Facit Naturvetenskapligt basår, Matematik del 2

Damiano Ognissanti

2016-02-27

1a) Svar: $f'(x) = 3cos(3x)(ln(x) + tan(x)) + sin(3x)(\frac{1}{x} + \frac{1}{cos^2(x)})$

Lösning: Använd kedjeregeln.

1b) Svar: $G(x) = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{5}e^{5x}$

Lösning: $g(x) = 3x\sqrt{x} + 4e^{5x} = 3x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 4e^{5x} = 3x^{\frac{3}{2}} + 4e^{5x}$ vilket ger $G(x) = 3 \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{5}e^{5x}$

1c) Svar: $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-2x-3} = -\frac{1}{4}$

Lösning: Vi vill faktorisera $(x + 1)$ ur nämnaren. Ett sätt att göra detta är genom att multiplicera $(x + 1)$ med $(ax + b)$ och sedan jämföra koefficienterna med $(x^2 - 2x - 3)$, dvs. $(x + 1)(ax + b) = (ax^2 + ax + bx + b)$ och vi ser då att $a = 1$ och $b = -3$, så nämnaren är $(x + 1)(x - 3)$ och $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-2x-3} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-1-3} = -\frac{1}{4}$

1d) Svar: $x = \frac{150}{49}$

Lösning: Vi upphöjer båda led med 10 (eftersom det handlar om 10-logaritmen):

$$10^{2+lg(x-3)} = 10^{lg(2x)}$$

Vi förenklar vänster led: $VL = 10^{2+lg(x-3)} = 10^2 \cdot 10^{lg(x-3)} = 100 \cdot (x - 3)$.

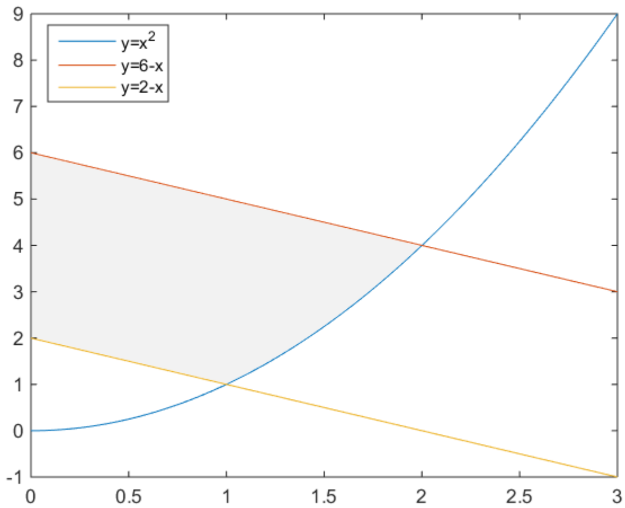
Vi förenklar höger led: $HL = 10^{lg(2x)} = 2x$.

Vi har alltså att $2x = 100(x - 3) = 100x - 300$ och $98x = 300$ så $x = \frac{300}{98} = \frac{150}{49}$.

2) Svar: $\frac{37}{6}$ areaenheter.

Lösning: De nedre funktionerna skär varandra då $x^2 = 2 - x \Rightarrow x = 1$ och de övre då $x^2 = 6 - x \Rightarrow x = 2$, notera att $x > 0$. Vi får slutligen:

$$\int_0^1 (6-x) - (2-x)dx + \int_1^2 (6-x) - x^2 dx = \frac{37}{6}$$



3) Svar: $\frac{27}{4}$ areaenheter.

Lösning: Kalla de lika långa benen för x och basen för y. Vi har att $2x+y=12$ dvs. $y=12-2x$. Vi skall maximera basen adderat med höjden. Basen av triangeln är y och höjden h fås genom att först dela triangeln itu och få en rätvinklig triangel med hypotenusa x och ena katet $\frac{y}{2}$ och den andra h och sedan använda Pythagoras sats: $h=\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}$.

Basen adderat med höjden blir $y+\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}} = 12-2x+\sqrt{x^2-\frac{(12-2x)^2}{4}} = 12-2x+\sqrt{x^2-(36-12x+x^2)} = 12-2x+\sqrt{12x-36}$, vi kallar funktionen $f(x)$ och söker derivatans nollställen.

$f'(x)=-2+\frac{1}{2\cdot\sqrt{12x-36}}\cdot 12=0 \Rightarrow 4\sqrt{12x-36}=12 \Rightarrow \sqrt{12x-36}=3 \Rightarrow 12x-36=9 \Rightarrow 12x=45 \Rightarrow x=\frac{15}{4}$.

För att se att maximum är uppnått studerar vi derivatan omkring $x=\frac{15}{4}$.

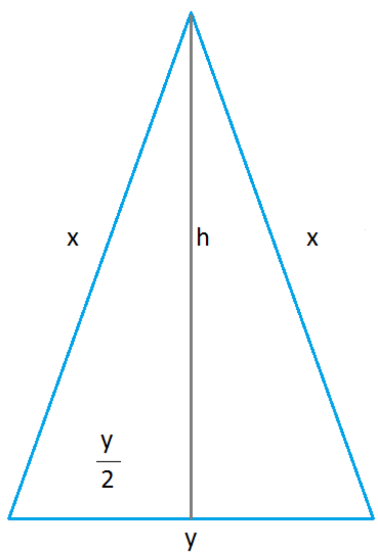
$f'(\frac{14}{4})=-2+\frac{6}{\sqrt{12\cdot\frac{14}{4}-36}}=-2+\frac{6}{\sqrt{3\cdot 14-36}}=-2+\frac{6}{\sqrt{6}}=-2+\sqrt{6}>0$, ty $\sqrt{6}>\sqrt{4}=2$.

$f'(\frac{16}{4})=-2+\frac{6}{\sqrt{12\cdot\frac{16}{4}-36}}=-2+\frac{6}{\sqrt{3\cdot 16-36}}=-2+\frac{6}{\sqrt{12}}=-2+\sqrt{3}<0$, ty $\sqrt{3}<\sqrt{4}=2$.

Vi har alltså ett lokalt maximum.

Från $x=\frac{15}{4}$ fås basen $y=12-\frac{15}{2}=\frac{9}{2}$ och höjden $h=\sqrt{(\frac{15}{4})^2-(\frac{9}{2})^2\cdot\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{225}{16}-\frac{81}{16}}=\sqrt{\frac{144}{16}}=\frac{12}{4}=3$.

Arean av triangeln är slutligen $\frac{\frac{9}{2}\cdot 3}{2}=\frac{27}{4}$ areaenheter.



4a) Svar: $\Re(z) = \frac{4}{5}, \Im(z) = \frac{3}{5}, |z| = 1$

Lösning: $z = \frac{5i}{(2+i)^2} = \frac{5i}{4+4i+i^2} = \frac{5i}{3+4i} = \frac{5i}{3+4i}\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{15i-20i^2}{9+16} = \frac{15i+20}{25} = \frac{3i+4}{5}$ och
$|z| = \sqrt{(\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2} = \sqrt{\frac{25}{25}}$.

4b) Svar: $z_1 = -2 + 3i, z_2 = 2 - i$

Lösning: Vi börjar med att kvadratkomplettera: $z^2-2iz-1+8i = (z-i)^2-i^2-1+8i = (z-i)^2+8i$,

så $(z-i)^2 = -8i$ och $-8i = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$, dvs. $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -8 \end{cases}$

Vi har att $a = \pm b$ men $a = b$ ger (i rad 2) att $2a^2 = -8$ vilket är orimligt ty a är ett reellt tal.

Alltså gäller $a = -b$ och $a^2 = 4$, så $a = \pm 2$.

Vi har alltså två möjliga kombinationer: $a + bi = 2 - 2i$ eller $a + bi = -2 + 2i$ och vi får slutligen

$(z - i) = \pm(2 - 2i) \Rightarrow z = i \pm (2 - 2i)$.

5) Svar: Lokalt maximum då $x = 2$, lokalt minimum då $x = 6$ och terrasspunkt då $x = 0$. Vågrät asymptot då $y = 0$. Se även figur:

Lösning: $e^x > 0$ så vi har inga lodräta asymptoter.

Vi har en vågrät asymptot då $y = 0$ ty $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-x^4}{e^x} = 0$.

Notera dock att asymptoten endast är då $x \to \infty$ eftersom: $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3-x^4}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3-x^4}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}(-4x^3 - x^4)e^x = -\infty$.

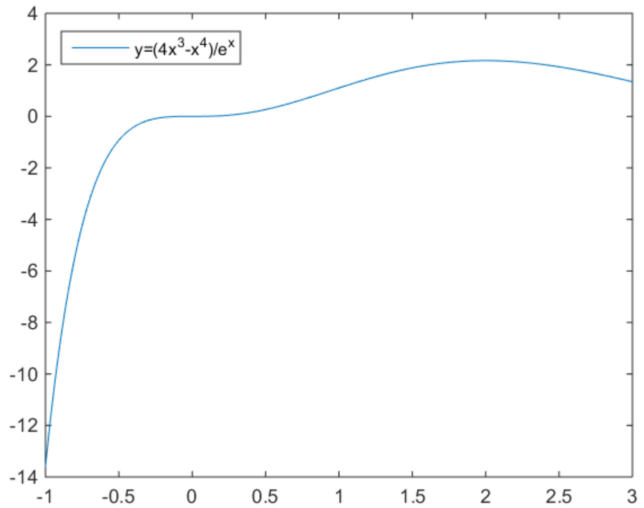
För extrempunkter och terrasspunkter: $f(x) = \frac{4x^3-x^4}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2(x-2)(x-6)}{e^x}$. $f'(x) = 0$ då $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 6$.

$f''(x) = -\frac{24x-36x^2+12x^3-x^4}{e^x}$ och

$f''(2) = -\frac{16}{e^2} < 0$ (lokalt maximum),

$f''(6) = \frac{144}{e^6} > 0$ (lokalt minimum).

Vi kan inte säga hur funktionen beter sig då $x = 0$ mha andraderivatan eftersom $f''(0) = 0$. Vi har dock att $f'(1) = \frac{5}{e} > 0$ och $f'(-1) = 21e > 0$, så vi har en terrasspunkt då $x = 0$.



6) Svar: $x_1 = \frac{2}{5}, x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{6}$.

Lösning: Satsen om rationella rötter ger oss att delarna till koefficienten till x^0-termen dividerat med koefficienterna till x^3-termen är potentiella rötter till polynomet. Vi får alltså: $\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Prövning ger att $x_1 = \frac{2}{5}$ är en rot.

Vi multiplicerar nu $(x - \frac{2}{5})$ med $(ax^2 + bx + c)$ och jämför koefficienter för att faktorisera polynomet (polynomdivision fungerar givetvis också). Vi har $(x-\frac{2}{5})(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-\frac{2a}{5})x^2+(c - \frac{2b}{5})x - \frac{2c}{5}$ vilket ger $a = 5, b = -10$ och $c = -25$, alltså $(5x^2 - 10x - 25) = 5(x^2 - 2x - 5)$. Från andragradspolynomet får vi de andra två rötterna $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{6}$.

7) Lösning: $\lim_{y\to 0^+} y\ln(y) = \left\{ \begin{array}{c} y = e^x \\ y \to 0^+ \Rightarrow x \to -\infty \end{array} \right\} = \lim_{x\to -\infty} xe^x = \left\{ \begin{array}{c} x = -z \\ x \to -\infty \Rightarrow z \to \infty \end{array} \right\} =$ $\lim_{z\to\infty} -ze^{-z} = -\lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^z} = 0$

8) Se kurslitteraturen

9) Se kurslitteraturen