmar med konstant hastighet v (m/s) motströms i en å.
Ån rinner med hastigheten v_1 (m/s) i förhållande till åkanten.
Studier har visat att den energi fisken använder på t sekunder ges av

$$E = cv^k t,$$

där c och $k > 2$ är konstanter.
Med vilken hastighet ska fisken simma ?

Vad är en differentialekvation?

Exempel

- Två ämnen A och B reagerar kemiskt och bildar ett tredje C.
- En molekyl vardera av A och B bildar en molekyl av C : $A+B \to C$.
- Kemisk lag: Den hastighet med vilken C bildas är (vid varje tidpunkt) proportionell mot produkten av kvantiteten av ämnet A och B då.
- $c(t)$ antalet (mol) av C vid tiden t. Låt a och b vara ursprungliga kvantiteterna av A resp B.
- Vill veta formel för $c(t)$!
- Kemiska lagen $c'(t) = k(a - c(t))(b - c(t))$.
- $c(t)$ löser differentialekvationen $y' = k(a-y)(b-y)$.

Vad är en differentialekvation?

En differential ekvation involverar en obekant funktion y och y' (eller högre derivator av y).

T.ex $y' = y + x$ eller $y' = y(e^x + x)$.

Att lösa en differentialekvation betyder att bestämma alla funktioner y så att likheten stämmer.

Exempel Visa att $f(x) = -(x+1) + e^x$ löser $y' = y + x$.

Exempel Bestäm a och b så att $f(x) = e^{ax^2+bx}$ löser $y' = y(x+1)$.

Ekvationen $y'(x) = f(x)$ (f känd funktion)

En lösning kallas en primitiv funktion till f.

Om $F(x)$ är en lösning, så att $F'(x) = f(x)$,
så ges alla av $F(x) + C$, där C är en godtycklig konstant
(om definitionsmängen är ett intervall).

$\int f(x)\,dx$ betecknar alla primitiva funktioner, så

$$\int f(x)\,dx = F + C \quad \text{om} \quad F' = f.$$

(Obestämda) integralen av f.

Några integraler

$$\int x^b\,dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + C \text{ om } b \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C \qquad |x| = -x \text{ , om } x < 0 \text{ , } |x| = x \text{ , om } x \geq 0$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Exempel Bestäm $\int e^{2x+3}\,dx$

Exempel Bestäm $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$

Några räkneregler

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ om k är en konstant.

Om $F'(x) = f(x)$, så är
$\int f(x+k)\,dx = F(x+k) + C$, när k är en konstant.

Om $F'(x) = f(x)$, så är
$\int f(kx)\,dx = \frac{1}{k}F(kx) + C$, när k är en konstant.

Exempel Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = e^x + 4x$

Exempel Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$

Separabla differentialekvationer

En differentialekvation är separabel om den kan skrivas

$$h(y)y' = f(x),$$

där h och f är kända funktioner.

Bara "variabeln" y på ena sidan och x på andra.

Exempel $\dfrac{y \cdot y'}{y^2+1} = x^2 - 1$ är separabel.

Exempel $y' = (y-1)x$ kan skrivas $\dfrac{y'}{y-1} = x$.

Exempel $y' = 3(1-y)(2-y)$ kan skrivas $\dfrac{y'}{(1-y)(2-y)} = 3$.

Lösning av separabla differentialekvationer

Ekvation: $\boxed{h(y)y' = f(x)\,.}$

Om $H(y)$ är en primitiv fuktion till $h(y)$ har vi

$D(H(y(x))) = h(y(x))y'(x)$, så ekvationen är $\boxed{D(H(y)) = f(x).}$

Integration ger nu $\boxed{H(y) = F(x) + C,}$

där $F' = f$ och C en godtycklig konstant.

Vi kan förhoppningsvis lösa ut y ur detta.

Informellt:

$h(y)\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ skrivs

$h(y)\,dy = f(x)\,dx$, som integreras:

$\int h(y)\,dy = \int f(x)\,dx.$

$H(y) = F(x)$. Lös nu ut y!

Exempel Lös $y' = 3y$.

Exempel Lös $y' = 3x^2(1-y)$.