MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tillMMGN00 Introduktionskurs i matematik för naturvetare, 1,5 p, 10 08 28.

1. Vi har att $16 = 2^4$, $25 = 5^2$, $15 = 3 \cdot 5$, och $6 = 2 \cdot 3$. Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{16^{-4} \cdot 25^7}{15^{15} \cdot 6^{-16}} &= \frac{2^{-16} \cdot 5^{14}}{3^{15} \cdot 5^{15} \cdot 3^{-16} \cdot 2^{-16}} = \{ \text{ förkortning } \} = \\ &= \frac{1}{3^{-1} \cdot 5 \cdot} = \{ \text{ förläng med } 3\} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Svar: 3/5.

2. Vi ser att x måste vara > 1 för att logaritmen ska vara definierad.
Räkneregler för logaritmer ger, under förutsättning att $x > 1$, att

$$\ln(2^3(x-1)^2) = \ln 9$$

eller $8(x-1)^2 = 9$, som ger $(x-1)^2 = 9/8$, d.v.s $x - 1 = \pm 3/(2\sqrt{2}) = \pm 3\sqrt{2}/4$. Vi får alltså $x = 1 \pm 3\sqrt{2}/4$, där bara $x = 1 + 3\sqrt{2}/4$ uppfyller villkoret att $x > 1$
Svar: $1 + 3\sqrt{2}/4$.

3. Linjen har i koordinatsystemet en ekvation $Y = kX + m$. De två punkterna ger oss

$$\begin{cases} 1 = k \cdot 1 + m \\ 2 = k \cdot 3 + m \end{cases}$$

Skillnaden mellan den nedersta ekvationen och den översta ger $1 = 2k$, så $k = 1/2$. Detta ger i den översta ekvationen $m = 1/2$.
Alltså gäller att $\ln f(x) = \ln(x)/2 + 1/2$. Exponentiering av detta ger $f(x) = x^{1/2}e^{1/2}$.
Svar: $f(x) = \sqrt{e}\sqrt{x}$

4. Vi faktoriserar med hjälp av konjugatregeln och kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x^2-4)}{(x+1)^2-4} = \frac{x(x^2-2^2)}{(x+1)^2-2^2} = \\ &= \frac{x(x+2)(x-2)}{(x+1+2)(x+1-2)} = \frac{x(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-1)}. \end{aligned}$$

Nollställen till f är nollställen till täljaren alltså $x = 0, \pm 2$. Faktorerna har teckenväxlingar i -3, -2, 0, 1 och 2.
Teckenväxlingar bestäms av

x		-3		-2		0		1		2	
$f(x)$	-	ej def.	+	0	-	0	+	ej def.	-	0	+

Svar:$f(x)$ är positivt på intervallen $(-3, -2)$, $(0, 1)$ och $(2, \infty)$. Det är negativt på intevallen $(-\infty, -3)$, $(-2, 0)$ och $(1, 2)$. Funktionen har nollställena 0 och ± 2.

5. Tangenten ska gå genom punkten $(1, f(1)) = (1, \ln\sqrt{2})$. Den har riktningskoefficient $f'(1)$.
Vi har att $f(x) = \ln((x^3 + x)^{1/2}) = (1/2)\ln(x^3 + x)$, som deriveras till

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2+1}{x^3+x}.$$

Detta ger $f'(1) = (1/2) \cdot 2 = 1$. Det betyder att tangentens ekvation är av formen $y = x + m$. Tangentlinjen går genom $(1, \ln\sqrt{2})$, så $m = \ln\sqrt{2} - 1$
Svar: $y = x + \ln\sqrt{2} - 1$.

6. En omskrinving ger $y' = y(x - x^2)$. Division med y och separering av variabler ger

$$\frac{dy}{y} = (x - x^2)\, dx,$$

som integreras till

$$\ln|y| = x^2/2 - x^3/3 + C_1.$$

Exponentiering ger nu att $y = \pm e^{C_1} e^{x^2/2 - x^3/3} = C e^{x^2/2 - x^3/3}$.

Vår funktion är en av dessa. Vi vet att $f(0) = 3$, så vi ska ha $3 = Ce^0$, dvs $C = 3$. Detta ger att $f(1) = 3e^{1/2-1/3} = 3e^{1/6}$.

Svar: $f(1) = 3e^{1/6}$