Matriser och vektorer i Matlab

1 Inledning

Först skall vi se lite på matriser, vilket är den grundläggande datatypen i Matlab, sedan skall vi beskriva hur vi kan lösa linjära ekvationssystem på ett effektivt sätt i Matlab. Avslutningsvis skall vi bekanta oss med inbyggda funktioner som opererar på matriser och vektorer.

2 Något om matriser

En matris är som ni vet ett rektangulärt talschema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrisen ovan har m rader och n kolonner, vi säger att den har storleken $m \times n$. Ett matriselement på rad nr i, kolonn nr j skrivs a_{ij}, där i är radindex och j är kolonnindex.

En matris av storleken $m \times 1$ kallas kolonnmatris (kolonnvektor) och en matris av storleken $1 \times n$ kallas radmatris (radvektor):

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Som exempel tar vi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Vi beskriver matrisen i Matlab enligt

```
>> A=[1 4 7 10; 2 5 8 11; 3 6 9 12]
```

och som svar får vi i Command Window utskriften

```
A =
     1     4     7    10
     2     5     8    11
     3     6     9    12
```

Man använder hakparanteser (`[ ]`) för att bygga upp matriserna. Semikolon (`;`) innanför hakparanteserna betyder radbyte.

Så här beskriver vi kolonnvektorn

```
>> b=[1; 3; 5]
b =
     1
     3
     5
```

och så här radvektorn

```
>> c=[0 2 4 6 8]
c =
     0     2     4     6     8
```

Ett matriselement a_{ij}, dvs. elementet på rad nr i, kolonn nr j, skrivs i MATLAB med `A(i,j)` och ett vektorelement b_i skrivs med `b(i)`.

Indexeringen i matriser och vektorer i MATLAB börjar alltid på `1`, vi kan inte påverka detta. Sista index för en rad eller kolonn ges av `end`. T.ex. `b(1)` är första elementet i vektorn `b` och `b(end)` är sista elementet.

Vi låter s få tredje värdet c_3, dvs. $s = c_3$ med

```
>> s=c(3)
s =
     4
```

och bildar vektorn $\mathbf{v}$ av andra och femte värdet, dvs. $\mathbf{v} = (c_2, c_5)$, med

```
>> v=c([2,5])        % v=[c(2) c(5)] går också
v =
     2     8
```

Vi kan ändra ett element i $\mathbf{v}$, t.ex. låta $v_2 = 0$, med

```
>>  v(2)=0
v =
     2     0
```

Vi låter s få värdet av a_{23}, dvs. elementet på rad 2, kolonn 3 i matrisen $\mathbf{A}$ med

```
>> s=A(2,3)
s =
     8
```

och vi bildar en radvektor $\mathbf{v}$ av rad 3, alla kolonner med

```
>> v=A(3,:)         % v=A(3,1:end) eller v=A(3,1:4) går också
v =
    3     6     9    12
```

samt en kolonnvektor $\mathbf{u}$ av rad 2-3, kolonn 2 med

```
>> u=A(2:3,2)
u =
     5
     6
```

Vi bildar en matris **V** av blocket rad 1-2, kolonn 2-3

```
>> V=A(1:2,2:3)
V =
     4     7
     5     8
```

Uppgift 1. Skriv in matriserna **A**, **b** och **c** i MATLAB. Skriv sedan ut matriselementen a_{23}, b_2, c_3. Ändra a_{23} genom att skriva `A(2,3)=15`. Gör ett script och använd cell-läge så att ni kan bygga på med kommande uppgifter.

3 Linjära ekvationssystem

Linjära ekvationssystem kan vi lösa med MATLAB om vi först skriver dem på matrisform. Vi tar som exempel: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 7x_1 + 8x_2 = 23 \end{cases}$$

skrivs på matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 23 \end{bmatrix}$$

dvs.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{med } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Vi bildar koefficientmatrisen **A** och högerledsvektorn **b** med

```
>> A=[1 2 3;3 2 1;7 8 0]
A =
      1      2      3
      3      2      1
      7      8      0

>> b=[14;10;23]
b =
     14
     10
     23
```

Med kommandot `rref` kommer vi till radreducerad trappstegsform (row-reduced-echelon form) så att vi kan läsa av lösningen till $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Först bildar vi den utökade matrisen $\mathbf{E} = [\,\mathbf{A}\ \mathbf{b}\,]$ med

```
>> E=[A b]
E =
     1     2     3    14
     3     2     1    10
     7     8     0    23
```

och sedan får vi den reducerade matrisen med

```
>> R=rref(E)
R =
     1     0     0     1
     0     1     0     2
     0     0     1     3
```

Lösningen ser vi i sista kolonnen i `R` och vi har

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Som ytterligare ett exempel ser vi på följande ekvationssystem med oändligt många lösningar

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 46 \end{cases}$$

eller på matrisform

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 46 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[1 2 3;3 2 1;7 8 9]
A =
     1     2     3
     3     2     1
     7     8     9

>> b=[10;14;46]
b =
    10
    14
    46
```

Vi reducerar utökande matrisen med

```
>> R=rref([A b])
R =
     1     0    -1     2
     0     1     2     4
     0     0     0     0
```

Vi har en fri variabel. Om vi sätter $x_3 = t$ får vi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t \\ 4-2t \\ t \end{bmatrix}$$

där t är ett godtyckligt reellt tal.

Uppgift 2. Skriv följande ekvationssystem på matrisform och lös dem sedan med `rref`.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 29 \\ 2x_1 + 5x_3 = 26 \\ 3x_1 + 7x_2 + 11x_3 = 39 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Skulle det finnas oändligt många lösningar skriv upp en formel för samtliga lösningar.

4 Matris- och vektorfunktioner

Vi ser nu på några användbara inbyggda funktioner som tar matriser eller vektorer som argument. För exemplen använder vi följande matris och vektorer.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \\ 9 & 12 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

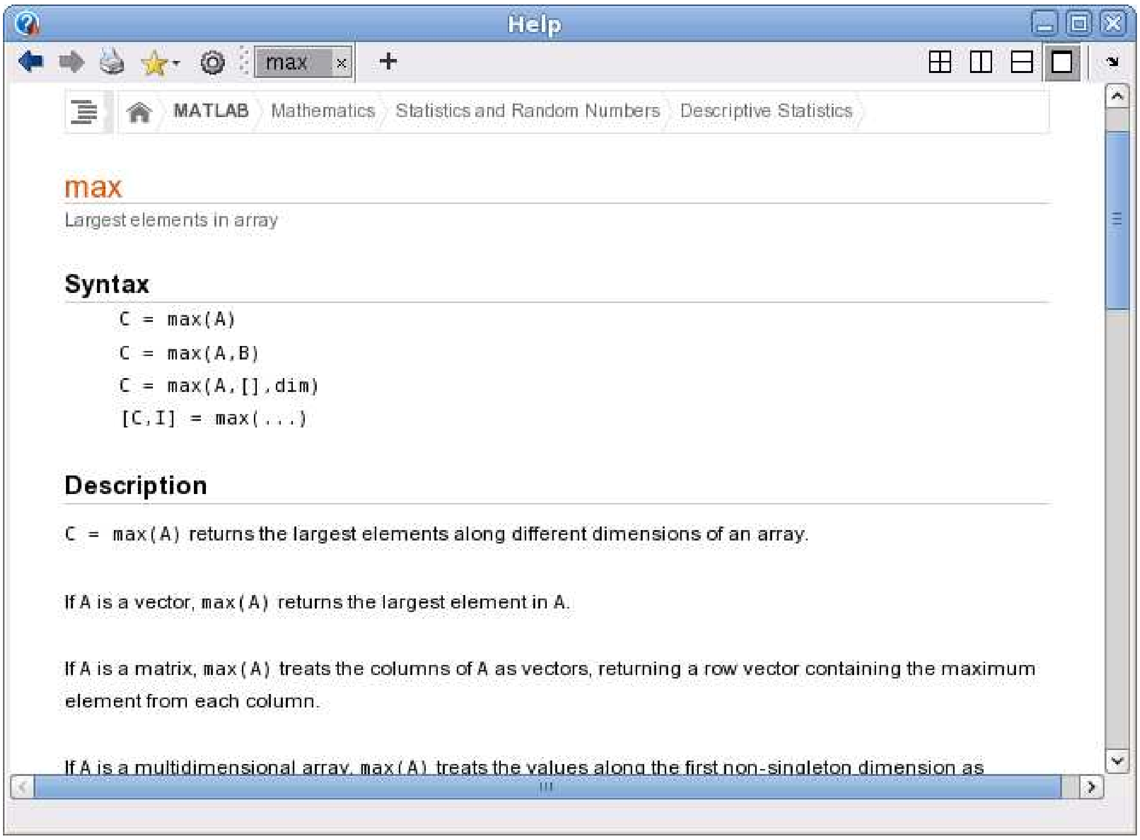
Antalet rader och kolonner i $\mathbf{A}$ får vi med

```
>> [m,n]=size(A)
m =
     3
n =
     4
```

och antal element i vektorn $\mathbf{c}$ ges av

```
>> l=length(c)
l =
    5
```

Största eller minsta elementet i en vektor eller en matris får man med funktionerna `max` och `min`. Här är hjälptexten till `max`.



Vi ser hur vi får största elementet i en vektor och hur vi får de största elementen i varje kolonn för en matris.

```
>> v=max(c)
v =
     8

>> v=max(A)
v =
    11    12     8    10
```

Vi ser också att vi med `[v,i]=max(c)` kan få reda på var det maximala värdet finns någonstans.

Uppgift 3. Skriv in matrisen **A** samt vektorerna **b** och **c** vi använt som exempel. Pröva `size` på vektorerna **b** och **c**. Hur ser man att den ena är en kolonnvektor och att den andre är en radvektor? Bestäm största och minsta elementet i matrisen **A** med hjälp av funktionerna `max` och `min`. Vad har dessa element för rad- respektive kolonnindex?

Summan och produkten av elementen i vektorn fås med `sum` och `prod`. För en matris blir det summan eller produkten av varje kolonn.

```
>> s=sum(b)
s =
     9

>> s=sum(A)
s =
    22    22    12    22
```

Vid ett tidigare laborationstillfälle beräknade vi en summa $s = 3 + 4 + 5 + \cdots + 52$ med en `for`-sats, vi skulle även kunna beräkna den med `sum` enligt

```
>> s=sum(3:52)
s =
        1375
```

Detta kallas att vektorisera beräkningen.

Vi kan också dela upp i två satser

```
>> t=3:52;       % Bildar en vektor t med 3, 4, ..., 52
>> s=sum(t)      % Summerar alla element i vektorn t
s =
        1375
```

Först bildar vi vektorn `t` med elementen $3, 4, \cdots, 52$ och sedan summerar vi elementen i vektorn.

Uppgift 4. Beräkna summan $s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ med `sum` och komponentvis kvadrering.

Vill vi sortera en vektor i stigande ordning gör vi det med funktionen `sort`. För en matris blir det varje kolonn som sorteras. För att sortera i avtagande ordning se hjälptexten för `sort`.

Funktionerna `zeros` och `ones` används för att bygga upp matriser fylla med nollor respektive ettor. Med t.ex. `B=ones(size(A))` får vi en matris `B` med samma storlek som `A` fast fylld med ettor. Vidare ger funktionerna `rand` och `randn` en matris fylld med slumptal (se hjälptexterna).