Matematik
Göteborgs universitet
R. Andersson

Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Magnus Önnheim
tel 0703 - 088304

Tentamen i MMGN00,
Introduktionskurs i matematik för naturvetare, 1,5 p

Lördag 27 augusti 2011, kl. 08.30-11.30

1. Förenkla
$$\frac{(-3\cdot 2)^{-7}\cdot 2^4}{3^{-3}}.$$

2. Förenkla $(x+1)^4-(x-1)^4$.

3. Lös ekvationen $2\ln 3x = 3\ln 2x$.

4. Bestäm ekvationen för den exponentialfunktion som går genom punkterna $(0,2)$ och $(3,54)$.

5. Bestäm ekvationen för tangenten till grafen till funktionen $f(x)=\ln\left((1+x^2)^3\right)$ i den punkt på grafen där $x-$koordinaten är 1.

6. Bestäm största och minsta värde för $f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$ och för vilka $x-$värden, som dessa antas.

Betygsgränser: 15 p för betyget Godkänd. Varje uppgift kan ge 6 p om inget annat anges. Förslag till lösningar kommer att finnas på kursens hemsida på måndag 29 augusti.

Lösningar till Tentamen i MMGN00, 27 augusti 2022

1.
$$\frac{(-3\cdot 2)^{-7}\cdot 2^4}{3^{-3}}=\frac{3^3\cdot 2^4}{(-3)^7\cdot 2^7}=-\frac{3^3\cdot 2^4}{3^7\cdot 2^7}=-\frac{1}{3^4\cdot 2^3}=-\frac{1}{81\cdot 8}=-\frac{1}{648}.$$

2. Upprepad användning av konjugatregeln ger

   $(x+1)^4-(x-1)^4 = ((x+1)^2)^2-((x-1)^2)^2 = ((x+1)^2+(x-1)^2)((x+1)^2-(x-1)^2) =$

   $((x+1)^2+(x-1)^2)((x+1)+(x-1))((x+1)-(x-1)) = ((x+1)^2+(x-1)^2)\cdot 2x\cdot 2.$

   Kvadreringsreglerna ger

   $(x+1)^2 = x^2+2x+1,\ \ (x-1)^2 = x^2-2x+1,$ så att $((x+1)^2+(x-1)^2) = 2x^2+2.$

   Förenklingen av det givna uttrycket blir därföt $8x(x^2+1)$.

3. Först observerar vi att då ln endast är definierad för positiva tal måste varje lösning uppfylla $x > 0$. För $x > 0$ gäller

   $$2\ln 3x = 3\ln 2x \Leftrightarrow \ln(3x)^2 = \ln(2x)^3 \Leftrightarrow (3x)^2 = (2x)^3 \Leftrightarrow 9 = 8x \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}.$$

4. Ekvationen för en exponentialfunktion kan skrivas $f(x) = mb^x$,där $b > 0$. Från uppgiften följer $2 = mb^0 = m$ och $54 = mb^3$. Första ekvationen ger $m = 2$. Sätter vi in detta i den andra ekvationen, blir denna $54 = 2b^3 \Leftrightarrow b^3 = 27 \Leftrightarrow b = 3$. Ekvationen för exponentialfunktionen är därför $y = 2\cdot 3^x$.

5. Enklast är väl att använda att

   $$f(x) = \ln((1+x^2)^3) = 3\ln(1+x^2).$$

   Från kejeregeln följer

   $$f'(x) = 3\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x.$$

   Ekvationen för tangenten til grafen till funktionen f i den punkt på grafen, där $x = 1$ är $y = f'(1)(x-1)+f(1)$. Då $f'(1) = \frac{6}{2} = 3$ och $f(1) = 3\ln 2$, följer att den sökta tengenten har ekvationen $y = 3(x-1)+3\ln 2$.

6. Först konstaterar vi att $x^2-x^4 = x^2(1-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$. Funktionens definitionsmängd är därför intervallet $[-1,1]$. En annan observation är att $f(-x) = f(x)$, så det räcker att undersöka funktionen för $0 \leq x \leq 1$. Vi utnyttjar dock inte detta i lösningen. Minsta värdet, 0, får vi omedelbart från definitionen av kvadratrot. Detta värde antas precis då $x^2(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0, 1$. Vi söker nu lokala maxpunkter. För $x \neq -1, 0, 1$ gäller

   $$f'(x) = D((x^2-x4)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2-x^4)^{-1/2}\cdot D(x^2-x^4) =$$

   $$\frac{1}{2\sqrt{x^2-x^4}}\cdot(2x-4x^3) = \frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{x^2-x^4}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   Om a är en punkt, där f har sitt största värde, i intervallen $(-1,0)$ resp. $(0,1)$ gäller $f(a) \geq f(x)$ för alla x i respektive intervall. En sådan punkt måste därför vara en lokal maxpunkt. För sådana punkter i intervallen måste $f'(a) = 0$. Härav följer att $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi har $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1/2$. Största värde är därför $1/2$, som antas för $x = \pm 1/\sqrt{2}$.