MATEMATISKA VETENSKAPER

MMGN00
Introduktionskurs för naturvetare

Jan Alve Svensson

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMGN00/S10/

4

Ekvationen $a^x = b$

Löses genom logaritmering!

Exempel Bestäm inversen till funktionen $f(t) = 50e^{0,4t}$.

Substitution kan vara användbart!

Exempel Lös ekvationen $2^x + 2^{x-1} = 6$.

Ekvationen $\log_a x = b$

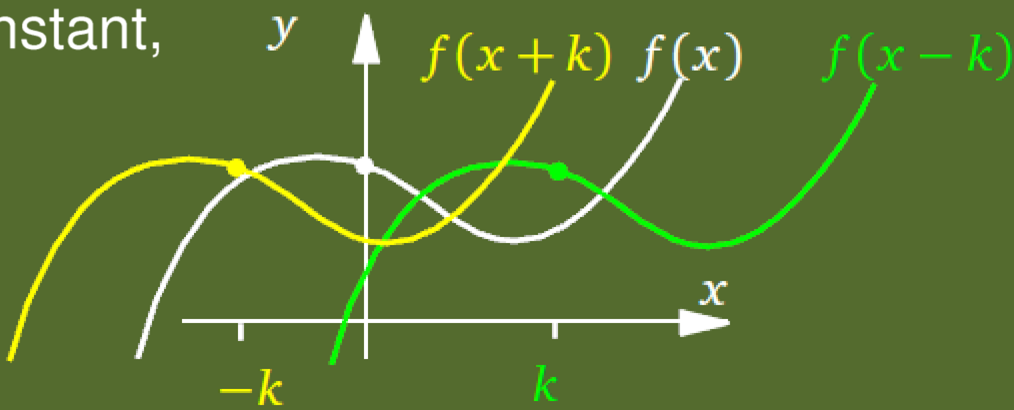
Löses genom exponentiering!

Tänk på definitionsmängden!

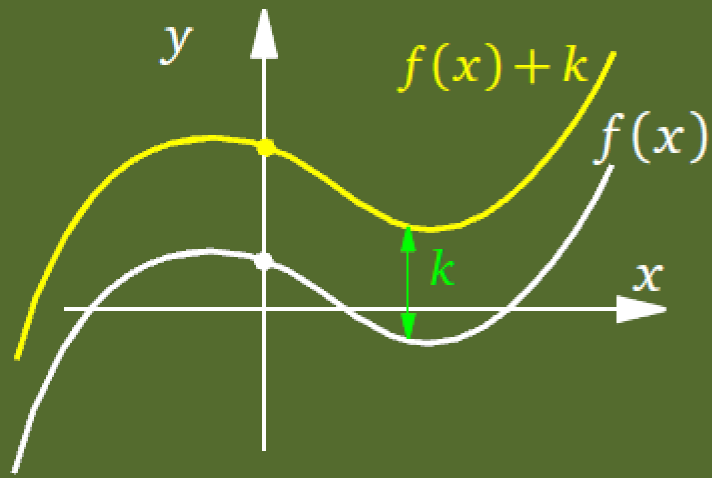
Exempel Lös ekvationen $2\ln(x-1) + \ln(x+1) = 3\ln x$.

Förskjutningar

Grafen till $f(x+k)$, där k en konstant, är en förskjutning av grafen till f.
Åt vänster om $k > 0$,
åt höger om $k < 0$.



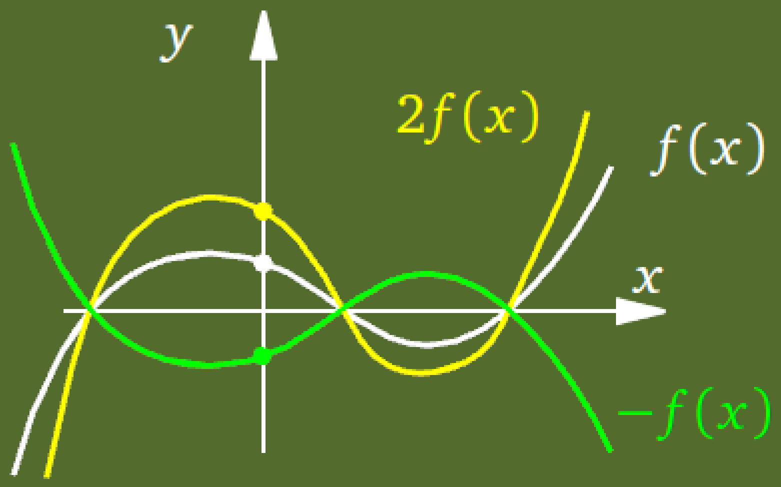
Grafen till $f(x)+k$, där k en konstant, är en förskjutning av grafen till f.
Uppåt om $k > 0$,
nedåt om $k < 0$.



Exempel Skissa grafen till $x^2 + 6x + 5$.

Töjningar

Grafen till $kf(x)$, där k en konstant, är en töjning y-led av grafen till f.



Utdragning om $k > 1$,
krympning $0 < k < 1$.

Exempel Skissa grafen till $-4x^2 + 8x - 16$.

Sammansättningar

Om f och g är funktioner kan de sättas samman på två olika sätt.

$$f(g(x)) \qquad \text{eller} \qquad g(f(x))$$

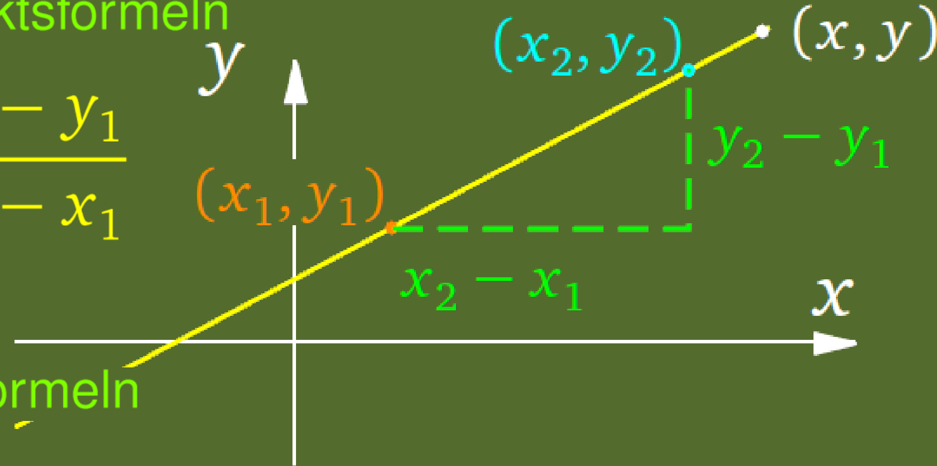
Exempel Betäm sammansättningarna om $f(x) = x^2$ och $g(x) = e^x + 1$.

Exempel Skriv $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ som en sammansättning av två funktioner.

Flera svar möjliga!

Räta linjen (igen)

Tvåpunktsformeln



$$y = kx + m \qquad \frac{y - y_1}{x - x_1} = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$\boxed{y = k(x - x_1) + y_1}$$

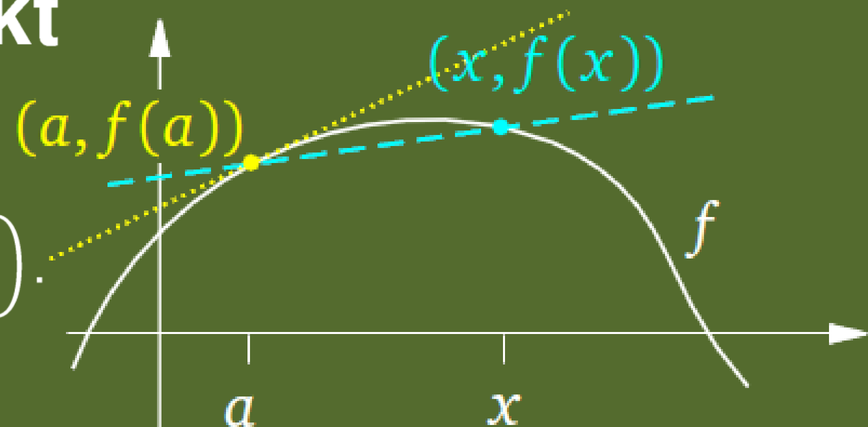
Enpunktsformeln

Momentan förändringstakt

Den streckade linjen har lutning

$$k = \boxed{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Differenskvoten $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)$.



Derivatan av f i $x = a$,
momentana förändringstakten,
det tal differenskvoten närmar sig när x närmar sig a.

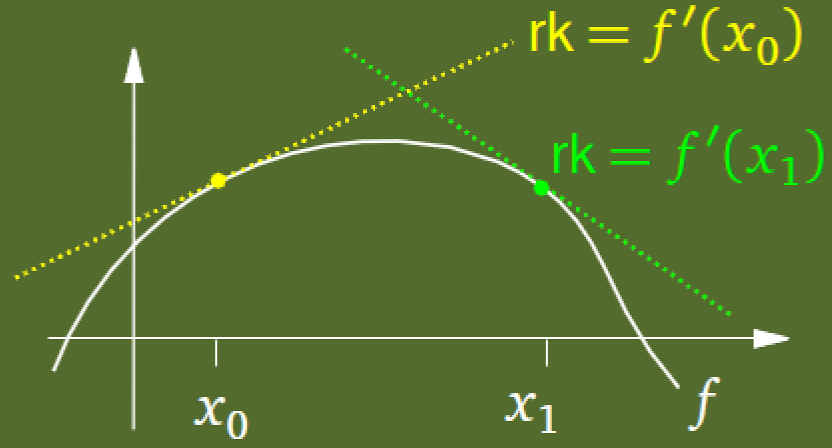
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$f'(a)$ anger grafens lutning i punkten $(a, f(a))$.

Exempel Bestäm $f'(2)$ om $f(x) = x^2$

Derivata som funktion

Olika lutning i olika punkter
på grafen till f.



Har derivatan som funktion

$$f' = Df = \frac{df}{dx}.$$

Vanliga derivator

$D(x^a) = ax^{a-1}$, om $a \neq 0$. Derivatan av en konstant är 0.

$D(e^x) = e^x$ $\qquad$ $D(a^x) = \ln(a)a^x$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

Exempel Bestäm $D(\sqrt{x})$.

Exempel Bestäm $D\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Exempel Bestäm $D(2^x)$.

Deriveringsregler

$(f+g)' = f' + g'$,

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, $(k \cdot f)' = k \cdot f'$, om k konstant.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, $\quad g'(x)$ inre derivatan.

Exempel Bestäm $D(e^x \cdot \ln x)$.

Exempel Bestäm $D\left(\dfrac{2x+1}{x^4+3}\right)$.

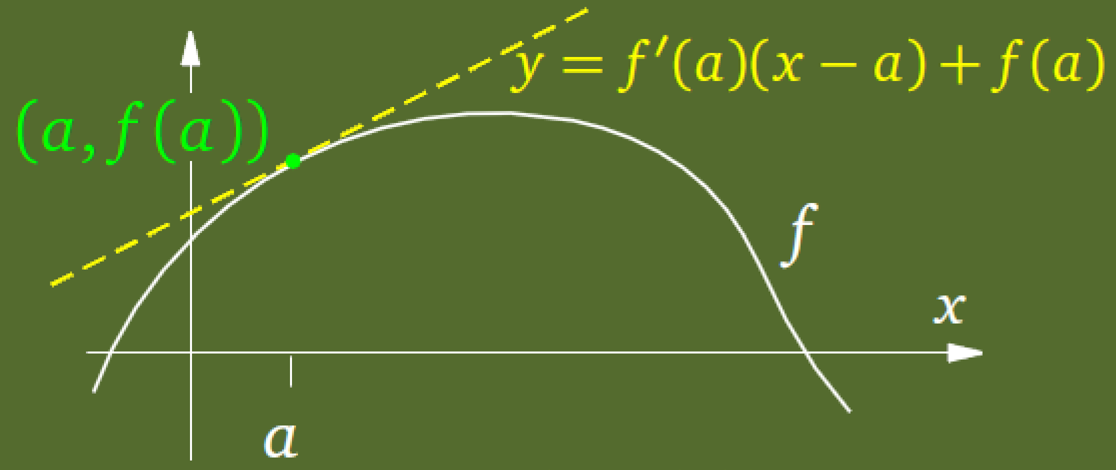
Exempel Bestäm derivatan av $\dfrac{1}{x^2} \cdot 10x$. Kan vara bra att göra omskrivningar först!

Exempel Bestäm $f'(e)$ om $f(x) = \sqrt{(\sqrt{x}\ln x)^4}$.

Exempel Bestäm derivatan av $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 8}$.

Exempel Bestäm derivatan av $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x}}\right)$.

Tangentlinjens ekvation



Tangentlinjen till grafen i punkten $(a, f(a))$ har lutning $f'(a)$.

Enpunktsformeln ger att

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$ är tangentens ekvation.

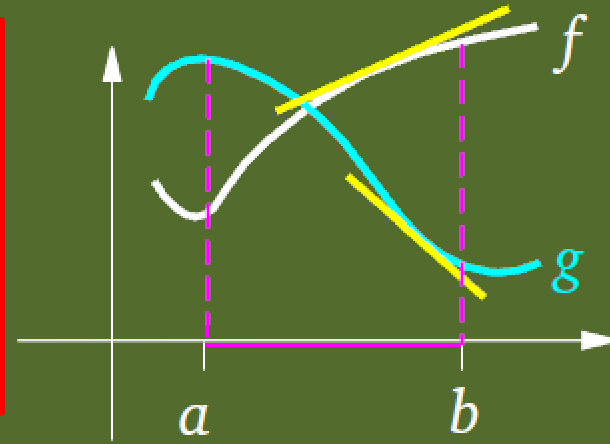
Exempel Bestäm en ekvation för tangentlinjen till grafen av $f(x) = x^2 + \ln x$ i den punkt på grafen där $x = 1$.

Tangentlinjen är parallell med x-axeln precis när $f'(a) = 0$.

Derivatans tecken

Om $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) på ett intervall, så är f (strängt) växande där.

Om $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) på ett intervall, så är f (strängt) växande där.



Exempel Var är funktionen $f(x) = x^4 - 4x^3$ växande resp. avtagande?

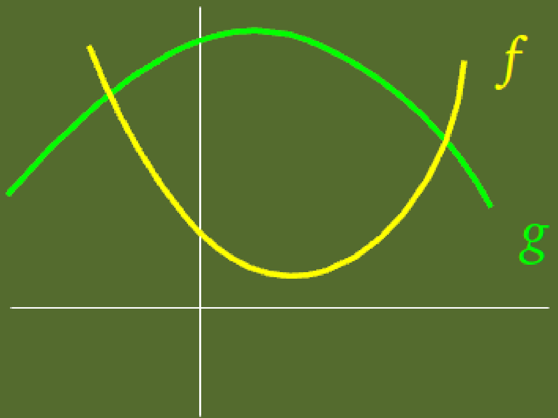
Derivata och konvexitet

Eftersom f' är en funktion kan man försöka derivera den.
Man får då andraderivatan till f'.

Betecknas f'', $f^{(2)}$, $d^2 f/dx^2$ eller $D^{(2)}f$.

Andraderivatan kan användas för att avgöra om f är konvex eller konkav på ett intervall.

Om $f''(x) > 0$ på ett intervall, så är f konvex där.
Om $f''(x) < 0$ på ett intervall, så är f konkav där.



Positiv andraderivata: del av glad mun.
Lutningen ökar, så f' växer. f'' positiv!

Negativ andraderivata: del av sur mun.
Lutningen avtar, så g' avtar. g'' negativ!

Exempel Var är funktionen $f(x) = x^4 - 4x^3$ konvex resp. konkav?