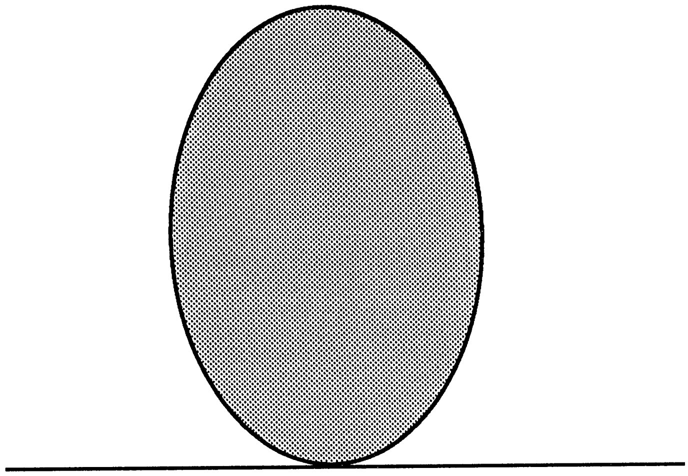
MATEMATIK

Kort förberedande kurs



av
Rolf Pettersson

Göteborg 2006

MATEMATIK

Kort förberedande kurs

av
Rolf Pettersson

Utgiven av
Göteborgs universitet och
Chalmers tekniska högskola
412 96 Göteborg

Till dig som ska läsa matematik vid universitetet

Första terminen vid universitetet innebär en stor omställning från gymnasiestudierna. Bland annat förutsätts du ta eget ansvar för dina studier och att arbeta mycket på egen hand - av den beräknade totala arbetsinsatsen är ca 1/3 schemalagd med lärare. För att du på bästa sätt ska kunna tillgodogöra dig undervisningen är det viktigt att du kan koncentrera dig på det som är nytt, så du inte hänger upp dig på sådant som du förutsätts kunna från gymnasiet. Du gör alltså klokt i att förbereda dig ordentligt genom att repetera gymnasiekursen och läsa in avsnitt som du kanske tidigare försummat.

Hur gör jag då?

Till din hjälp får du detta kompendium "Matematik - kort förberedande kurs". Arbeta igenom det så grundligt, att du behärskar de olika avsnitten. De många övningsexemplen ger dig möjlighet till nyttig räkneträning. I början av kompendiet finns dessutom ett diagnostiskt prov och i slutet en provräkning med blandade uppgifter.

Ta avsnitten i den ordning du själv finner lämplig. En metod är att först räkna alla [1]- och [2]-uppgifterna (kompendiet rakt igenom), sedan alla [3]-uppgifterna osv. Har du bra betyg i matematik från gymnasiet och tror dig kunna gymnasiekurserna ganska bra, kan du försöka dig på sista uppgiften i varje övningsuppgift. Uppgifterna är i stort sett ordnade efter växande svårighetsgrad.

Är det något eller några områden du speciellt behöver repetera, t.ex. olikheter, logaritmer eller trigonometri, kan du i första hand koncentrera dig på dessa. Det väsentliga är *att* du räknar.

Ett av syftena med detta kompendium är att nöta in vissa formler, som du kanske varit van vid att hitta i en formelsamling. *På tentamen vid universitetet kommer du inte att ha formelsamling eller miniräknare till hands.* Försök därför att klara dig utan, när du löser övningsexemplen.

Detta kompendium är ett utdrag ur ett något mer omfattande repetitionsmaterial som finns på adressen

http://www.math.chalmers.se/Math/kompendium/teknolog.pdf

Där kan du titta om du även vill repetera funktionslära.

Lycka till och Välkommen till universitetet!

Med Hälsningar från lärare i matematik vid Göteborgs universitet

Innehåll

DIAGNOSTISKT PROV. (Lämplig tid: cirka 2 timmar)

(Svar finns på sista sidan i kompendiet.)

[1] Förenkla $7a - 3 - [(3 - a) - 2(a - 3b)] - 4b$

[2] Lös ekvationen

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x} = 1$$

[3] Förenkla så långt som möjligt:

$$\frac{y \cdot (\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x})}{(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})}.$$

[4] Förkorta (om möjligt) i uttrycket $(x^3 - 8)/(x^2 - 4)$

[5] Dividera (med polynomdivision) så långt som möjligt $(2x^3 + 1)/(x^2 - 2x + 3)$

[6] Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + 6y &= 1 \\ 3x + 2y &= -5 \end{cases}$

[7] Bestäm exakt $\sqrt{(-6)^2} + 2\sqrt{9}$

[8] Bestäm rötterna till ekvationen $\quad 3 \cdot x^2 + 4x - 4 = 0$

[9] För vilka x gäller olikheten

$$\frac{x}{x-1} < 1 \ ?$$

[10] Förenkla $\begin{array}{ll} [a] & 1/2 \cdot \ln 9 + \ln(1/6) \\ [b] & \ln(x^3)/\ln(1/x) \end{array}$

[11] Angiv exakta värdet av $\quad \sin(\pi/3) + \tan(\pi/6) \quad$ (samt förenkla).

[12] Bestäm alla vinklar v mellan 0° och 360° som satisfierar $\begin{array}{llll} [a] & \cos v & = & 1/2 \\ [b] & \sin v & = & -1/2 \end{array}$

[13] [a] I en rätvinklig triangel är *sinus* för en vinkel lika med 2/3 och den mot denna vinkel stående sidan är 3 längdenheter. Bestäm hypotenusans längd exakt.
[b] Samma uppgift som ovan, om i stället *tangens* för vinkeln är 2/3.

[14] Bestäm $\quad \tan 2x \quad$ exakt, om $\tan x = 1/4$.

[15] Angiv på formen $ax + by + c = 0$ en ekvation för räta linjen genom punkterna $(2, -3)$ och $(-1, 1)$.

[16] Ekvationen $x^2 + y^2 = 6x$ betyder geometriskt en cirkel (i ett ortonormerat system). Bestäm medelpunkt och radie.

Kapitel 1 Algebraiska räkningar

1.1 Addition, subtraktion och multiplikation av reella tal

För reella tal gäller bl.a. följande enkla räkneregler:

$$-(a+b) = -a-b$$
$$-(a-b) = -a+b = b-a$$
$$(-a)\cdot(-b) = +ab = ab, \quad \text{ty}$$
$$(-1)\cdot(-1) = +1$$

Man definierar potenser med heltalsexponenter som:

$a^0 = 1$ (för $a \neq 0$)
$a^1 = a, a^2 = a \cdot a$ osv.
$a^n = a \cdot a \cdots a$, dvs. produkten av n stycken faktorer a

Varav följer **Potenslagarna**

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$(ab)^n = a^n b^n$

Eftersom $(-1)^2 = 1$ och $a-b = -(b-a)$, så gäller att $(a-b)^2 = (b-a)^2$, $(a-b)^3 = -(b-a)^3$, osv. För att förtydliga ges nedan några exempel:

Exempel $4a - 2b - [(3a - c) - (2b - 3c)] = 4a - 2b - (3a - c - 2b + 3c) = 4a - 2b - 3a + c + 2b - 3c = a - 2c$

Exempel $(xy^2z^3)^4 \cdot (-2x^2y)^3 = x^4y^8z^{12} \cdot (-8) \cdot x^6y^3 = -8x^{10}y^{11}z^{12}$

Övningsuppgifter

Ö-1 Förenkla

[1] $9y - 6x - z + x - 2y - 9x + 4z - y$
[2] $a - 3b - (2a - b - c)$
[3] $c - [(7a - c) - (b - 2c)] - 2b$

Ö-2 Beräkna

[1] 3^4
[2] 4^3
[3] $(-3)^2$
[4] $(-2)^3$
[5] $(-4)^0$

Ö-3 Förenkla

[1] $3ab^3 \cdot 8ab^2$
[2] $(5a^5b^2)^4$
[3] $x^3y^4 \cdot (-2y^2x^7) \cdot 3yx$
[4] $(-2x^2y^3z)^3 \cdot (3xz^2)^2 \cdot (-x^3y)^4$

Ö-4 Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

[1] $(a - b)(b + 3a)$
[2] $(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$
[3] $(3x^2 - 2x + 1)(2x^2 - x - 2)$

Följande viktiga formler bör man kunna utantill:

KVADRERINGSREGLERNA	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
KUBERINGSREGLERNA	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
KONJUGATREGELN	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) =$ $= (a-b)(a+b)$
FAKTORUPPDELNINGARNA	$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

OBS! $a^2 + b^2, a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$ kan ej faktoruppdelas med reella tal.

Exempel

Utveckla $(2x + 3z^2)^3$.
Lösning:
$(2x + 3z^2)^3 = \{$kuberingsregeln med $a = 2x$ och $b = 3z^2\} =$
$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3z^2 + 3 \cdot 2x \cdot (3z^2)^2 + (3z^2)^3 =$
$8x^3 + 36x^2z^2 + 54xz^4 + 27z^6$.

Exempel

Faktoruppdela uttrycket $18a^4b^6c - 24a^3b^3c^2 + 8a^2c^3$.
Lösning:
$18a^4b^6c - 24a^3b^3c^2 + 8a^2c^3 = \{$ alla gemensamma faktorer bryts ut$\} =$
$2a^2c \cdot (9a^2b^6 - 12ab^3c + 4c^2) = \{$ kan kvadreringsregeln användas?$\} =$
$2a^2c \cdot \{(3ab^3)^2 - 2 \cdot 3ab^3 \cdot 2c + (2c)^2\} = \{$ kvadreringsregeln$\} =$
$2a^2c \cdot (3ab^3 - 2c)^2$.

Exempel

Faktoruppdela uttrycket $x^6 + 8y^3$.
Lösning:
$x^6 + 8y^3 = \{$ Kan faktoruppdelningen för $a^3 + b^3$ användas ?$\}$

$= (x^2)^3+(2y)^3 = (x^2+2y)[(x^2)^2-x^2 \cdot 2y+(2y)^2] = (x^2+2y)(x^4-2x^2y+4y^2)$

Övningsuppgifter

Ö-5 Utveckla

[1] $(x + 3y)^2$
[2] $(5 - 2x)^2$
[3] $(x^2 - 4y^3)^2$

Ö-6 Förenkla

[1] $(x - 2)(x + 2)$
[2] $(3a^2 + 2x)(3a^2 - 2x)$
[3] $(2x^2 + 3)(2x^2 - 3)(4x^4 + 9)$

Ö-7 Utveckla

[1] $(x+2y)^3$
[2] $(a-5b^2)^3$
[3] $(3a+2b^4)^3$
[4] $(4x^2-6x)^3$

Ö-8 Uppdela i faktorer

[1] x^2-9
[2] x^2+4x+4
[3] $4b^2-16a^2$

Ö-9 Uppdela i faktorer

[1] $3x^2-18xy+27y^2$
[2] x^6-81x^2
[3] $x^2y^3+4x^4y-4x^3y^2$

Ö-10 Uppdela i faktorer

[1] x^3+27
[2] yx^6-y^4
[3] $x^6+8x^3y^9$

Polynom; Kvadratkomplettering

Med ett *polynom* (i x) menas ett uttryck av formen

$$p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

där $a_n,\cdots,a_0$ kallas *koefficienter* för $x^n,\cdots,x^0$. Om $a_n\neq 0$ säges $p(x)$ vara av *grad n.*
Ett viktigt begrepp är *kvadratkomplettering* i andragradspolynom (jämför detta med lösning av andragradsekvationer [1.7]). Kvadratkompletteringen ges av:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+(\frac{p}{2})^2-(\frac{p}{2})^2+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-(\frac{p}{2})^2$$

Exempel

Bestäm (genom kvadratkomplettering) minsta värdet av $f(x)=4x^2+12x+17$.
Lösning:

$$f(x)=4[x^2+3x]+17=\{\text{ kvadratkomplettera}\}=$$
$$=4[x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2]+17=4\Big[(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\Big]+17=4(x+\frac{3}{2})^2+8$$

Eftersom $(x+\frac{3}{2})^2\geq 0$ för alla x, med likhet om och endast om $x=-\frac{3}{2}$, inser man att $f_{min}=8$, vilket inträffar då $x=-\frac{3}{2}$.

Övningsuppgifter

Ö-11 Kvadratkomplettera

[1] x^2+2x-1
[2] $5+2x-x^2$
[3] $2y^2-8y+3$
[4] $7-10y-4y^2$
[5] x^2+6x+y^2-4y+1

Ö-12 Kvadratkomplettera

[1] x^2+3x+4
[2] $1-x-x^2$
[3] $16x^2+9-24x$
[4] x^4-2x^2+2
[5] $x^2-y^2+z^2-2x+3y-4z$

Ö-13 Bestäm (genom kvadratkomplettering) minsta värdet av:

[1] $x^2 + 4x - 1$

[2] $5x^2 - 10x + 21$

[3] $x^2 + x + 1$

Ö-14 Bestäm största värdet av

[1] $5 + 2x - x^2$

[2] $7 - 10x - x^2$

[3] $7 - 10x - 4x^2$

1.2 Division av reella tal. Bråkräkning

Enligt definitionen på reellt bråk har förstagradsekvationen $b \cdot x = a$ den entydiga lösningen $x = \frac{a}{b}$ (kan också skrivas a/b) för $b \neq 0$. För bråkräkning gäller bl.a. följande regler:

Förkortning och förlängning:	$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ (för $c \neq 0$)
Multiplikation:	$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$ och $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
Division, dubbelbråk:	$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
Addition, subtraktion:	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

OBS! $\frac{1}{a+b}$ är ej lika med $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. (Alltför vanligt fel att tro motsatsen.) Om t.ex. $a = b = 1$, är nämligen $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{2}$, medan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$!

Potenser med negativa exponenter definieras som

Definition

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

varav följer

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Exempel Förenkla uttrycket: $\frac{(a-b)^5}{(b-a)^7}$.
Lösning:

$$\frac{(a-b)^5}{(b-a)^7} = \frac{(-1)^5(b-a)^5}{(b-a)^7} = \frac{-1}{(b-a)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}$$

Exempel Skriv

$$R(x) = \frac{1}{x^2+2x} + \frac{x+1}{4-x^2} + \frac{1}{2x^2}$$

som ett bråk (på så enkel form som möjligt),
Lösning:

$$R(x) = \frac{1}{x^2+2x} + \frac{x+1}{4-x^2} + \frac{1}{2x^2} = \{\text{ Faktoruppdela nämnarna}\} =$$

$$\frac{1}{x(x+2)} - \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{2x\cdot x} =$$

={Förläng de olika bråken, så att de nya bråken får samma nämnare. Vi har minsta gemensamma nämnare MGN $= 2x^2(x+2)(x-2)$}=

$$= \frac{2x(x-2)\cdot 1}{2x(x-2)\cdot x(x+2)} - \frac{2x^2\cdot(x+1)}{2x^2\cdot(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(x+2)\cdot 1}{(x-2)(x+2)\cdot 2x^2} =$$

$$= \frac{2x(x-2) - 2x^2(x+1) + (x+2)(x-2)}{2x^2(x+2)(x-2)} = \frac{-2x^3+x^2-4x-4}{2x^2(x^2-4)}$$

Anmärkning: Man kan också (i ovanstående exempel) först addera två av bråken och sedan till summan addera det tredje bråket. Genomför dessa räkningar!

Övningsuppgifter

Ö-15 Beräkna

[1] $\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{4} - \frac{13}{6})$

[2] $(\frac{1}{12} + \frac{1}{6})/(\frac{5}{8} - \frac{5}{6})$

Ö-16 Beräkna

[1] 2^{-3}

[2] $(1/3)^{-2}$

[3] $(-5)^{-3}$

Ö-17 Skriv som potens av 2

[1] $1/32$

[2] $128/2^8$

[3] $8^5/4^3$

Ö-18 Förenkla

[1] $(30x^4y^7)/(12xy^{10})$

[2] $(3a^3b^4 + 6ab^2)/(3ab^2)$

[3] $(10y^2z^3 + 5zy - 15z^2y)/(5yz)$

Ö-19 Förenkla

[1] $(a-b)/(b-a)$

[2] $(a-b)^2/(b-a)^2$

[3] $(a-b)^2/(b-a)$

[4] $(b-a)^2/(a-b)^3$

[5] $(a-b)^5/(b-a)^3$

Ö-20 Förkorta (om möjligt)

[1] $(a^2+ab)/(a^2-b^2)$

[2] $(4x^2-x^4)/(x^2-4x+4)$

[3] $(x^3-1)/(x^3+x^2+x)$

Ö-21 Förenkla

[1] $(1/x)/y - (1/y)/x + 1/(2y/x) + 2/(x/y)$

[2] $(a/b + b/a + 2)/(1/b - b/a^2)$

Ö-22 Lös ekvationen

[1] $2x/7 + 3/4 = 11/8$

[2] $(5x + 7)/(4x - 14) - 1/3 = (3x + 11)/(2x - 7)$

Ö-23 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt):

[1] $x/(x-1) - 1/(x+1)$

[2] $x + 2/(x-1) + (x+2)/(x^2 + x + 1)$

[3] $1/(1-2x) - 2/(1+2x) + {}$ $+(6x+2)/(4x^2-1)$

Ö-24 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt):

[1] $1/(2x-2) - 1/(2x)$

[2] $x^2/(3-x) + (2-x)/(3+x)$

[3] $(x+1)/(2x^2-8) - (3x-1)/(4x^2+8x)$

Rationella uttryck, Polynomdivision

Ett *rationellt uttryck* (i x) kan skrivas på formen $\frac{p(x)}{q(x)}$, där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom och $q(x) \neq 0$, dvs $q(x)$ ej identiskt noll. Om nu gradtalet för $p(x)$ är större än eller lika med gradtalet för $q(x)$, kan $p(x)$ divideras med $q(x)$, så att gradtalet för *restpolynomet* $r(x)$ blir mindre än gradtalet för $q(x)$. Man får $\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}}$, där $k(x)$ kallas *kvotpolynom*. Polynomen $k(x)$ och $r(x)$ kan bestämmas med en *polynomdivisionsalgoritm* (se följande exempel)

Exempel

Dividera $(3x^3 + x^2 + 4x - 3)/(x^2 - 3x + 1)$ så långt som möjligt.

Lösning:

$$\begin{array}{rr|rl}
 & & 3x + 10 & (= k(x)) \\
(q(x) =) & x^2 - 3x + 1 & 3x^3 + x^2 + 4x - 3 & (= p(x)) \\
 & & -(3x^3 - 9x^2 + 3x) & \\
 & & 10x^2 + x - 3 & \\
 & & -(10x^2 - 30x + 10) & \\
 & & 31x - 13 & (= r(x))
\end{array}$$

Svar:

$$\frac{3x^3 + x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x + 1} = 3x + 10 + \frac{31x - 13}{x^2 - 3x + 1}$$

Övningsuppgifter

Ö-25 Dividera så långt som möjligt:

[1] $(x^2 + x + 1)/(x - 1)$

[2] $(x^2 - 1)/(x^2 + 1)$

[3] $(x^3 - 5x + 1)/(x + 2)$

Ö-26 Dividera så långt som möjligt:

[1] $(6x^2 - 7x + 2)/(2x - 1)$

[2] $(1 - x^3)/(2x^2 + x - 1)$

[3] $(3x^5 + 2x^2 + 4)/(x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$

1.3 Lineära ekvationssystem

Vid lösning av ekvationer med flera obekanta söker man genom *elimination* skaffa sig en ekvation, som innehåller endast en obekant. Man kan använda sig av en av två metoder — substitutionsmetoden eller additionsmetoden. För att illustrera, ges nedan ett exempel: (Tecknet "$\Longleftrightarrow$" betyder "om och endast om")

Exempel

Lös ekvaionssystemet $\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

Lösning: Metod 1 [Substitutionsmetoden]
Den första ekvationen ger $x = (4 - 5y)/2$, som man sätter in i den andra. Då erhålles

$$3(4 - 5y)/2 + 2y = -5 \Longleftrightarrow 12 - 15y + 4y = -10 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -11y = -22 \Longleftrightarrow \boxed{y = 2}$$

Alltså är $x = (4 - 5y)/2 = (4 - 10)/2 = -3$, och man får ett
Svar: $x = -3, y = 2$

Lösning: Metod 2 [Additionsmetoden]
Multiplicera (för att eliminera x) båda leden i de givna ekvationerna med 3 resp. (-2) och addera dem:

$$\begin{array}{r} 6x + 15y = 12 \\ -6x - 4y = 10 \\ \hline 11y = 22 \end{array}$$

Härav fås $\boxed{y = 2}$, som insatt i en av de givna ekvationerna ger $x = -3$.

OBS! Kontrollera alltid svaret genom insättning i de givna ekvationerna!
Anmärkning: Den lineära ekvationen $ax + by = c$ betyder geometriskt en rät linje. Ett system av sådana ekvationer har alltså a) en b) ingen eller c) oändligt många lösningar beroende på om de räta linjerna är a) skärande b) parallella (och olika) c) sammanfallande.

Övningsuppgifter

Ö-27 Lös ekvationssystemet

[1] $\begin{cases} x + 3y &= 5 \\ x + 5y &= 7 \end{cases}$

[2] $\begin{cases} x - y &= 6 \\ 3x + 2y &= 1 \end{cases}$

[3] $\begin{cases} 2x + 3y &= -1 \\ 5x - 2y &= 7 \end{cases}$

Ö-28 Lös ekvationssystemet

[1] $\begin{cases} 3x + 2y &= 3 \\ 6x + 4y &= 4 \end{cases}$

[2] $\begin{cases} 2x - y &= 2 \\ 6x - 3y &= 6 \end{cases}$

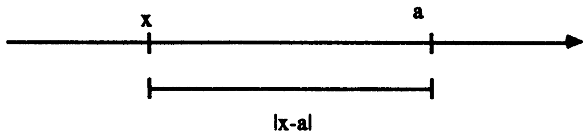
[3] $\begin{cases} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + 3z &= -6 \\ x + 3y - 2z &= 5 \end{cases}$

1.4 Absolutbelopp

DEFINITION

$$|x| = \begin{cases} x & om \quad x \geq 0 \\ -x & om \quad x < 0 \end{cases}$$

Alltså är $|x| \geq 0$ för alla x och om $|x| = a$ så är $x = \pm a$. Geometriskt kan $|x - a|$ uppfattas som avståndet mellan punkterna x och a på tallinjen.



Exempel Enligt definitionen är $|-2| = -(-2) = +2$, ty $x = -2 < 0$.

Exempel Ekvationen $|x - 1| = 3$ kan skrivas $x - 1 = \pm 3$, varför rötterna är $x_1 = 1 + 3 = 4$, och $x_2 = 1 - 3 = -2$.

Exempel Olikheten $|x + 2| < 5$ kan även skrivas $-5 < x + 2 < 5$, dvs $-7 < x < 3$.

Studera tallinjen!

Övningsuppgifter

Ö-29 Bestäm

[1] $|5|$
[2] $|-5|$
[3] $|6 - 8|$
[4] $|2 - 3,5|$
[5] $|-6 - 8|$

Ö-30 Lös ekvationerna

[1] $|x - 1| = 2$
[2] $|x + 3| = 5,5$
[3] $|2 - x| = 2$
[4] $|x + 1| = 1/3$
[5] $|x + 2| = -2$
[6] $|3x - 5| = 1$

Ö-31 Angiv utan absolutbelopp de x, som satisfierar:

[1] $|x| < 4$
[2] $|x - 2| \leq 3$
[3] $|3x + 2| < 1$
[4] $1 < |x + 2| \leq 3$

Ö-32 Skriv $f(x)$ utan absolutbelopp, om $f(x)$ är:

[1] $x + |x|$
[2] $2x - |x|$
[3] $|x + 1| + |x - 2|$
[4] $4|3x - 1| + |6x + 3|$

1.5 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom $x^2 = x \cdot x \geq 0$ för alla *reella* tal x, har ekvationen $x^2 = b$ reella lösningar endast om $b \geq 0$.

DEFINITION

> Med $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal vars kvadrat är b. Alltså är $(\sqrt{b})^2 = b$ för $b \geq 0$.

OBS! $\sqrt{b} > 0$ för $b > 0$. Exempelvis är $\sqrt{16} = +4$ och *inte* ± 4.
(Mycket vanligt fel att tro motsatsen!)
Av definitionen på $\sqrt{b}$ följer vissa räkneregler:

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$ för a och $b > 0$.
2. $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, varför $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$, alla a.
3. $1/\sqrt{b} = \sqrt{b}/b$ för $b > 0$.
4. $\begin{cases} 1/(\sqrt{a}+\sqrt{b}) &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})/(a-b) \\ 1/(\sqrt{a}-\sqrt{b}) &= (\sqrt{a}+\sqrt{b})/(a-b) \end{cases}$
   för a och $b > 0$ och $a \neq b$

Reglerna 4 kallas *förlängning med konjugatuttryck.* (se exempel nedan.)
OBS! I allmänhet är $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exempel

Förenkla $\sqrt{(-2)^2}$.
Lösning:
Enligt räkneregel 2 ovan, är $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.
En alternativ lösningsmetod är $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Exempel

Skriv med heltalsnämnare $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$
Lösning:
Förläng med konjugatet till nämnaren:

$$\frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{9-5} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

Exempel

Förenkla $\frac{1-x}{\sqrt{x-1}}$ och ange definitionsmängd.
Lösning:
$\sqrt{x-1}$ är definierat för $x \geq 1$, men $1/\sqrt{x-1}$ endast för $x > 1$. För $x > 1$ är:

$$\frac{1-x}{\sqrt{x-1}} = \frac{-(x-1)}{\sqrt{x-1}} = -\frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}} = -\sqrt{x-1}$$

Svar: För $x > 1$ är $\frac{1-x}{\sqrt{x-1}} = -\sqrt{x-1}$

Övningsuppgifter

Ö-33 Förenkla

[1] $\sqrt{9}$
[2] $\sqrt{3^2}$
[3] $\sqrt{(-3)^2}$

Ö-34 Förenkla

[1] $\sqrt{0,16}$
[2] $\sqrt{6250000}$
[3] $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$

Ö-35 Förenkla

[1] $\sqrt{18}/\sqrt{96}$
[2] $\sqrt{2}+\sqrt{8}$
[3] $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$
[4] $\sqrt{12}+\sqrt{3}+\sqrt{48}-\sqrt{75}$

Ö-36 Skriv med heltalsnämnare:

[1] $2/\sqrt{14}$
[2] $1/(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
[3] $1/(1+\sqrt{6})$
[4] $(4-\sqrt{5})/(7-\sqrt{5})$
[5] $1/[(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}]$
[6] $1/(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$

Ö-37 Förenkla

[1] $\sqrt{a^2\cdot b}$, om $a>0$ och $b>0$
[2] $\sqrt{a^2\cdot b}$, om $a<0$ och $b>0$
[3] $a\cdot\sqrt{b/a}$, om $a>0$ och $b>0$
[4] $a\cdot\sqrt{b/a}$, om $a<0$ och $b<0$

Ö-38 Förenkla följande uttryck (och angiv definitionsmängd):

[1] $(x+2)/\sqrt{x+2}$
[2] $(5-x)/\sqrt{x-5}$
[3] $(x^2-4x)/\sqrt{4-x}$
[4] $(1-x)/\sqrt{x^3-x^2}$
[5] $(x^2+x)/\sqrt{x^3+x^2}$
[6] $x/(\sqrt{x+1}-1)$
[7] $(2-x-x^2)/(x+\sqrt{2-x})$

Ekvationen $x^2=b$ har för $b>0$ två olika reella *rötter* $x_1=\sqrt{b}, x_2=-\sqrt{b}$. Man skriver

$$x^2=b\Longrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{b}\text{ för } b\geq 0$$

OBS!

$$x^2=a^2\Longleftrightarrow x=\pm a$$

$$\begin{cases} p=\sqrt{q} & \Longrightarrow\quad p^2=q \text{ men} \\ p^2=q & \Longrightarrow\quad p=\pm\sqrt{q} \end{cases}$$

Exempel Ekvationen $9x^2-2=0$, dvs $x^2=2/9$ har rötterna $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}/3$.

Exempel Ekvationen $1+\sqrt{x}=0$, dvs. $\sqrt{x}=-1$ saknar lösning, ty $\sqrt{x}\geq 0$.

Övningsuppgifter

Ö-39 Lös ekvationen

[1] $x^2 = 4$

[2] $x^2 - 27 = 0$

[3] $4 - 3x^2 = 0$

Ö-40 Lös ekvationen

[1] $\sqrt{x} = 4$

[2] $\sqrt{x+1} = 2$

[3] $\sqrt{x} + 2 = 0$

[4] $\sqrt{x^2+1} = 2$

[5] $\sqrt{x^2+2} = 1$

[6] $\sqrt{x^2+4x-9} = 2\sqrt{x}$

1.6 Icke-reella tal. Komplexa tal

Ekvationen $x^2 = b$ saknar *reella* rötter om $b = -c < 0$. Däremot har den icke-reella (imaginära) rötter: $x_1 = i\sqrt{c}, x_2 = -i\sqrt{c}$, där $i^2 = -1$. Man kan nu (något oegentligt) skriva:

$$x^2 = -c \Longrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-c} = \pm i\sqrt{c};\ c > 0$$

Exempel

Ekvationen $x^2+3 = 0$, dvs $x^2 = -3$ har rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$, dvs:

$$\begin{cases} x_1 = i\sqrt{3} \\ x_2 = -i\sqrt{3} \end{cases}$$

Ett *komplext* tal kan skrivas på formen $u + iv$, där u och v är reella tal och i är den *imaginära enheten*, som satisfierar ekvationen $i^2 = -1$.

Exempel

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \{\text{ Konjugatregeln}\} = \frac{2-3i}{4-9i^2} = \frac{2-3i}{13}$$

Övningsuppgifter

Ö-41 Lös ekvationen

[1] $x^2 = -9$

[2] $x^2 + 4 = 0$

[3] $16x^2 + 25 = 0$

[4] $(x-1)^2 = -3$

[5] $(x+3)^2 + 10 = 0$

Ö-42 Skriv på formen $u + iv$

[1] $(1+3i) - (2-i)$

[2] $(1+3i)(2-i)$

[3] $(1+3i)/(2-i)$

[4] $1/(1+3i) + 1/(2-i)$

1.7 Andragradsekvationer. Faktoruppdelning av andragradspolynom.

En andragradsekvation $ax^2+bx+c=0$ kan, då $a \neq 0$, skrivas på *normalform*:$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. En andragradsekvation på normalform, $x^2+px+q=0$, kan lösas genom *kvadratkomplettering*:

$$x^2+2\frac{p}{2}x+(\frac{p}{2})^2-(\frac{p}{2})^2+q=0 \iff (x+\frac{p}{2})^2=(\frac{p}{2})^2-q$$

Alltså gäller att:

Ekvationen $x^2+px+q=0$ har rötterna $$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$$

Dessa rötter x_1 och x_2 är

[1] Reella och olika, om $(p/2)^2-q>0$

[2] Reella och lika, om $(p/2)^2-q=0$

[3] Icke-reella och olika, om $(p/2)^2-q<0$

OBS! Om $q=0$, har ekvationen $x^2+px=0$ en rot $x_1=0$, samt roten $x_2=-p$.

Exempel

Beräkna rötterna till ekvationen $3-5x^2=2x$.
Lösning:
Ekvationen kan skrivas på normalform: $x^2+\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}=0$, och har rötterna

$$x_{1,2}=-\frac{1}{5}\pm\sqrt{(\frac{1}{5})^2-(-\frac{3}{5})}=-\frac{1}{5}\pm\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{15}{25}}=-\frac{1}{5}\pm\frac{4}{5}$$

Alltså är rötterna $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3}{5} \\ x_2=-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-1 \end{cases}$

Exempel

Ekvationen $x^2-6x+13=0$ har rötterna

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-13}=3\pm\sqrt{-4}=3\pm 2i$$

OBS! Kontrollera alltid svaret genom insättning i den givna ekvationen!

Övningsuppgifter

Ö-43 Bestäm rötterna till ekvationerna.

[1] $x^2+6x+5=0$

[2] $x^2=x+6$

[3] $2x^2+3+5x=0$

[4] $11x^2=3x$

[5] $3x^2+5x-1=0$

[6] $9x^2+1-6x=0$

[7] $6+3x-4x^2=0$

Ö-44 Lös ekvationerna, dvs. bestäm alla rötter:

[1] $x^2-4x+6=0$

[2] $x^2+x+1=0$

[3] $2x^2+5=3x$

[4] $x^4-20x^2+64=0$ (Sätt här $x^2=z$)

[5] $3+2x^2=x^4$

Faktoruppdelning (av andragradspolynom)

Om ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna x_1 och x_2, så kan *polynomet* $x^2 + px + q$ faktoruppdelas:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Anmärkning: Om $(p/2)^2 - q < 0$, så är x_1 och x_2 icke-reella och i så fall kan $x^2 + px + q$ *ej* faktoruppdelas med reella tal. (Däremot kan $x^2 + px + q$ alltid faktoruppdelas med *komplexa* tal.)

Exempel

Faktoruppdela polynomet $P(x) = 2x^2 - x - 1$.

Lösning:

$2x^2 - x - 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$. Lös därför först ekvationen $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Man får

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

Rötterna är alltså $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1/2 \end{cases}$.

Alltså är $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x - \frac{1}{2})$, varför

$$P(x) = 2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)(x + \frac{1}{2}) = (x - 1)(2x + 1)$$

Övningsuppgifter

Ö-45 Faktoruppdela (med reella tal):

[1] $x^2 + 3x - 4$

[2] $6 - 2x - 4x^2$

[3] $x^2 + 2x + 2$

[4] $8x - 8x^2 - 2$

[5] $2x^2 - 6x + 1$

Ö-46 Angiv en andragradsekvation med rötterna:

[1] 1 och -2

[2] $2 + \sqrt{3}$ och $2 - \sqrt{3}$

[3] $1 + i$ och $1 - i$

1.8 Faktorsatsen. Ekvationer av större gradtal än två.

Sats

Faktorsatsen

Om $p(x)$ är ett *polynom* i x och $p(x_1) = 0$, dvs om x_1 är en *rot* till polynomekvationen $p(x) = 0$, så är $(x - x_1)$ en *faktor* i $p(x)$, dvs.

$$p(x) = (x - x_1) \cdot q(x)$$

, där $q(x)$ är ett polynom av en enhet lägre grad än $p(x)$.

Exempel

Lös ekvationen $x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = 0$.

Lösning:

Efter prövning (av t.ex. $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) finner man att $x_1 = -1$ är en rot, ty $-1 - 11 - 23 + 35 = 0$. Enligt faktorsatsen är alltså polynomet $x^3 - 11x^2 + 23x + 35$ delbart med $x - x_1 = x - (-1) = x + 1$.
Division (av polynom, se 1.2) ger

$$x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = (x + 1)(x^2 - 12x + 35)$$

Tredjegradsekvationens övriga rötter fås ur ekvationen $x^2 - 12x + 35 = 0$. Man får alltså $x_{2,3} = 6 \pm \sqrt{36 - 35} = 6 \pm 1$, dvs. $x_2 = 5$ och $x_3 = 7$.

Svar: Ekvationen har rötterna $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ och $x_3 = 7$.

Tillägg: Vi har alltså faktoruppdelningen $x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = (x + 1)(x - 5)(x - 7)$.

OBS! En tredjegradsekvation har alltid tre rötter (lika eller olika)

Övningsuppgifter

Ö-47 Lös ekvationerna

[1] $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$

[2] $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$

[3] $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$

[4] $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$

Ö-49 Lös ekvationerna

[1] $(x - 1)^4 = 0$

[2] $x^4 - 1 = 0$

[3] $(x^2 - 1)^2 = 0$

Ö-48 Faktoruppdela (med reella tal):

[1] $x^3 + 2x^2 - 8x$

[2] $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$

[3] $x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

[4] $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$

Ö-50 Faktoruppdela

[1] $2(x^3 - x^2 + x - 1)$

[2] $2x^3 - 17x^2 + 41x - 30$

[3] $x^3 + x^2 - 6x - x^2y - xy + 6y$

1.9 Olikheter.

Exempel

För vilka x är $x^3 + 23x < 11x^2 - 35$?

Lösning:

Olikheten kan skrivas $p(x) = x^3 - 11x^2 + 23x + 35 < 0$. (Ha alltid för vana att flytta över termer, så att ena ledet blir noll.) Enligt exempel ovan har vi faktoruppdelningen $p(x) = (x + 1)(x - 5)(x - 7)$.
Teckenstudium ger nu:

x		-1		5		7	
p(x)	- - -	0	+ + + +	0	- - -	0	+ + +

Svar: Olikheten gäller för $x < -1$ och för $5 < x < 7$.

Exempel För vilka x är $x+1 \geq \frac{2}{x}$?

Lösning:

Olikheten kan skrivas $R(x) = x + 1 - \frac{2}{x} \geq 0$, där

$$R(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x} \overset{*}{=} \frac{(x+2)(x-1)}{x}$$

I * har vi endast faktoruppdelat täljaren. Teckenstudium av $R(x)$ ger nu:

x		-2		0		1	
R(x)	- - -	0	+ + + +	(ej def.)	- - -	0	+ + +

Svar: Olikheten gäller för $-2 \leq x < 0$ och för $x \geq 1$

OBS! Den givna olikheten (i senaste exemplet) får *ej* skrivas $x(x+1) \geq 2$, dvs olikheten får ej multipliceras med x, ty x kan vara negativt!

Allmänt gäller att $\begin{cases} a > b \iff a \cdot c > b \cdot c, & om \quad c > 0 \\ a > b \iff a \cdot c < b \cdot c, & om \quad c < 0 \end{cases}$

Ö-51 För vilka x gäller följande olikheter?

[1] $x^2 > (x+2)^2$

[2] $3x^2 \leq 2x$

[3] $x^2 + x \geq 2$

[4] $x^2 + 1 \geq x$

[5] $x^3 + 6 < 2x^2 + 5x$

[6] $6 + 3x^2 \leq 5x + x^3$

Ö-52 För vilka x gäller följande olikheter?

[1] $(x+1)/x \geq 3$

[2] $(2x-1)/(x-2) \leq 3$

[3] $1/x \geq 2x - 1$

1.10 n:te roten ur ett reellt tal. Allmänna potenser

Med $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ menas den reella (och positiva, om $n = 2m$ = jämnt heltal) roten till ekvationen $x^n = b$. Alltså är $(b^{\frac{1}{n}})^n = b$, dvs $(\sqrt[n]{b})^n = b$.
För den vanliga *kvadratroten* gäller alltså att $\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{1/2}$ för $b \geq 0$. Om $b > 0$ definieras *potensuttrycket* $b^{m/n}$ (med rationell exponent (m/n)) genom $b^{(m/n)} = \sqrt[n]{b^m}$. Man kan visa att $b^{(m/n)}$ satisfierar (de allmänna) potens- och exponentiallagarna:

Potens- och exponentiallagarna

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

$$(b^x/b^y) = b^{x-y}$$

$$(b^x)^y = b^{x \cdot y}$$

$$\begin{cases} (ab)^x = a^x \cdot b^x \\ (a/b)^x = a^x/b^x \end{cases}$$

Anmärkning: Den andra lagen ger speciellt $1/b^y = b^{-y}$, om $x = 0$.

Exempel

Förenkla $\sqrt[6]{2\sqrt{2}}$.

Lösning:

$$\sqrt[6]{2\sqrt{2}} = (2\cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

Ö-53 Förenkla

[1] $8^{1/6}$

[2] $4^{-1,5}$

[3] $(\sqrt{27})^{4/3}$

[4] $9^{-1/6} \cdot 9^{0,5}$

[5] $(32)^{-1,5}/4^{-4,5}$

Ö-54 Förenkla

[1] $\sqrt[4]{9}$

[2] $\sqrt[12]{8}$

[3] $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$

[4] $\sqrt[4]{\sqrt[7]{9}}$

[5] $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{6}}}$

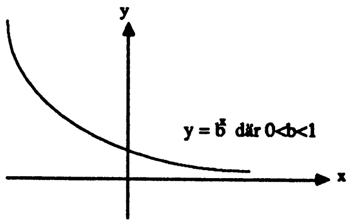
Man kan allmänt definiera *uttrycket* b^x för $b > 0$ och alla reella x, så att b^x satisfierar potenslagarna ovan. b^x kallas för en *potens* av b, där b kallas *bas* och x *exponent.* Av speciellt intresse är den (naturliga) exponentialfunktionen e^x med basen $e = 2,71828\cdots$.

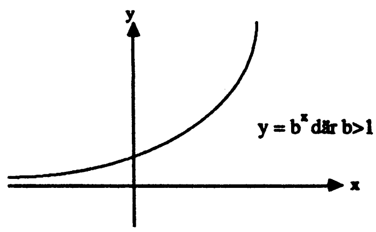
För allmänt b^x gäller bl.a. att

[1] $b^x > 0$ för alla x.

[2] $b^0 = 1$ för alla b.

[3] $f(x) = b^x$ är växande (för växande x) om $b > 1$, och avtagande (för växande x) om $0 < b < 1$.





OBS! Man skiljer på a) *potensfunktionen* $f(x) = x^b$ och b) *exponentialfunktionen* $f(x) = b^x$.

Exempel

Lös ekvationen $3^x + 2\cdot 3^{x+1} = 21$.

Lösning:

Ekvationen $3^x + 2\cdot 3^{x+1} = 21$ kan skrivas $3^x \cdot (1 + 2\cdot 3) = 21$, dvs. $3^x \cdot 7 = 21$ eller $3^x = 3$, varför $\boxed{x = 1}$

Exempel

Lös ekvationen $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.

Lösning:

Sätt $e^x = z$. Då erhålles andragradsekvationen $z^2 + 2z - 3 = 0$ med rötterna $z_1 = 1$ och $z_2 = -3$. Man får nu två fall:

[1] $e^x = z_1 = 1$ ger $x_1 = 0$.

[2] $e^x = z_2 = -3$ är en orimlighet, eftersom $e^x > 0$ för alla reella tal x.

Svar: $x = 0$

Övningsuppgifter

Ö-55 Bestäm reella lösningar till

[1] $3^x = 81$

[2] $3^{x+1} + 3^x = 36$

[3] $9^x = 1/27$

[4] $3 \cdot 2^{x+1} - 2^x = 40\sqrt{2}$

[5] $2^{x+2} + 3 \cdot 2^x = 3,5$

Ö-56 Bestäm reella lösningar till

[1] $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ (Sätt $e^x = z$)

[2] $e^{2x} + e^x + 1 = 0$

[3] $3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

[4] $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

1.11 Logaritmer

För *tio-logaritmen* lg y och *naturliga logaritmen* $\ln y$ gäller

$$x = \lg y \iff y = 10^x, \text{ för } y > 0$$

$$x = \ln y \iff y = e^x, \text{ för } y > 0$$

OBS! För att lg y resp. $\ln y$ skall vara definierat krävs alltså att $y > 0$. Speciellt är

$\lg 1 = 0,\ \lg 10 = 1,\ \ln 1 = 0,\ \ln e = 1$
,ty tex $y = 1 = 10^0 = 10^x \iff \lg 1 = \lg y = x = 0$.

Av formlerna ovan följer också direkt att

$$\lg 10^x = x \text{ och } \ln e^x = x \text{ för alla reella x}$$

$$10^{\lg y} = y \text{ och } e^{\ln y} = y \text{ för alla } y > 0$$

Exempel $\lg 1000 = \lg 10^3 = 3$

Exempel $\lg 0,1 = \lg 10^{-1} = -1$

Exempel $\ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = 1/2$

Exempel Lös ekvationerna

[1] $2 \cdot \ln x = 3$
[2] $2 \cdot e^x = 3$

Lösning:

[1] $2 \cdot \ln x = 3 \iff \ln x = 1,5 \iff x = e^{1.5} = e\sqrt{e}$
[2] $2 \cdot e^x = 3 \iff e^x = 1,5 \iff x = \ln 1,5 \approx 0,406$

Övningsuppgifter

Ö-57 Förenkla

[1] $\lg 10000$
[2] $\lg 0,001$
[3] $10^{\lg 3,7}$
[4] $10^{-\lg 0,4}$

Ö-58 Förenkla

[1] $\ln e^3$
[2] $\ln \sqrt[3]{e}$
[3] $\ln(1/\sqrt{e})$
[4] $e^{\ln 5}$
[5] $e^{-\ln 1,5}$

Ö-59 Lös ekvationerna

[1] $\lg x = 0$
[2] $\ln x = -1$
[3] $4 \cdot \lg x = 1$

Ö-60 Bestäm reella lösningar till:

[1] $e^x = 4$
[2] $3 \cdot 10^x = 4$
[3] $2 \cdot 10^x + 10^{x+1} = 36$
[4] $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
[5] $2 \cdot 10^{2x} - 10^x - 6 = 0$

Ur potenslagarna kan man härleda följande *logaritmlagar* (för y och $z > 0$):

Sats

Logaritmlagarna

[1] $\ln(y \cdot z) = \ln y + \ln z$
[2] $\ln \frac{y}{z} = \ln y - \ln z$
[3] $\ln y^p = p \cdot \ln y$

Motsvarande lagar gäller också för tio-logaritmen, lg .

Av lag 2 följer speciellt att

$$\ln \frac{1}{z} = -\ln z$$

OBS! $\ln(y + z)$ är *inte* lika med $\ln y + \ln z$. (Mycket vanligt fel att tro motsatsen!)

Exempel

Lös ekvationen $2 \cdot \lg x - 3 \cdot \lg 2 = -1$

Lösning:

För att lg x skall vara definierat krävs att $x > 0$. För $x > 0$ gäller enligt logaritmlagarna, att

$$2 \cdot \lg x - 3 \cdot \lg 2 = -1 \iff \lg x^2 - \lg 2^3 = -1 \iff \lg\left(\frac{x^2}{8}\right) = -1 \iff$$

$$\iff \frac{x^2}{8} = 10^{-1} \iff x^2 = \frac{4}{5} \iff x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \ (ty\ x > 0).$$

Svar: $x = 2\sqrt{5}/5$.

Övningsuppgifter

Ö-61 Förenkla

[1] $\lg 80 - \lg 8$

[2] $\ln 48 + 6 \cdot \ln 1 - 3 \cdot \ln 2$

[3] $\lg 8 - 6 \cdot \lg \sqrt{2}$

[4] $\ln(1/9) + \ln \sqrt{27}$

[5] $2 \ln 24 + 3 \ln \frac{1}{4} + 5 \ln 9 - 4 \ln 27$

[6] $2\lg 0,12 - 1,5\lg 4 - \lg 1,8 + 10\lg 1$

Ö-62 Sök reella lösningar till ekvationerna

[1] $\ln x + 2 \cdot \ln 3 = \ln 5$

[2] $2\lg x + \lg 4 = 2$

[3] $3 \ln(x+1) - \ln x^3 = 6 \ln 4$

[4] $\ln(x-2) + \ln x = 3 \ln 2$

[5] $\ln(x+1) + \ln(2-x) = \ln(x-1)^2$

[6] $\lg (3x) + \lg (x+1) = 2\lg (x-1)$

Kapitel 2 Trigonometri

2.1 Vinkelmätning

Vinklar kan mätas i (delar av) varv, grader eller radianer . Med 1 *radian* menas storleken av centrumvinkeln i en cirkelsektor, där periferibågen är lika lång som cirkelns radie. (Rita en figur!)

Sambanden mellan de olika enheterna är: 1 varv $= 360° = 2\pi$ radianer. Härav fås:

$$\boxed{\begin{array}{c} 1° = \pi/180 \text{ radianer och} \\ 1 \text{ radian} = 180°/\pi \approx 57.3° \end{array}}$$

(Ofta skriver man inte ut enheten radian, utan skriver t.ex. $90° = \pi/2$.)

Övningsuppgifter

Ö-63 Bestäm grader och radianer för

[1] 1/4 varv

[2] 2/3 varv

Ö-64 Bestäm grader och radianer för

[1] $-1/2$ varv

[2] -5 varv (Rita figur!)

Ö-65 Omvandla till radianer

[1] 45°

[2] 75°

[3] −60°

[4] 210°

Ö-66 Omvandla till grader

[1] $\pi/6$

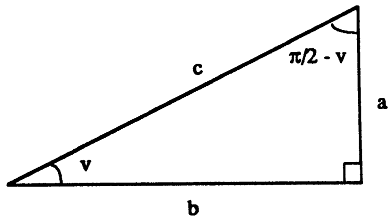
[2] $-\pi/8$

[3] $23\pi/12$

[4] -5π

2.2 Rätvinkliga trianglar

I en rätvinklig triangel är en vinkel $90° = \pi/2$ (radianer). Om en av de övriga vinklarna är v, blir den tredje vinkeln $\pi/2 - v$, eftersom vinkelsumman i en triangel är $180° = \pi$.
Vinkeln $\pi/2 - v$ kallas *komplementvinkeln* till v. Den sida som står mot den räta vinkeln kallas *hypotenusa* och de båda överiga sidorna kallas *kateter*.



För rätvinkliga trianglar gäller Pythagoras sats:

Sats

Pythagoras sats

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De trigonometriska funktionerna definieras (för $0 < v < \pi/2$):

DEFINITION

$\sin v = (a/c) =$ (motstående katet)/(hypotenusa)
$\cos v = (b/c) =$ (närliggande katet)/(hypotenusa)
$\tan v = (a/b) =$ (motstående katet)/(närliggande katet)
$\cot v = (b/a) =$ (närliggande katet)/(motstående katet)

Härur fås:

$a = c \cdot \sin v, \; b = c \cdot \cos v$
$a = b \cdot \tan v, \; b = a \cdot \cot v$, samt att

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{\cot v}$.

För komplementvinkeln $(\pi/2 - v)$ gäller :
$\sin(\pi/2 - v) = \cos v, \; \cos(\pi/2 - v) = \sin v$
$\tan(\pi/2 - v) = \cot v, \; \cot(\pi/2 - v) = \tan v$

Man erhåller också :

Sats

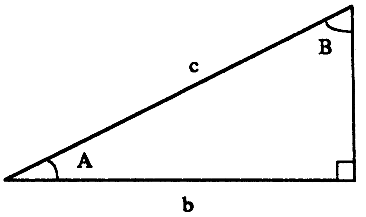
Trigonometriska ettan

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

(Fås direkt ur Pythagoras sats)

OBS! $\sin^2 v = (\sin v)^2 = \sin v \cdot \sin v$; $(\sin v)^2$ är *ej* lika med $\sin^2 v^2$.

Exempel

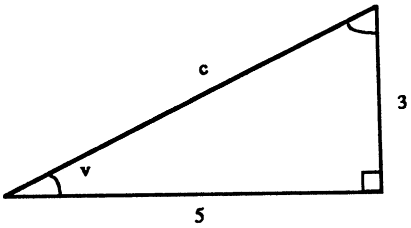


Solvera en rätvinklig triangel med $a = 3,0$ och $A = 25°$ (se figur.), dvs. bestäm de sidor och vinklar som inte är givna.
Lösning:
Vinkeln $B = 90° - A = 65°$. Nu är $\sin A = a/c$, varför sidan

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{3,0}{\sin 25°} \approx \frac{3,0}{0,423} \approx 7,1$$

($\sin 25°$ fås med räknedosa, räknesticka eller ur tabell.)
Vidare är $\tan A = a/b$, varför $b = a/\tan A \approx 3,0/0,466 \approx 6,4$.
Svar: $B = 65°$, $c \approx 7,1$, och $b \approx 6,4$ (längdenheter).

Exempel



Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 3/5$ och $0 < v < \pi/2$.
Lösning:
Rita en rätvinklig triangel med kateterna $a = 3$ och $b = 5$. Då är $\tan v = 3/5$. Enligt Pythagoras' sats är hypotenusan då

$$c = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ varför } \sin v = \frac{3}{\sqrt{34}}, \ \cos v = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

Övningsuppgifter

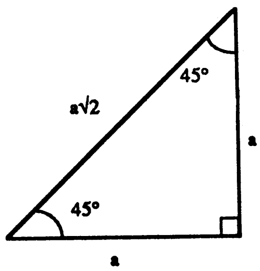
Ö-67 Solvera följande rätvinkliga trianglar (beteckningar enligt figur ovan):

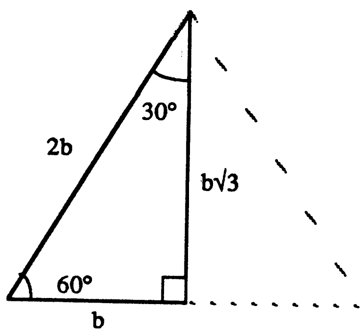
[1] $c = 3,6$ och $A = 40°$
[2] $a = 2,0$ och $b = 4,0$
[3] $a = 4,0$ och $B = 35°$
[4] $b = 3,5$ och $B = 30°$
[5] $b = 2,5$ och $c = 4,5$
[6] $b = 2,7$ och $A = 27°$

Ö-68 Bestäm (för $0 < v < \pi/2$) exakta värdet av:

[1] $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 1/3$. (Ledning: Rita en rätvinklig triangel med $a = 1$ och $c = 3$)
[2] $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 2/3$
[3] $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 5/2$
[4] $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = 0,3$

Vi härleder nu de trigonometriska funktionernas värden för 45°, 60° och 30°. (Om man inte kan dessa värden utantill, måste man snabbt kunna göra en härledning.)





För $v = 45° = \pi/4$ är den rätvinkliga triangeln (figur 1 ovan) en halv kvadrat. Då är kateterna a och $b = a$, samt hypotenusan $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$, varför:

$$\sin 45° = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 45° = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$
$$\cot 45° = \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

För $v = 60° = \pi/3$ kan den rätvinkliga triangeln uppfattas som en halv liksidig triangel (figur 2 ovan). (I en liksidig triangel är alla vinklarna lika med 60°, varför vinklarna i en halv liksidig triangel är 60°, 90° och 30°.) Alltså är hypotenusan $c = 2b$ och Pythagoras' sats ger $a = \sqrt{c^2 - b^2} = b\sqrt{3}$, varför:

$$\sin 60° = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$\tan 60° = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$
$$\cot 60° = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

För $v = 30° = \pi/6$ erhålles under betraktande av samma figur som för 60°:

$$\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30° = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cot 30° = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

ty $\sin 30° = (\text{motstående katet})/(\text{hypotenusan}) = b/2b = 1/2$ osv.

Övningsuppgifter

Ö-69 Bestäm exakta värdet av

[1] $\cos 30° + \tan 30°$

[2] $(\cos 30° - \sin 30°)/(\cos 60° + \sin 60°)$

[3]

$(\tan^2 60° - \cos^2 30°)/(\tan 45° + \sin 30°)$

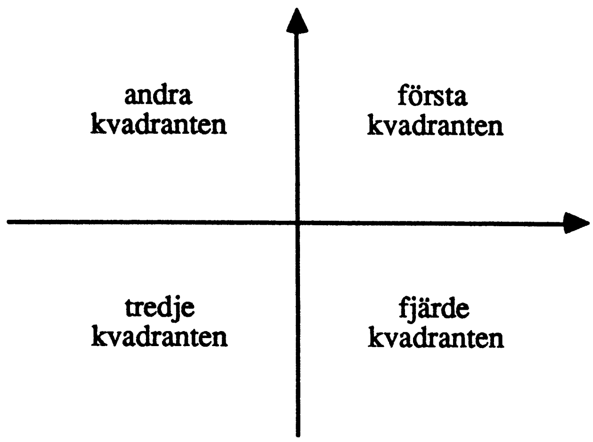
Ö-70 Förenkla

[1] $x^{\cos(\pi/6)} \cdot x^{\sin(\pi/3)}$
(Ledning: använd potenslagarna!)

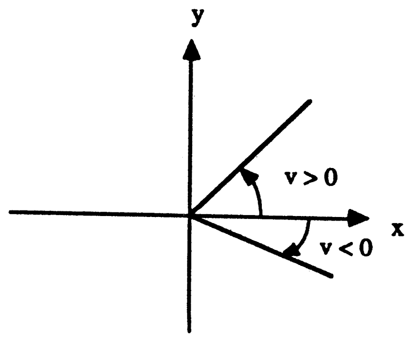
[2] $x^{\tan(\pi/4)} \cdot x^{-\cos(\pi/6)}$

[3] $x^{\sin(\pi/6)+\cos(\pi/3)}/x^{\tan(\pi/4)+\cot(\pi/4)}$

2.3 De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar.

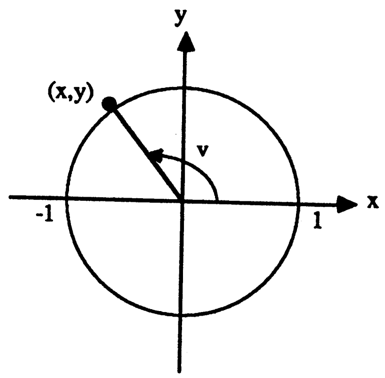


xy-planet är uppdelat i fyra kvadranter:



En vinkel räknas positiv om den mäts *moturs*, och negativ om den mäts *medurs*, vanligen räknat från positiva x-axeln.

Antag, att (x, y) är en punkt på enhetscirkeln, vars ekvation är $x^2+y^2 = 1$. De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar definieras genom:

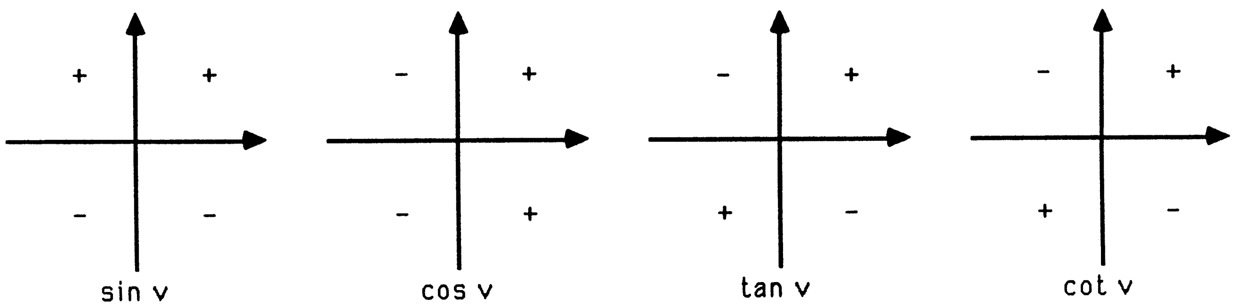


DEFINITION

$$\begin{cases} \sin v = y \\ \cos v = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan v = y/x & \text{för } x \neq 0, \quad (\text{dvs. } v \neq \pi/2 + n\pi) \\ \cot v = x/y & \text{för } y \neq 0, \quad (\text{dvs. } v \neq n\pi) \end{cases}$$

Vi ser att definitionerna stämmer överens med de tidigare givna för $0 < v < \pi/2$, dvs för $x > 0$, $y > 0$. (Rita figur!) Eftersom $\sin v = y$, är $\sin v$ positivt för vinklar i första och andra kvadranten och negativt i tredje och fjärde. Liknande regler för cos, tan, cot:



Av definitionerna ovan följer direkt att

Sats

[1] $\tan v = \sin v / \cos v = 1/\cot v$ och
$\cot v = \cos v / \sin v = 1/\tan v$

[2] $-1 \leq \sin v \leq 1$ och $-1 \leq \cos v \leq 1$
{ för *alla* vinklar v}

[3] $\sin 0 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin 3\pi/2 = -1$,
$\sin 2\pi = 0$

[4] $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$,
$\cos 2\pi = 1$

[5] $\sin v = \sin(v + n \cdot 2\pi)$ och $\cos v = \cos(v + n \cdot 2\pi)$,
för varje heltal n.

[6] $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ [Trigonometriska ettan]

Exempel

Bestäm exakt: $\cos(37\pi/6)$

Lösning:

$\cos(37\pi/6) = \cos(\pi/6 + 3 \cdot 2\pi) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

Exempel

Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = -2$ och $\pi/2 < v < \pi$.

Lösning:

Med hjälp av formeln $\cot v = \cos v / \sin v$ samt "trigonometriska ettan" får man ekvationssystemet

$$\begin{cases} \cos v / \sin v = -2 \\ \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \end{cases} \text{ med lösningar } \begin{cases} \cos v = \pm 2/\sqrt{5} \\ \sin v = \mp 1/\sqrt{5} \end{cases}$$

Eftersom v ligger i andra kvadranten, där $\cos v < 0$ och $\sin v > 0$, fås

Svar: $\cos v = -2/\sqrt{5}$ och $\sin v = 1/\sqrt{5}$

Övningsuppgifter

Ö-71 I vilken kvadrant hamnar följande vinklar?

[1] $4\pi/3$
[2] $700°$
[3] $50\pi/3$
[4] $-17\pi/6$
[5] $-1000°$
[6] $100\pi/3$

Ö-72 Bestäm exakt

[1] $\cos 33\pi$
[2] $\sin(17\pi/2)$
[3] $\sin(33\pi/4)$
[4] $\cos(-23\pi/3)$
[5] $\tan(-39\pi/4)$
[6] $\cot(-101\pi/3)$

Ö-73 Visa att

[1] $1/\cos^2 v = 1 + \tan^2 v$
[2] $1/\sin^2 v = 1 + \cot^2 v$

Ö-74 Visa (för godtyckliga heltal n) att

[1] $\sin n\pi = 0$
[2] $\cos n\pi = (-1)^n$
[3] $\sin[(2n+1)\pi/2] = (-1)^n$
[4] $\cos[(2n+1)\pi/2] = 0$

Ö-75 Bestäm exakt

[1] $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 3/4$ och $3\pi/2 < v < 2\pi$

[2] $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 0,4$ och v är i andra kvadranten.

[3] $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 3$, och $\pi < v < 3\pi/2$

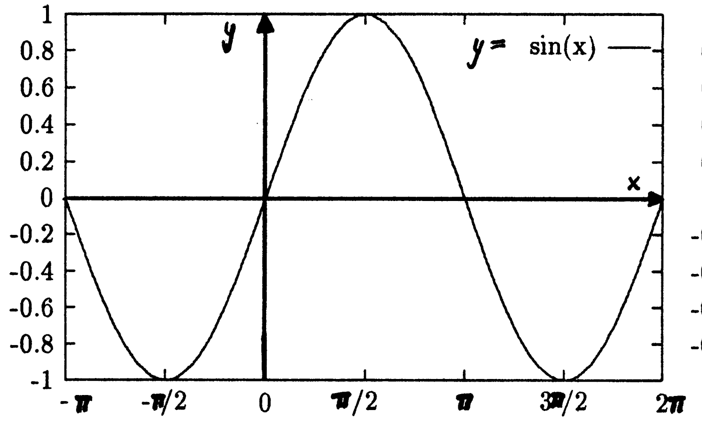
[4] $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 2/7$

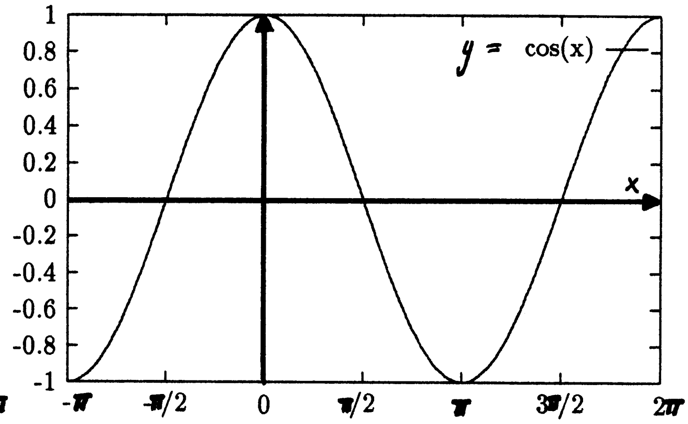
Ö-76 Beräkna exakt

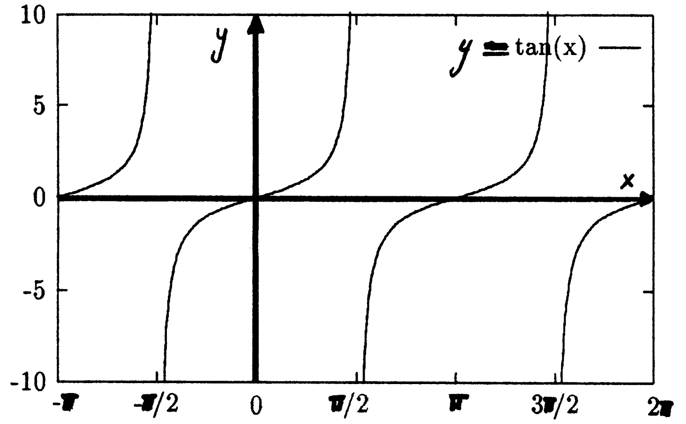
[1] $\sin v + \cos v$, om $\tan v = 4/3$ och $0 < v < \pi/2$

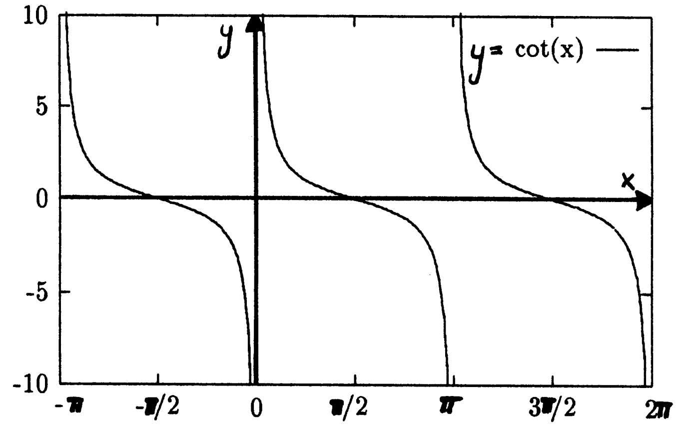
[2] $\sin v - \cos v$, om $\cot v = -3/4$ och $\pi/2 < v < \pi$

[3] $\tan v + \cot v$, om $\sin v = -9/\sqrt{145}$, och $3\pi/2 < v < 2\pi$









2.4 Några enkla trigonometriska formler.

Sats

$$\begin{cases} \sin(-v) = -\sin v \\ \cos(-v) = \cos v \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(-v) = -\tan v \\ \cot(-v) = -\cot v \end{cases}$$

$$\sin(\pi - v) = \sin v \qquad \cos(\pi - v) = -\cos v$$

$$\begin{cases} \sin(\pi/2 - v) = \cos v \\ \cos(\pi/2 - v) = \sin v \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(\pi/2 - v) = \cot v \\ \cot(\pi/2 - v) = \tan v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(v + \pi) = -\sin v \\ \cos(v + \pi) = -\cos v \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(v + \pi) = \tan v \\ \cot(v + \pi) = \cot v \end{cases}$$

Dessa formler kan härledas med hjälp av *spegling* (se lärobok från gymnasiet).

Exempel

Bestäm $\cos(5\pi/6)$.
Lösning:
$5\pi/6$ ligger i andra kvadranten. Använd formeln $\cos v = -\cos(\pi - v)$.
Vi får alltså

$$\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\cos(\pi - \frac{5\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exempel

$$\sin(\frac{35\pi}{3}) = \sin(6 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Övningsuppgifter

Ö-77 Bestäm exakt

[1] $\sin(-\pi/4)$
[2] $\sin(5\pi/6)$
[3] $\tan(-\pi/3)$
[4] $\cos(5\pi/4)$
[5] $\cos(-7\pi/6)$
[6] $\tan(2\pi/3)$

Ö-78 Bestäm exakt

[1] $\sin 210°$
[2] $\cos 120°$
[3] $\sin(-150°)$
[4] $\tan 300°$

Ö-79 Bestäm exakt

[1] $\sin(17\pi/3)$
[2] $\tan(75\pi/4)$
[3] $\cos(50\pi/3)$
[4] $\cot(-100\pi/3)$

Ö-80 Visa (utgående från formlerna ovan) att

[1] $\tan(\pi - v) = -\tan v$
[2] $\cot(\pi - v) = -\cot v$

Av formlerna ovan (i detta och föregående avsnitt) erhålles:

Sats

(1) $\sin v = \sin u \iff v = u + n \cdot 2\pi$ eller $v = \pi - u + n \cdot 2\pi$

(2) $\cos v = \cos u \iff v = u + n \cdot 2\pi$ eller $v = -u + n \cdot 2\pi$

(3) $\tan v = \tan u \iff v = u + n \cdot \pi$

I samtliga formler ovan är n ett godtyckligt heltal.

Exempel

Lös ekvationen $\sin v = -0,5$, dvs bestäm alla vinklar v som satisfierar ekvationen.
Lösning:
En lösning är $v = -\pi/6$, ty $\sin(-\pi/6) = -\sin \pi/6 = -1/2$
Formel [1] ovan ger $\sin v = \sin(-\pi/6) \iff v = -\pi/6 + 2n\pi$ eller $v = \pi - (-\pi/6) + 2n\pi$
Svar: $v = -\pi/6 + 2n\pi$ eller $v = 7\pi/6 + 2n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

Övningsuppgifter

Ö-81 Lös ekvationerna

[1] $\sin v = 1/2$

[2] $\cos v = 1/\sqrt{2}$

[3] $\tan v = \sqrt{3}$

Ö-82 Lös ekvationerna

[1] $\sin v = -\sqrt{3}/2$

[2] $\cos 5v = -1/2$ (Sätt $5v = t$)

[3] $\tan 3v = -1$

Ö-83 Lös ekvationerna

[1] $\cos 4v = \cos v$

[2] $\sin 4v = \sin v$

[3] $\tan v = \tan 4v$

[4] $\cos 4v = \sin v$

Ö-84 Lös ekvationena

[1] $4\cos^2 v = 3$

[2] $2\cos^2 v + \cos v = 1$ (Sätt $\cos v = z$)

[3] $2\sin^2 v + 3\sin v = 2$

[4] $\tan^2 v + \tan^3 v = 3 + 3\tan v$

2.5 Additions- och subtraktionsformler.

Följande formler måste man kunna *utantill* eller kunna härleda:

Sats

$$\boxed{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lcl} \sin(u+v) &=& \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\ \sin(u-v) &=& \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{lcl} \cos(u+v) &=& \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v \\ \cos(u-v) &=& \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{lcl} \tan(u+v) &=& (\tan u + \tan v)/(1 - \tan u \cdot \tan v) \\ \tan(u-v) &=& (\tan u - \tan v)/(1 + \tan u \cdot \tan v) \end{array}\right. \end{array}}$$

OBS! $\sin(u+v)$ är *inte* lika med $\sin u + \sin v$.
(Alltför vanligt fel att tro motsatsen!)

Exempel

Härled formeln för $\cos(u+v)$ utgående från formeln för $\sin(u-v)$.
Lösning:

$$\cos(u+v) = \sin[\frac{\pi}{2} - (u+v)] = \sin[(\frac{\pi}{2} - u) - v] =$$
$$= \sin(\frac{\pi}{2} - u) \cdot \cos v - \cos(\frac{\pi}{2} - u) \cdot \sin v =$$
$$= \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

Övningsuppgifter

Ö-85 Härled formeln för

[1] $\sin(u-v)$ utgående från formeln för $\sin(u+v)$.
(Ledning: $u - v = u + (-v)$)

[2] $\tan(u+v)$ från formlerna för $\sin(u+v)$ och $\cos(u+v)$.

[3] $\tan(u-v)$ från formeln för $\tan(u+v)$.

Ö-86 Bestäm $\tan(u+v)$, om

[1] $\tan u = 1/4$, $\tan v = 2/3$

[2] $\tan u = 2$, $\tan v = 1$

Ö-87 Beräkna exakt

[1] $\sin 75°$ [Ledning: $75 = 45 + 30$]

[2] $\cos 75°$

[3] $\tan 75°$

Ö-88 Bestäm $\sin(u+v)$, om

[1] $\sin u = 1/3$, $\sin v = 2/3$. u och v befinner sin i första kvadranten.

[2] $\sin u = 2/5$, $\sin v = 3/5$ och $0 < u < \pi/2 < v < \pi$.

2.6 Formler för dubbla resp. halva vinkeln.

$$\begin{cases} \sin 2u = 2 \cdot \sin u \cdot \cos u \\ \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2 \cdot \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos v) \\ \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos v) \end{cases}$$

Övningsuppgifter

Ö-89 Härled

[1] formlerna för dubbla vinkeln från additionsformlerna

[2] formlerna för halva vinkeln från lämpliga formler för $\cos 2u$

Ö-90 Antag att $\cos u = 1/3$. Bestäm exakt

[1] $\cos 2u$

[2] $\sin 2u$

[3] $\sin(u/2)$

[4] $\tan(u/2)$

Ö-91 Bestäm exakt

[1] $\sin 15°$

[2] $\sin(\pi/8)$

[3] $\tan 22,5°$

Ö-92 Antag att $\sin u = 3/\sqrt{13}$ och att $0 < u < \pi/2$. Bestäm exakt

[1] $\sin 2u$

[2] $\cos 2u$

[3] $\cos 4u$

Kapitel 3 Plan analytisk geometri

3.1 Avståndet mellan två punkter.

Avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i ett vanligt (ortonormerat) koordinatplan kan beräknas med avståndsformeln (Rita en figur!):

Avståndsformeln

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Avståndsformeln bygger på Pythagoras sats.

Övningsuppgifter

Ö-93 Bestäm avståndet mellan (och rita en figur)

[1] $(2,1)$ och $(3,5)$

[2] $(0,-2)$ och origo

[3] $(-1,1)$ och $(4,-3)$

[4] $(-2,-3)$ och $(1,-7)$

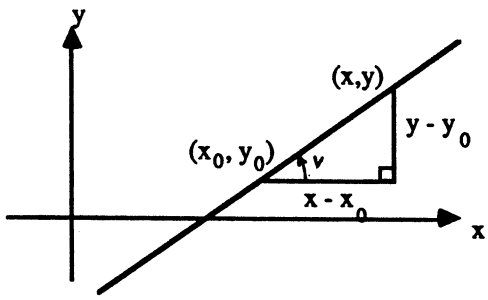
Ö-94 Bestäm en punkt på $x-$axeln, som ligger lika långt från punkterna

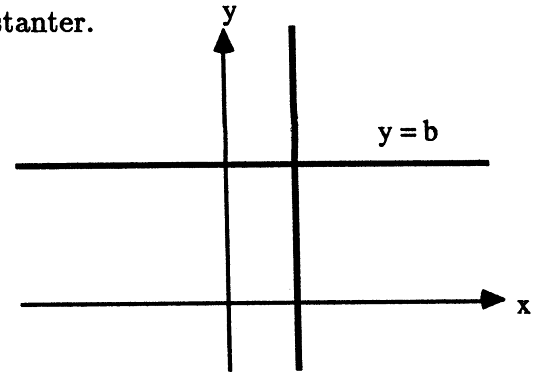
[1] $(2,3)$ och $(4,1)$

[2] $(4,3)$ och $(1,-2)$

3.2 Räta linjen.

Ekvationen för en rät linje *parallell med y-axeln* är $\boxed{x = a}$ och ekvationen för en rät linje *parallell med x-axeln* är $\boxed{y = b}$, där a och b är konstanter.





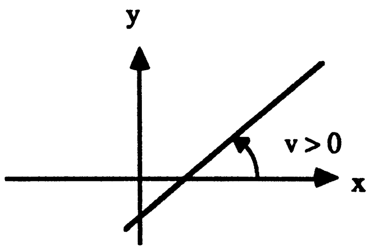
Betrakta i $xy-$planet en rät linje, som går genom en given punkt, (x_0, y_0) och som ej är parallell med $y-$axeln (se figur ovan). För punkter på linjen gäller att kvoten $(y - y_0)/(x - x_0)$ är konstant längs linjen och att konstanten är $k = \tan v$. Konstanten k kallas *riktningskoefficient* och vinkeln v kallas *riktningsvinkel.*

Vi får alltså den s.k. *enpunktsformeln* för räta linjen:

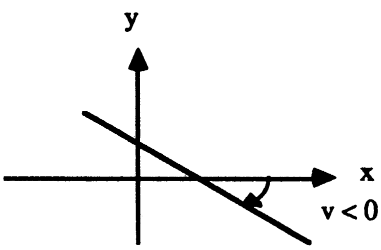
Enpunktsformeln

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

,där $k = \tan v$



Positiv lutning: k > 0,
0 < v < π/2



Negativ lutning: k < 0,
-π/2 < v < 0 (eller π/2 < v < π)

Om en rät linje går genom *två* givna punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) där $x_1 \neq x_2$, så kan riktningskoefficienten k beräknas med formeln (rita en figur över detta):

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Sammanfattningsvis är $\boxed{ax + by + c = 0}$ den allmänna formeln för räta linjens ekvation.

Exempel

Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna $(3, -1)$ och $(1, 4)$.
Lösning:
Riktningskoefficienten $k = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (-1 - 4)/(3 - 1) = -5/2$. Med enpunktsformeln fås linjens ekvation:

$y - (-1) = -5/2(x - 3)$,dvs

$$y = -\frac{5x}{2} + \frac{13}{2} \iff 5x + 2y - 13 = 0$$

[Alternativt: $y - 4 = -5/2(x - 1)$, vilket naturligtvis ger samma svar.]

Svar: $5x + 2y - 13 = 0$

OBS! kontrollera alltid räkningarna genom att visa att de givna punkterna satisfierar den erhållna ekvationen!

Övningsuppgifter

Ö-95 Bestäm på formen $ax + by + c = 0$ en ekvation för räta linjen genom

[1] origo med riktningskoefficienten $-2/5$

[2] $(1, -3)$ med riktn.koeff $1/2$.

[3] $(-1, 2)$ parallell med x-axeln.

Ö-96 Bestäm på formen $ax + by + c = 0$ en ekvation för räta linjen genom

[1] $(-1, 2)$ parallell med y-axeln.

[2] $(-1, 2)$ med riktningsvinkeln $30°$.

[3] $(2, -1)$ med riktningsvinkeln $-45°$.

Ö-97 Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna (rita figur!)

[1] $(2, 1)$ och $(1, 3)$

[2] $(1, 2)$ och $(-3, -1)$

[3] origo och $(-3, 2)$

[4] $(-1, 2)$ och $(-1, -4)$

[5] $(5/2, 5/3)$ och $(-2, 1)$

Ö-98 Sök skärningspunkten mellan linjerna (rita figur!)

[1] $x + 2y + 4 = 0$ och $2x + y = 0$

[2] $5x - 3y + 4 = 0$ och $3x + 2y - 9 = 0$

[3] $3x - y + 6 = 0$ och $2y - 6x + 3 = 0$

[4] $2y - x - 3 = 0$ och $2x - 4y + 6 = 0$

Jämför även lineära ekvationssystem, avsnitt 1.3.

Normal

Om två räta linjer med riktningskoefficienterna k_1 och k_2 skär varandra *vinkelrätt*, så gäller att $\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$, dvs. $k_1 = -1/k_2$ och $k_2 = -1/k_1$, om $k_1$och$k_2 \neq 0$. Den ena linjen kallas *normal* till den andra.

Exempel

Bestäm en ekvation för normalen till linjen $4x - 3y + 6 = 0$ i punkten $(0,2)$.

Lösning:

Den givna linjen, vars ekvation kan skrivas $y = 4/3 \cdot x + 2$, har riktningskoefficienten $k_1 = 4/3$. Normalens riktningskoefficient är därför $k_2 = -1/k_1 = -3/4$ och normalens ekvation blir $y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 0)$

Svar: $3x + 4y - 8 = 0$

Övningsuppgifter

Ö-99 Bestäm en ekvation för normalen till linjen

[1] $3x - 2y = 1$ i punkten $(1,1)$

[2] $5x + 7y + 9 = 0$ i punkten $(1,-2)$

Ö-100 Bestäm en ekvation för normalen till linjen

[1] $x = 3y - 1$ genom $(5/2, 0)$

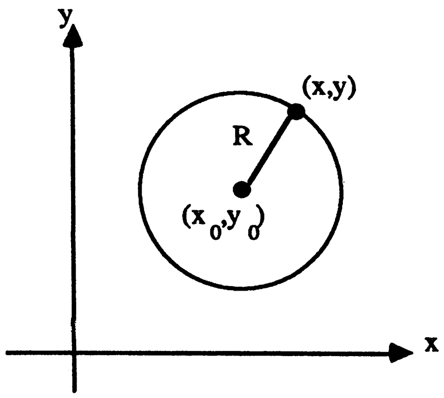
[2] $5y + 2 = 0$ genom $(3,1)$

3.3 Cirkeln.

En cirkel består av alla punkter, som ligger på samma avstånd (radien) från en given punkt (medelpunkten). Ekvationen för en cirkel med radien R och medelpunkten (x_0, y_0) är:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

,vilket följer av avståndsformeln. Speciellt är $x^2 + y^2 = R^2$ ekvationen för en cirkel med radien R och medelpunkten i origo.



Exempel

Angiv den geometriska betydelsen av ekvationen $x^2 - 4x + y^2 + 5y = 2$

Lösning:

Ekvationen kan genom *kvadratkomplettering* skrivas

$$x^2 - 2\cdot 2x + 2^2 + y^2 + 2\cdot\frac{5}{2}\cdot y + (\frac{5}{2})^2 = 2 + 2^2 + (\frac{5}{2})^2 \iff (x-2)^2 + (y+\frac{5}{2})^2 = \frac{49}{4}$$

, vilket är en cirkel med medelpunkt $(2, -5/2)$ och radien $R = 7/2$. {Rita figur!}

Övningsuppgifter

Ö-101 Ge en ekvation för cirkeln med medelpunkt och radie:

[1] $(0,0)$, $R=3$
[2] $(0,2)$, $R=4$
[3] $(1,-2)$, $R=\sqrt{6}$
[4] $(-3/2,1/4)$, $R=0,5$

Ö-102 Angiv den geometriska betydelsen av ekvationen

[1] $x^2+y^2-5=0$
[2] $x^2+y^2+5=0$
[3] $x^2+4x+y^2=0$
[4] $x^2-2x+y^2+6y+3=0$
[5] $x^2+y^2+5x-2y+5=0$
[6] $2x^2+2y^2+6x+2y+1=0$
[7] $3x^2+3y^2+9x-y=0$
[8] $6x^2+6y^2-8x+2y+3=0$

PROVRÄKNING (Blandade exempel)

---

[1] Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}$$

[2] Sök reella lösningar till ekvationen $3 \cdot |2x-1| = 4+x$

[3] Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x-y+2z &= 5 \\ x+2y+z &= 4 \\ 2x-3y+2z &= 1 \end{cases}$

[4] Bestäm samtliga rötter till ekvationen

$$2x^3+3x^2-x-2=0$$

[5] Sök reella lösningar till ekvationerna $\begin{array}{lll} \text{[a]} & 2\ln x - \ln(2x-1) & = & \ln(1/x) \\ \text{[b]} & 3\lg 2 - 2\lg x & = & 2 \end{array}$

[6] Bestäm exakta värdet av $\begin{array}{ll} \text{[a]} & \sin 105^\circ \\ \text{[b]} & \tan 15^\circ \\ \text{[c]} & \cos 22{,}5^\circ \end{array}$

[7] Höjden mot basen i en likbent triangel är 4 gånger så stor som den i triangeln inskrivna cirkelns radie. Bestäm triangelns vinklar.

[8] Bestäm alla vinklar v som satisfierar ekvationen

$$2\cos^2 v + \sin v = 1$$

[Ledning: använd "trigonometriska ettan"]

[9] Bestäm alla vinklar v mellan 0 och 2π som satisfierar ekvationen

$$\tan 5v = \cot v$$

[Ledning: använd formeln $\cot v = \tan(\frac{\pi}{2} - v)$]

[10] Ekvationen $2x^2+2y^2-2x+10y=1$ betyder geometriskt en cirkel (i ett ortonormerat koordinatsystem). Bestäm cirkelns medelpunkt och radie.

[11] Bestäm koordinaterna för skärningspunkterna mellan cirkeln $(x-1)^2+(y-3)^2=2$ och räta linjen $2x+3y=12$. (Rita figur!)

FACIT TILL ÖVNINGSUPPGIFTERNA

Ö-1

[1] $6y - 14x + 3z$
[2] $c - 2b - a$
[3] $-7a - b = -(7a + b)$

Ö-2

[1] 81
[2] 64
[3] 9
[4] -8
[5] 1

Ö-3

[1] $24a^2b^5$
[2] $625a^{20}b^8$
[3] $-6x^{11}y^7$
[4] $-72x^{20}y^{13}z^7$

Ö-4

[1] $3a^2 - 2ab - b^2$
[2] $x^4 - 1$
[3] $6x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

Ö-5

[1] $x^2 + 6xy + 9y^2$
[2] $4x^2 - 20x + 25$
[3] $x^4 - 8x^2y^3 + 16y^6$

Ö-6

[1] $x^2 - 4$
[2] $9a^4 - 4x^2$
[3] $16x^8 - 81$

Ö-7

[1] $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$
[2] $a^3 - 15a^2b^2 + 75ab^4 - 125b^6$
[3] $27a^3 + 54a^2b^4 + 36ab^8 + 8b^{12}$
[4] $64x^6 - 288x^5 + 432x^4 - 216x^3$

Ö-8

[1] $(x + 3)(x - 3)$
[2] $(x + 2)^2$
[3] $4(b - 2a)(b + 2a)$

Ö-9

[1] $3(x - 3y)^2$
[2] $x^2(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$
[3] $x^2y(2x - y)^2$

Ö-10

[1] $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
[2] $y(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$
[3] $x^3(x + 2y^3)(x^2 - 2xy^3 + 4y^6)$

Ö-11

[1] $(x + 1)^2 - 2$
[2] $6 - (x - 1)^2$
[3] $2(y - 2)^2 - 5$
[4] $\frac{53}{4} - 4(y + \frac{5}{4})^2$
[5] $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 - 12$

Ö-12

[1] $(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$
[2] $\frac{5}{4} - (x + \frac{1}{2})^2$
[3] $(4x - 3)^2$
[4] $(x^2 - 1)^2 + 1$
[5] $(x - 1)^2 - (y - \frac{3}{2})^2 + (z - 2)^2 - \frac{11}{4}$

Ö-13

[1] -5 för $x = -2$
[2] 16 för $x = 1$
[3] $3/4$ för $x = -1/2$

Ö-14

[1] 6 för $x = 1$
[2] 32 för $x = -5$
[3] $53/4$ för $x = -5/4$

Ö-15

[1] $101/24 = 4\frac{5}{24}$
[2] $-6/5 = -1,2$

Ö-16

[1] $1/8 = 0,125$
[2] 9
[3] $-1/125 = -0,008$

Ö-17

[1] 2^{-5}
[2] 2^{-1}
[3] 2^9

Ö-18

[1] $\frac{5x^3}{2y^3} = 2,5x^3y^{-3}$
[2] $a^2b^2 + 2$
[3] $2yz^2 + 1 - 3z$

Ö-19

[1] -1
[2] 1
[3] $b - a$
[4] $1/(a - b)$
[5] $-(a - b)^2$

Ö-20

[1] $a/(a - b)$
[2] $-x^2(x + 2)/(x - 2)$
[3] $(x - 1)/x$

Ö-21

[1] $(x^2 + 4y^2)/(2xy)$
[2] $(a^2 + ab)/(a - b)$

Ö-22

[1] $x = \frac{35}{16} = 2\frac{3}{16}$
[2] $x = -\frac{31}{7} = -4\frac{3}{7}$

Ö-23

[1] $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

[2] $\frac{x^4+3x^2+2x}{x^3-1}$

[3] $\frac{3}{4x^2-1}$

Ö-24

[1] $\frac{1}{2x(x-1)}$

[2] $\frac{x^3+4x^2-5x+6}{9-x^2}$

[3] $\frac{-x^2+9x-2}{4x\cdot(x^2-4)}$

Ö-25

[1] $x+2+\frac{3}{x-1}$

[2] $1-\frac{2}{x^2+1}$

[3] $x^2-2x-1+\frac{3}{x+2}$

Ö-26

[1] $3x-2$

[2] $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5-3x}{4(2x^2+x-1)}$

[3] $3x^2+9x+21+\frac{56x^2-15x+67}{x^3-3x^2+2x-3}$

Ö-27

[1] $x=2,\ y=1$

[2] $x=2.6,\ y=-3.4$

[3] $x=1,\ y=-1$

Ö-28

[1] saknar lösning

[2] ∞ många lösningar; $x=t \implies y=2t-2$ [för alla t]

[3] $x=2,\ y=-1,\ z=-3$

Ö-29

[1] 5

[2] 5

[3] 2

[4] 1.5

[5] 14

Ö-30

[1] $x_1=3,\ x_2=-1$

[2] $x_1=2.5,\ x_2=-8.5$

[3] $x_1=4,\ x_2=0$

[4] $x_1=-2/3,\ x_2=-4/3$

[5] saknar lösning

[6] $x_1=2,\ x_2=4/3$

Ö-31

[1] $-4<x<4$

[2] $-1\le x\le 5$

[3] $-1<x<-1/3$

[4] $-5\le x<-3$ och $-1<x\le 1$

Ö-32

[1] $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{för } x\ge 0 \\ 0 & \text{för } x<0 \end{cases}$

[2] $f(x)=\begin{cases} x & \text{för } x\ge 0 \\ 3x & \text{för } x<0 \end{cases}$

[3] $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{för } x\ge 2 \\ 3 & \text{för } -1\le x<2 \\ 1-2x & \text{för } x<-1 \end{cases}$

[4] $f(x)=\begin{cases} 18x-1 & \text{för } x\ge 1/3 \\ 7-6x & \text{för } -1/2\le x<1/3 \\ 1-18x & \text{för } x<-1/2 \end{cases}$

Ö-33

[1] 3

[2] 3

[3] 3

Ö-34

[1] 0.4

[2] 2500

[3] 12

Ö-35

[1] $\sqrt{3}/4$

[2] $3\sqrt{2}$

[3] 2

[4] $2\sqrt{3}$

Ö-36

[1] $\sqrt{14}/7$

[2] $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

[3] $(\sqrt{6}-1)/5$

[4] $(23-3\sqrt{5})/44$

[5] $(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})/4$

[6] $(7\sqrt{2}+5\sqrt{3}-\sqrt{6}-12)/23$

Ö-37

[1] $a\sqrt{b}$

[2] $-a\sqrt{b}$

[3] $\sqrt{ab}$

[4] $-\sqrt{ab}$

Ö-38

[1] $\sqrt{x+2}$ för $x>-2$

[2] $-\sqrt{x-5}$ för $x>5$

[3] $-x\sqrt{4-x}$ för $x<4$

[4] $-\sqrt{x-1}/x$ för $x>1$

[5] $-\sqrt{x+1}$ för $-1<x<0$, och $\sqrt{x+1}$ för $x>0$

[6] $\sqrt{x+1}+1$ för $x\ge -1,\ x\ne 0$

[7] $\sqrt{2-x}-x$ för $x\le 2,\ x\ne -2$

Ö-39

[1] $x_1=2\ ,\ x_2=-2$

[2] $x_{1,2}=\pm 3\sqrt{3}$

[3] $x_{1,2}=\pm 2/\sqrt{3}=\pm 2\sqrt{3}/3$

Ö-40

[1] $x=16$

[2] $x=3$

[3] saknar lösning

[4] $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$

[5] saknar reell lösning; $(x = \pm i)$

[6] $x = 3$; $(-3$ är *ej* rot)

Ö-41

[1] $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$

[2] $x_{1,2} = \pm 2i$

[3] $x_{1,2} = \pm 5i/4$

[4] $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$

[5] $x_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{10}$

Ö-42

[1] $-1 + 4i$

[2] $5 + 5i$

[3] $-1/5 + i7/5$

[4] $1/2 - i/10$

Ö-43

[1] $x_1 = -1$, $x_2 = -5$

[2] $x_1 = 3$, $x_2 = -2$

[3] $x_1 = -1$, $x_2 = -3/2$

[4] $x_1 = 0$, $x_2 = 3/11$

[5] $x_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{37})/6$

[6] $x_1 = x_2 = 1/3$

[7] $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{105})/8$

Ö-44

[1] $x_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2}$

[2] $x_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$

[3] $x_{1,2} = (3 \pm i\sqrt{31})/4$

[4] $x_{1,2} = \pm 4$ och $x_{3,4} = \pm 2$ (Fyra rötter!)

[5] $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $x_{3,4} = \pm i$

Ö-45

[1] $(x-1)(x+4)$

[2] $-4(x-1)(x+\frac{3}{2})$

[3] kan ej faktoruppdelas med reella tal

[4] $-8(x-\frac{1}{2})^2$

[5] $2[x-(3+\sqrt{7})/2][x-(3-\sqrt{7})/2]$

Ö-46

[1] $x^2 + x - 2 = 0$

[2] $x^2 - 4x + 1 = 0$

[3] $x^2 - 2x + 2 = 0$

Ö-47

[1] $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -4$

[2] $x_1 = 1$, $x_{2,3} = (-3 \pm \sqrt{5})/2$

[3] $x_1 = -2$, $x_{2,3} = -1 \pm i$

[4] $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = -1$

Ö-48

[1] $x(x-2)(x+4)$

[2] $(x-1)(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2})(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2})$

[3] $(x+2)(x^2+2x+2)$

[4] $2(x-1)^2(x-\frac{1}{2})(x+1)$

Ö-49

[1] $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

[2] $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i$

[3] $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$

Ö-50

[1] $2(x^2+1)(x-1)$

[2] $2(x-2)(x-\frac{3}{2})(x-5)$

[3] $(x-y)(x-2)(x+3)$

Ö-51

[1] $x < -1$

[2] $0 \le x \le 2/3$

[3] $x \le -2$ och för $x \ge 1$

[4] alla x

[5] $x < -2$ och för $1 < x < 3$

[6] $x \ge 2$

Ö-52

[1] $0 < x \le 1/2$

[2] $x < 2$ och för $x \ge 5$

[3] $x \le -1/2$ och för $0 < x \le 1$

Ö-53

[1] $\sqrt{2}$

[2] $1/8$

[3] 9

[4] $9^{1/3} = \sqrt[3]{9}$

[5] $2\sqrt{2}$

Ö-54

[1] $\sqrt{3}$

[2] $2^{1/4} = \sqrt[4]{2}$

[3] $5^{1/6} = \sqrt[6]{5}$

[4] $3^{1/14} = \sqrt[14]{3}$

[5] $6^{1/12} = \sqrt[12]{6}$

Ö-55

[1] $x = 4$

[2] $x = 2$

[3] $x = -1.5$

[4] $x = 3.5$

[5] $x = -1$

Ö-56

[1] $x = 0$

[2] saknar reell lösning

[3] $x = 2$

[4] $x_1 = 1$ och $x_2 = -2$

Ö-57

[1] 4

[2] -3

[3] 3.7

[4] 2.5

Ö-58

[1] 3

[2] $1/3$

[3] -0.5
[4] 5
[5] $2/3$

Ö-59

[1] $x = 1$
[2] $x = 1/e$
[3] $x = 10^{1/4} = \sqrt[4]{10}$

Ö-60

[1] $x = \ln 4 \approx 1.39$ [räknedosa eller tabell]
[2] $x = \lg(4/3) \approx 0.125$
[3] $x = \lg 3$
[4] $x_1 = \ln 2$ och $x_2 = \ln 3$
[5] $x = \lg 2$

Ö-61

[1] 1
[2] $\ln 6$
[3] 0
[4] $-0.5 \cdot \ln 3$
[5] 0
[6] -3

Ö-62

[1] $x = 5/9$
[2] $x = 5$
[3] $x = 1/15$
[4] $x = 4$
[5] $x_1 = (3 + \sqrt{17})/4$ och $x_2 = (3 - \sqrt{17})/4$
[6] saknar lösning för $x > 1$

Ö-63

[1] $90° = \pi/2$ (rad.)
[2] $240° = 4\pi/3$

Ö-64

[1] $-180° = -\pi$
[2] $-1800° = -10\pi$

Ö-65

[1] $\pi/4$
[2] $5\pi/12$
[3] $-\pi/3$
[4] $7\pi/6$

Ö-66

[1] $30°$
[2] $-22.5°$
[3] $345°$
[4] $-900°$

Ö-67

[1] $B = 50°$, $a \approx 2.3$ och $b \approx 2.8$
[2] $A \approx 26.6°$, $B \approx 63.4°$ och $c \approx 4.5$
[3] $A = 55°$, $b \approx 2.8$ och $c \approx 4.9$
[4] $A = 60°$, $c = 7.0$ och $a \approx 6.1$
[5] $A \approx 56.3°$, $B \approx 33.7°$ och $a \approx 3.7$
[6] $B = 63°$, $a \approx 1.4$ och $c \approx 3.0$

Ö-68

[1] $\cos v = \sqrt{8}/3$, $\tan v = 1/\sqrt{8}$
[2] $\sin v = \sqrt{5}/3$, $\tan v = \sqrt{5}/2$
[3] $\sin v = 5/\sqrt{29}$, $\cos v = 2/\sqrt{29}$
[4] $\sin v = 10/\sqrt{109}$, $\cos v = 3/\sqrt{109}$

Ö-69

[1] $5\sqrt{3}/6$
[2] $2 - \sqrt{3}$
[3] $3/2$

Ö-70

[1] $x^{\sqrt{3}}$
[2] $x^{(2-\sqrt{3})/2}$
[3] x^{-1}

Ö-71

[1] tredje
[2] fjärde
[3] andra
[4] tredje
[5] första
[6] tredje

Ö-72

[1] -1
[2] 1
[3] $1/\sqrt{2}$
[4] $1/2$
[5] 1
[6] $1/\sqrt{3}$

Ö-75

[1] $\sin v = -\sqrt{7}/4$, $\tan v = -\sqrt{7}/3$
[2] $\cos v = -\sqrt{21}/5$, $\tan v = -2/\sqrt{21}$
[3] $\sin v = -3/\sqrt{10}$, $\cos v = -1/\sqrt{10}$
[4] $\sin v = 3\sqrt{5}/7$, $\tan v = 3\sqrt{5}/2$ [första kvadranten] *eller* $\sin v = -3\sqrt{5}/7$, $\tan v = -3\sqrt{5}/2$ [fjärde kvadranten]

Ö-76

[1] $7/5$
[2] $7/5$
[3] $-145/72$

Ö-77

[1] $-1/\sqrt{2}$
[2] $1/2$
[3] $-\sqrt{3}$
[4] $-1/\sqrt{2}$
[5] $-\sqrt{3}/2$
[6] $-\sqrt{3}$

Ö-78

[1] $-1/2$
[2] $-1/2$
[3] $-1/2$

[4] $-\sqrt{3}$

Ö-79

[1] $-\sqrt{3}/2$

[2] -1

[3] $-1/2$

[4] $-1/\sqrt{3}$

Ö-81

[1] $v = \pi/6 + n \cdot 2\pi$ eller $v = 5\pi/6 + n \cdot 2\pi$ [n godtyckligt heltal]

[2] $v = \pm\pi/4 + n \cdot 2\pi$

[3] $v = \pi/3 + n \cdot \pi$

Ö-82

[1] $v = -\pi/3 + n \cdot 2\pi$ eller $v = 4\pi/3 + n \cdot 2\pi$

[2] $v = \pm 2\pi/15 + n \cdot 2\pi/5$

[3] $v = -\pi/12 + n \cdot \pi/3$

Ö-83

[1] $v_1 = n \cdot 2\pi/3,\ v_2 = n \cdot 2\pi/5$

[2] $v_1 = n \cdot 2\pi/3,\ v_2 = \pi/5 + n \cdot 2\pi/5$

[3] $v = n \cdot \pi/3$

[4] $v_1 = \pi/10 + n \cdot 2\pi/5,\ v_2 = -\pi/6 + n \cdot 2\pi/3$

Ö-84

[1] $v_{1,2} = \pm\pi/6 + n \cdot \pi$

[2] $v_{1,2} = \pm\pi/3 + n \cdot 2\pi,\ v_3 = \pi + n \cdot 2\pi$

[3] $v_1 = \pi/6 + n \cdot 2\pi,\ v_2 = 5\pi/6 + n \cdot 2\pi$

[4] $v_1 = -\pi/4 + n \cdot \pi,\ v_{2,3} = \pm\pi/3 + n \cdot \pi$

Ö-86

[1] $11/10$

[2] -3

Ö-87

[1] $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$

[2] $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$

[3] $2 + \sqrt{3}$

Ö-88

[1] $(\sqrt{5} + 4\sqrt{2})/9$

[2] $(3\sqrt{21} - 8)/25$

Ö-90

[1] $-7/9$

[2] $\pm 4\sqrt{2}/9$

[3] $\pm 1/\sqrt{3}$

[4] $\pm 1/\sqrt{2}$

Ö-91

[1] $\sqrt{2 - \sqrt{3}}/2 = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{8}$

[2] $\sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$

[3] $\sqrt{2} - 1$

Ö-92

[1] $12/13$

[2] $-5/13$

[3] $-119/169$

Ö-93

[1] $\sqrt{17}$

[2] 2

[3] $\sqrt{41}$

[4] 5

Ö-94

[1] $(x, y) = (1, 0)$

[2] $(10/3, 0)$

Ö-95

[1] $2x + 5y = 0$

[2] $x - 2y - 7 = 0$

[3] $y - 2 = 0$

Ö-96

[1] $x + 1 = 0$

[2] $x - y\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} = 0$

[3] $x + y - 1 = 0$

Ö-97

[1] $2x + y = 5$

[2] $3x - 4y + 5 = 0$

[3] $2x + 3y = 0$

[4] $x + 1 = 0$

[5] $4x - 27y + 35 = 0$

Ö-98

[1] $x = 4/3,\ y = -8/3$

[2] $x = 1,\ y = 3$

[3] skärning saknas [parallella linjer]

[4] alla punkter på linjen $y = (x + 3)/2$ [sammanfallande linjer]

Ö-99

[1] $2x + 3y = 5$

[2] $7x - 5y = 17$

Ö-100

[1] $6x + 2y = 15$

[2] $x = 3$

Ö-101

[1] $x^2 + y^2 = 9$

[2] $x^2 + (y - 2)^2 = 16$

[3] $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 1$

[4] $16x^2 + 48x + 16y^2 - 8y + 33 = 0$

Ö-102

[1] Cirkel med medelpunkt $(0, 0)$ och radien $R = \sqrt{5}$

[2] Saknar geometrisk betydelse

[3] Cirkel; MP $(-2, 0)$, $R = 2$

[4] Cirkel; MP $(1, -3)$, $R = \sqrt{7}$

[5] Cirkel; MP $(-5/2, 1)$, $R = 3/2$

[6] Cirkel; MP $(-3/2, -1/2)$, $R = \sqrt{2}$

[7] Cirkel; MP $(-3/2, 1/6)$, $R = \sqrt{82}/6$

[8] Saknar geometrisk betydelse

Facit till det diagnostiska provet

[1] $10a - 10b - 6$

[2] $x = -1/2$

[3] $-(x+y)$

[4] $(x^2 + 2x + 4)/(x+2)$

[5] $2x + 4 + (2x - 11)/(x^2 - 2x + 3)$

[6] $x = -2,\ y = 1/2$

[7] 12

[8] $x_1 = 2/3,\ x_2 = -2$

[9] $x < 1$

[10] [a] $-\ln 2$
[b] -3

[11] $5\sqrt{3}/6$

[12] [a] $60°,\ 300°$
[b] $210°,\ 330°$

[13] [a] $9/2$
[b] $3\sqrt{13}/2$ (längdenheter)

[14] $8/15$

[15] $4x + 3y + 1 = 0$

[16] $(3, 0)$ resp. 3

Facit till provräkningen (blandade exempel)

[1] $4/(x^4 - 1)$

[2] $x_1 = 7/5,\ x_2 = -1/7$

[3] $x = -2,\ y = 1,\ z = 4$

[4] $x_1 = -1,\ x_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{17})/4$

[5] [a] $x_1 = 1,\ x_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$
[b] $\sqrt{2}/5$

[6] [a] $(1 + \sqrt{3})/(2\sqrt{2}) = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$
[b] $2 - \sqrt{3}$
[c] $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

[7] Toppvinkeln $\approx 38.94°$ [,ty $\sin \frac{v}{2} = 1/3$],
basvinklarna $\approx 70.53°$

[8] $\pi/2 + n \cdot 2\pi,\ 7\pi/6 + n \cdot 2\pi$ och $11\pi/6 + n \cdot 2\pi$
[n heltal]

[9] $\pi/12 + n\pi/6$ för $n = 0, 1, 2, \cdots, 11$

[10] $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ resp. $\sqrt{7}$

[11] $(0, 4)$ och $(\frac{30}{13}, \frac{32}{13})$

Printed and Bound at
Department of Mathematical Sciences
Chalmers University of Technology and Göteborgs University
2006