MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tillMMGN00 Introduktionskurs i matematik för naturvetare, 1,5 p, 09 00 29.

1. Vi har att $9 = 3^2$, så med räkneregler för potenser får vi

$$\frac{3^{7/12} \cdot 9^{-1/6}}{9^{1/8}} = 3^{7/12} \cdot 3^{-1/3} \cdot 3^{-1/4} = 3^{7/12-4/12-3/12} = 3^0 = 1.$$

Svar: 0.

2. Räkneregler för logaritmer ger

$$\ln 3 + 2\ln 5 - \ln 75 = \ln 3 + \ln 5^2 - \ln 75 = \ln\left(\frac{3 \cdot 5^2}{75}\right) = \ln 1 = 0.$$

Svar: 0.

3. Vi har att täljaren blir 0 bara när $x = 0$. Det betyder att f har ett nollställe. Nämnare blir 0 när $x = -1$ och när $x = 2$. Det betyder att f är definierad utom när för dessa värden. Det gör att c) och d) är uteslutna.

Vi ser på teckenväxlingar av $\dfrac{x}{(x+1)(x-2)^2}$ och får

x		-1		0		2	
$f(x)$	$+$	ξ	$-$	0	$+$	ξ	$+$

Det betyder att bara b) duger.

Svar: b)

4. (a) Vi har att linjen $Y = kX + m$ ska gå genom $(2, 5)$ och $(4, 2)$. Det ger

$$\begin{cases} 5 = 2k + m \\ 2 = 4k + m \end{cases}$$

Den nedersta raden minskad med den översta ger $-3 = 2k$, så $k = -3/2$. I den översta ger detta $5 = -3 + m$, så $m = 8$.

Vi har alltså $\log_{10} y = -3\log_{10}(x)/2 + 8$ som exponentieras till $y = f(x) = 10^8 x^{-3/2}$

Detta ger $f'(x) = 10^8 \cdot (-3/2)x^{-5/2} = -15 \cdot 10^7 x^{-5/2}$.

Svar: $f'(x) = -15 \cdot 10^7 x^{-5/2}$.

(b) Vi har att linjen $Y = kx + m$ ska gå genom $(2, 3)$ och $(6, 5)$. Det ger

$$\begin{cases} 3 = 2k + m \\ 5 = 6k + m \end{cases}$$

Den nedersta raden minskat med den översta ger $2 = 4k$, eller $k = 1/2$. I den översta raden ger detta $3 = 1 + m$, så $m = 2$.

Vi har alltså $\ln y = x/2 + 2$ som exponentieras till $y = g(x) = e^{x/2+2}$.

Vi får $g'(x) = e^{x/2+2} \cdot D(x/2 + 2) = e^{x/2+2}/2$

Svar: $g'(x) = e^{x/2+2}/2$.

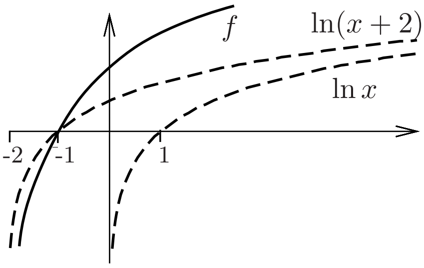
5. Kvadratkomplettering ger $f(x) = \ln((x + 2)^2) = 2\ln(x + 2)$ Grafen till $\ln(x + 2)$ är en förskjutning av grafen till $\ln x$ 2 enheter åt vänster. Grafen till f är en töjning av det med 2 enheter.

Tangenten ska gå genom $(2, f(2)) = (2, 2\ln 4) = (2, \ln 16)$. Den har riktningskoefficient $f'(2)$, där

$$f'(x) = \frac{2}{x+2},$$

så att $f'(2) = 1/2$. Det ger att linjen har ekvationen $y - \ln 16 = (x-2)/2$, eller $y = x/2 - 1 + \ln 16 = x/2 + \ln 16 - \ln e = x/2 + \ln(16/e)$.

Svar: Grafen framgår av figuren nedan och tangenten har ekvationen $y = x/2 + \ln(16/e)$.



6. (a) Vi har att $f'(x) = 3x^2 - 1$, så $x(f'(x) - 2) = x(3x^2 - 1 - 2) = 3(x^3 - x) = 3f(x)$. Det visar att f löser differentialekvationen.

   (b) Vi har att $f'(x) = 3(x^2 - 3^{-1}) = 3(x + 3^{-1/2})(x - 3^{-1/2})$, som ger oss teckentabellen

x		$-3^{-1/2}$		$3^{-1/2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

   Vi ser att f har en lokal maxpunkt i $x = -1/\sqrt{3}$ och en lokal minpunkt i $x = 1/\sqrt{3}$.

   Vi har att $f''(x) = 6x$ som är negativ på $(-\infty, 0)$ och negativ på $(0, \infty)$. Det ger att f är konkav på $(-\infty, 0]$ och konvex på $[0, \infty)$.

   Svar: f har lokal max-punkt i $x = -1/\sqrt{3}$ och lokal min-punkt i $x = 1/\sqrt{3}$. Den är konkav på $(-\infty, 0]$ och konvex på $[0, \infty)$.