Differentialekvationer och integraler

1 Inledning

Ibland kan man inte lösa differentialekvationer eller beräkna integraler exakt utan man får nöja sig med att beräkna approximationer (numeriska lösningar). Vi skall se på program inbyggda i MATLAB som utför dessa beräknar.

2 Differentialekvationer

Vi skall se på s.k. begynnelsevärdesproblem för ekvationer av första ordningen

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \ 0 \le t \le T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Här känner vi värdet av u vid $t = 0$. Vi använder t som variabel, eftersom t är ofta tiden och u tillståndet i ett mekaniskt system eller dylikt.

I MATLAB finns flera olika funktioner för lösning av begynnelsevärdesproblem av olika karaktär, t.ex. finner vi `ode45` som används enligt `[t,U]=ode45(fun,tspan,u0)`.

Här är `fun` en funktion som beskriver differentialekvationens högerled, `tspan` är en vektor som anger tidsintervallet och `u0` ger begynnelsevärdet för lösningen.

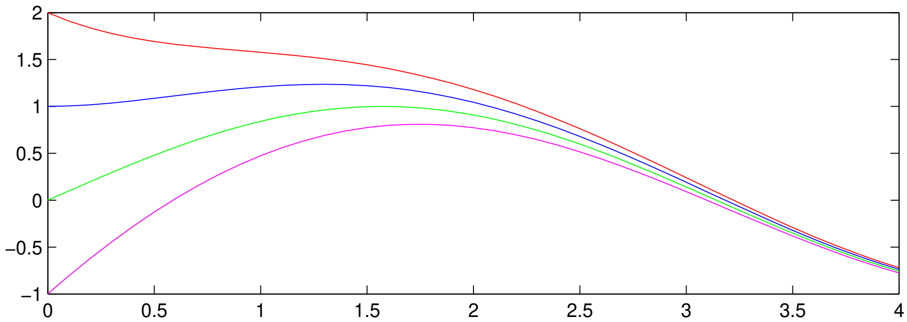
Som utdata ger `ode45` dels `t`, en vektor som innehåller tidpunkter och dels `U`, en vektor eller matris som innehåller lösningen för de olika tidpunkterna.

Exempel 1. Beräkna och rita lösningar till differentialekvationen

$$\begin{cases} u' = -u(t) + \sin(t) + \cos(t), \ 0 \le t \le 4 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Vi beskriver högerledet i differentialekvationen beräknar och ritar lösningen för $u_0 = 1$ med

```
>> f=@(t,u)-u+sin(t)+cos(t); tspan=[0 4]; u0=1;
>> [t,U]=ode45(f,tspan,u0);
>> plot(t,U,'blue')
```



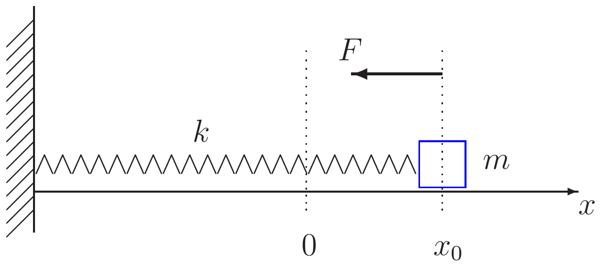
I bilden har vi även ritat ut lösningar för några andra begynnelsevärden.

Uppgift 1. Lös följande differentialekvation med begynnelsevillkor

$$\begin{cases} u' = \cos(3t) - \sin(5t)u, \ 0 \le t \le 15 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

Rita en graf av lösningen. Använd `ode45`.

Exempel 2. Vi skall se på en harmonisk oscillator. Antag att vi har en partikel med massan m som är fastsatt i en fjäder med fjäderkonstanten k. Detta innebär att kraften då fjädern sträckts en sträcka x blir $-kx$. Fjäderns andra ända är fastsatt i en fix punkt och partikeln kan röra sig utan friktion längs en horisontell linje.



Vid tiden $t = 0$ släpps partikeln från vila, på avståndet x_0 från jämviktspunkten, och man vill beräkna den fortsatta rörelsen.

Inför ett koordinatsystem enligt figuren ovan med origo där partikeln har sitt jämviktsläge. Då x betecknar partikelns läge får vi rörelseekvationen $mx'' = -kx$ från Newtons andra lag ($F = ma$). Detta är en differentialekvation av 2:a ordningen.

Vidare har vi begynnelsevärdena $x(0) = x_0$, läget vid tiden $t = 0$, och $x'(0) = 0$, partikeln i vila vid tiden $t = 0$.

Vi har begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x'' = -\frac{k}{m}x \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

Om vi låter $v = x'$, dvs. inför hastigheten, kan differentialekvationen med begynnelsevärden skrivas

$$\begin{cases} x' = v, & x(0) = x_0 \\ v' = -\frac{k}{m}x, & v(0) = 0 \end{cases}$$

dvs. som ett system av ekvationer av 1:a ordningen.

För att komma till standardform låter vi $u_1 = x$ och $u_2 = v$ och får

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1(0) = x_0 \\ u_2' = -\frac{k}{m}u_1, & u_2(0) = 0 \end{cases}$$

Med vektorbeteckningar kan detta skrivas

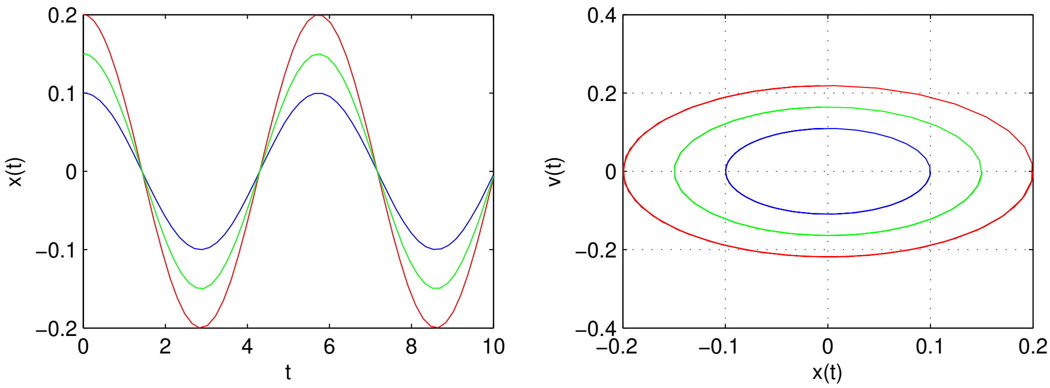
$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{k}{m}u_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi tar t.ex. $m = 0.1$ kg, $k = 0.12$ N/m och $x_0 = 0.1$ m. Vi beräknar lösning med `ode45` och ritar en bild som visar läget $x(t)$ med

```
>> m=0.1; k=0.12; x0=0.1; v0=0; tspan=[0 10]; u0=[x0;v0];
>> f=@(t,u)[u(2);-k*u(1)/m];
>> [t,U]=ode45(f,tspan,u0);
>> plot(t,U(:,1),'blue')
>> xlabel('t'), ylabel('x(t)')
```

och det s.k. fasporträttet $(x(t), v(t))$ med

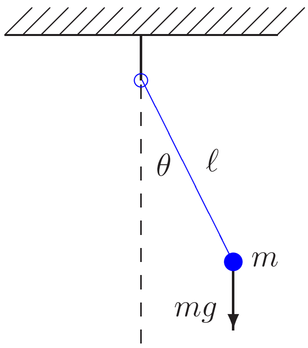
```
>> plot(U(:,1),U(:,2),'blue')
>> xlabel('x(t)'), ylabel('v(t)')
```



I bilden har vi även ritat ut lösningar för några andra begynnelsevärden.

Ekvationen för den harmoniska oscillatorn kan vi lösa analytiskt (räkna ut en formel för lösning). Vi avslutar med att se på en uppgift med en differentialekvation som inte har någon analytisk lösning.

Uppgift 2. Den matematiska pendeln. En masspunkt med massan m hänger i en viktlös smal stav av längden ℓ.



Med beteckningarna i figuren och Newtons andra lag får vi rörelseekvationen

$$m\ell\,\ddot{\theta}(t) = -mg\sin(\theta(t))$$

Vi vill bestämma lösningen för olika begynnelseutslag θ_0, dvs. $\theta(0) = \theta_0$, då vi släpper pendeln från vila, dvs. $\dot{\theta}(0) = 0$. Tag $\ell = 0.1$ m och begynnelseutslagen $\theta_0 = 30°, 45°, 60°$. Använd `ode45`. Rita både en bild av läget $x(t)$ och en av fasporträttet. Tänk på att du måste omvandla grader till radianer.

3 Integraler

Ibland kan man inte beräkna integraler exakt utan man får nöja sig med att beräkna approximationer. Exempelvis kan integralen $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} dx$ inte beräknas exakt, eftersom det inte finns någon användbar primitiv funktion.

Det finns färdiga funktioner i Matlab för att integrera, både effektivt och noggrant. En sådan funktion är `integral`.

Om vi skulle använda `integral` för att beräkna integralen $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} dx$ så skulle det se ut så här

```
>> a=0; b=1; f=@(x)exp(x.^2);
>> q=integral(f,a,b)
```

Lägg märke till att vi använder elementvisa operationer när vi beskriver integranden, precis som när vi skall rita en graf.

Uppgift 3. Beräkna integralen $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$. Rita först en graf av integranden. Använd `integral`. Jämför gärna med exakt resultat som kan räknas ut med partialintegration.

Uppgift 4. Beräkna arean av det slutna området mellan graferna till funktionerna

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{och} \quad h(x) = x^2 - 3x + 2\,.$$

Rita först upp graferna så att ni får en bild av området.

För att beräkna skärningspunkterna mellan graferna löser vi en ekvation av typen $f(x) = 0$. Sådana ekvationer löste vi med intervallhalveringsmetoden och Newtons metod i första delkursen, nu använder vi den inbyggda funktionen `fzero` istället. Beräkna sedan integralen med `integral`.