MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tillMMGN00 Introduktionskurs i matematik för naturvetare, 1,5 p, 09 00 29.

1. Vi använder att $10 = 2 \cdot 5$ och att $20 = 2^2 \cdot 5$ och får

$$\begin{aligned}\frac{10^{5/6} \cdot 20^{-1/3}}{5^{1/2} \cdot 2^{1/6}} &= 2^{5/6} \cdot 5^{5/6} \cdot 2^{-2/3} \cdot 5^{-1/3} \cdot 5^{-1/2} \cdot 2^{-1/6} = \\ &= 2^{5/6-2/3-1/6} \cdot 5^{5/6-1/3-1/2} = \\ &= 2^{5/6-4/6-1/6} \cdot 5^{5/6-2/6-3/6} = 2^0 \cdot 5^0 = 1.\end{aligned}$$

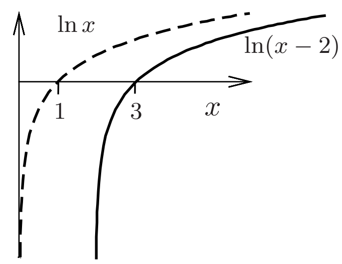
Svar: 1.

2. Vi har med kvadratkomplettering och räkneregler för logaritmer

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(x^2 - 4x + 4) - \ln(x-2) = \ln((x-2)^2) - \ln(x-2) = 2\ln(x-2) - \ln(x-2) = \\ &= \ln(x-2).\end{aligned}$$

Grafen till $f(x) = \ln(x-2)$ är en förskjutning av grafen till $\ln x$ med två enheter åt höger.

Svar: $f(x) = \ln(x-2)$ och grafen ser ut som den blå kurvan i figuren:



Kommentar: *För full poäng krävs här att man ritar en graf som går genom* 3 *på x-axeln, som ligger över intervallet* $(2, \infty)$, *är strängt växande, konkav och negativ över intervallet* $(2, 3)$ *och positiv över* $(3, \infty)$. *Man ska visa att man vet hur grafen till* $\ln x$ *ser ut och hur man sedan får grafen till* $\ln(x-2)$.

3. Vi faktoriserar och får $f(x) = x^3/2 - 2x = (x^2 - 4)x/2 = (x+2)(x-2)x/2$.

Vi ser att $f(x) = 0$ precis när $x = -2$, 0 och 2. Bara en graf har tre olika nollställen, så svaret är c).

Svar: c).

4. Att linjen $Y = kx + m$ går genom de givna punkterna betyder att

$$\begin{cases} 3 = 2k + m \\ 1 = k + m \end{cases}$$

Den övre raden minskad med den nedre ger $2 = k$ som i den övre ger $m = -1$. Linjen är alltså $Y = \ln y = 2x - 1$, som exponentieras till $y = e^{2x-1} = f(x)$.

(a) Vi har $D(e^{2x-1}) = e^{2x-1} \cdot D(2x-1) = 2e^{2x-1}$.

(b) Vi ska lösa $2 = 2e^{2x-1}$, som ger $2x - 1 = 0$, dvs $x = 1/2$.

Svar: a) $f'(x) = 2e^{2x-1}$ b) $x = 1/2$.

5. Vi har $f'(x) = e^{x^3-x}D(x^3-x) = (3x^2-1)e^{x^3-x}$. Vi faktoriserar

$$f'(x) = 3(x^2-3^{-1})e^{x^3-x} = 3(x-3^{-1/2})(x+3^{-1/2})e^{x^3-x}.$$

I en lokal max/min-punkt är derivatan 0, men $0 = (3x^2-1)e^{x^3-x}$, ger $3x^2-1=0$ eftersom exponentialfuntkionen alltid är positiv.

Alltså $x = \pm 3^{-1/2}$.

Vi kollar tecknet på $f'(x)$:

x		$-3^{-1/2}$		$3^{-1/2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Det betyder att f har ett lokalt maximum i $x = -1/\sqrt{3}$ och ett lokalt maximum i $1/\sqrt{3}$.

Svar: Lokalt maximum i $x = -1/\sqrt{3}$ och ett lokalt maximum i $1/\sqrt{3}$.

6. Vi separerar variablerna $y' = xy - x = x(y-1)$, som (om $y \neq 1$) ger

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{y-1} = x \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{y-1} = x\,dx.$$

Integration ger $\ln|y-1| = x^2/2 + C_1$, som exponentieras till $|y-1| = e^{C_1}e^{x^2/2}$, eller $y = 1 \pm e^{C_1}e^{x^2/2} = 1 + c_2e^{x^2/2}$.

Vi ska ha $y = f(0) = 2$, som nu ger $1 = c_2$.

Det betyder att $f(x) = 1 + e^{x^2/2}$.

(a) Vi har $f(4) = 1 + e^8$.

(b) Vi löser $5 = 1+e^{x^2/2}$, som är samma som $4 = e^{x^2/2}$. Logaritmering ger $ln4 = x^2/2$, eller $x^2 = 2\ln 4 = \ln 16$, så $x = \pm\sqrt{\ln 16}$.

Svar: a) $f(4) = 1 + e^8$ b) $x = \sqrt{\ln 16}$.