Vektoralgebra

En inledning

Hasse Carlsson

Matematiska institutionen
Göteborgs universitet och
Chalmers tekniska högskola
Version 2005

Innehåll

1. Inledning

Du är säkert väl förtrogen med hur (reella) tal kan användas för att beskriva olika storheter inom naturvetenskap, t.ex. längd, temperatur, strömstyrka och fart. Dessa storheter kallas ofta för skalärer.

Andra storheter har både riktning och storlek. Några sådana exempel är kraft, acceleration, hastighet och magnetfält. Sedan länge har man beskrivit dessa storheter, t.ex. krafter, med hjälp av pilar (riktade sträckor) där pilen pekar i kraftens riktning och pilens längd anger kraftens storlek. Storheter med både riktning och storlek kallas vektorer. Vi skall lära oss att räkna med dessa vektorer och på så sätt skapa oss ett verktyg för att angripa problem av många olika slag.

Syftet med detta kompendium är att på ett förhoppningsvis begripligt sätt beskriva början av denna teori.

2. Geometriska vektorer

Med ledning av diskussionen i inledningen skall vi definiera vektorer och operationer på vektorer i både planet och rummet. Definitionen bygger på geometriska resultat om t.ex. parallellitet och likformighet. Omvänt kan vi därför genom att räkna med vektorer bevisa geometriska resultat.

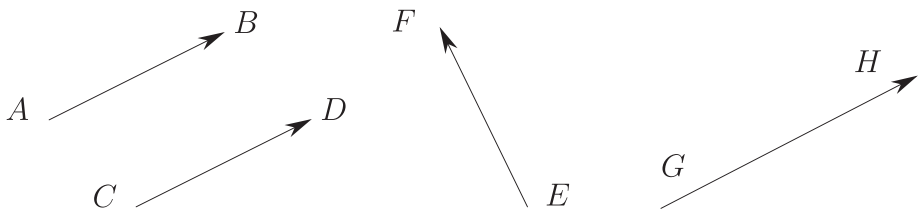
Om man studerar hastigheten hos en båt (i synnerhet om vågorna är små) är det naturligt att bara hålla reda på hur den rör sig med avsende på två riktningar; nord-sydlig och öst-västlig. En båt kan t.ex. köra med 12 knop i nordnordvästlig riktning. Om man i stället studerar ett flygplan behöver man också hålla reda på en tredje riktning; nämligen den vertikala. Planet kan stiga 30° med hastigheten $572\,\mathrm{km/tim}$ i sydostlig riktning. Man säger därför att planet (inte flygplanet) är tvådimensionellt och rummet tredimensionellt och vi använder ofta beteckningarna $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ för planet respektive rummet.

2.1. Definition av vektorer

Vi skall definiera vektorer i planet och i rummet. Diskussionen i denna och de följande två paragraferna gäller både för vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Definition 2.1. *Två punkter A och B bestämmer en* riktad sträcka *från A till B som betecknas $\overrightarrow{AB}$.*

Varje riktad sträcka bestämmer i sin tur en vektor $\mathbf{u}$. *Två sträckor som är lika långa och lika riktade bestämmer samma vektor.*



I figuren är sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ lika långa och lika riktade och bestämmer alltså samma vektor $\mathbf{u}$. Vi skriver $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Sträckan $\overrightarrow{EF}$ är lika lång som $\overrightarrow{AB}$ men inte parallell med $\overrightarrow{AB}$. Så om $\mathbf{v} = \overrightarrow{EF}$ är $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Sträckan $\overrightarrow{GH}$ är lika riktad men inte lika lång som $\overrightarrow{AB}$, så om $\mathbf{w} = \overrightarrow{GH}$ är $\mathbf{w} \neq \mathbf{u}$. Eftersom $\overrightarrow{EF}$ och $\overrightarrow{GH}$ varken är lika långa eller lika riktade så är också $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$.

Nollvektorn är den vektor som fås då start- och slutpunkt sammanfaller. Nollvektorn betecknas $\mathbf{0}$ och alltså är $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

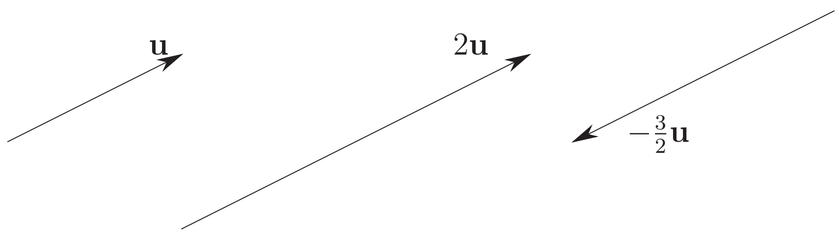
Om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u}$ den vektor som är lika lång som $\mathbf{u}$ men motsatt riktad mot $\mathbf{u}$, dvs. $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$.

Längden av vektorn $\mathbf{u}$ betecknas $|\mathbf{u}|$.

2.2. Operationer på vektorer

Multiplikation av en vektor med en skalär

Definition 2.2. *Om t är ett reellt tal och $\mathbf{u}$ är en vektor så är $t\mathbf{u}$ den vektor som har längden $|t||\mathbf{u}|$ och är lika riktad som $\mathbf{u}$ om $t > 0$ och motsatt riktad mot $\mathbf{u}$ om $t < 0$. När $t = 0$ är $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$.*



Exempel 2.1.

(1) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (2) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$

(3) $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ för alla t och (4) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{u}$.

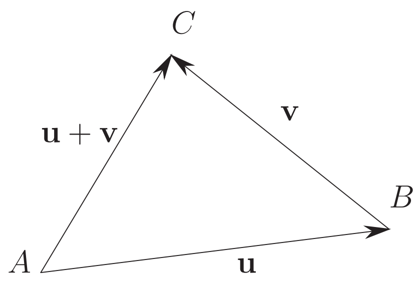
□

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $t\,\mathbf{u}$ är alltså parallella och om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så kan varje vektor $\mathbf{v}$ som är parallell med $\mathbf{u}$ skrivas $\mathbf{v} = t\,\mathbf{u}$ för något t.

Addition av vektorer

Vi skall nu definiera addition av vektorer. Definitionen görs så att kraftparallellogramlagen blir uppfylld.

Definition 2.3. *Låt* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *vara två vektorer. Välj tre punkter* A, B *och* C *så att* $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ *och* $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$*. Då är* $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$*.*

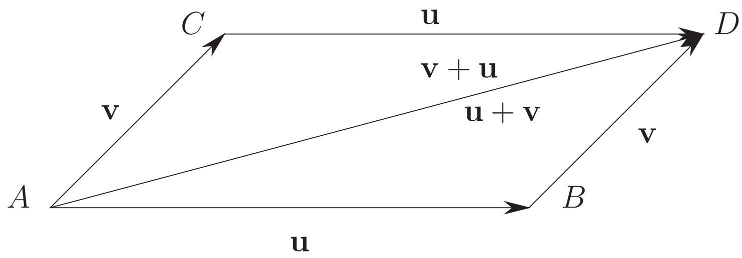


Räkneregler

(1) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ $\quad$ (*kommutativitet*),
(2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ $\quad$ (*associativitet*),
(3) $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$,
(4) $t(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = t\mathbf{u}+t\mathbf{v}$ $\quad$ (*distributivitet*),
(5) $(s+t)\mathbf{u} = s\mathbf{u}+t\mathbf{u}$ $\quad$ (*distributivitet*),
(6) $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$.

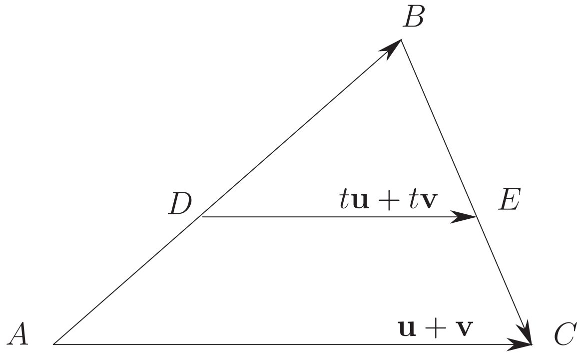
Vi visar bara (1) och (4) då $t > 0$, och låter läsaren själv fundera ut varför de övriga är sanna.

Kommutativiteten följer ur följande figur.



I parallellogrammen $ABCD$ är $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Så $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

Att (4) gäller följer av likformighet. Antag att $t > 0$ och betrakta trianglarna ABC och DBE där $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, $t\mathbf{u} = \overrightarrow{DB}$ och $t\mathbf{v} = \overrightarrow{BE}$.



Trianglarna ABC och DBE är likformiga med förhållandet $1 : t$. (Varför?) Så $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{DE}$ är lika riktade och $|\overrightarrow{DE}| = t|\overrightarrow{AC}|$. Det betyder att $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{AC}$ och

$$t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}\ .$$

$\square$

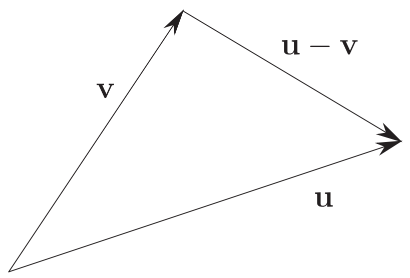
Anmärkning 2.1. Figuren i beviset av (1) visar att addition av vektorer uppfyller parallellogramlagen för krafter. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är krafter så är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ krafternas resultant; om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ påverkar en partikel så blir effekten densamma som när partikeln bara påverkas av kraften $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. $\square$

Subtraktion av vektorer

Definition 2.4. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Vi har $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ty om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$.

Observera också att $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ löser ekvationen $\mathbf{v} + \mathbf{x} = \mathbf{u}$ eftersom $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = (\mathbf{v} - \mathbf{v}) + \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Så om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de startar i samma punkt är $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ den vektor som startar i spetsen av $\mathbf{v}$ och slutar i spetsen av $\mathbf{u}$.

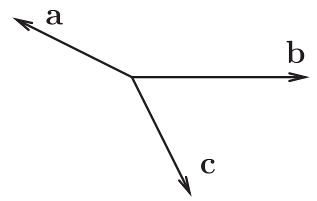


Man kan också se det genom att skriva $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{u}$.

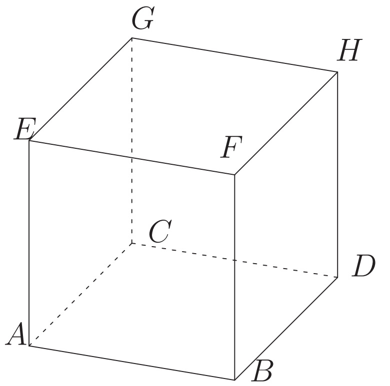
Anmärkning 2.2. Figurerna i bevisen ovan är ritade tvådimensionellt. (I papperets plan). Detta är ingen inskränkning eftersom två vektorer alltid ligger i ett plan. Däremot gör inte alltid tre vektorer det, så associativa lagen kan inte åskadliggöras med en tvådimensionell figur.

$\square$

Övning 2.1. Bestäm (a) $\mathbf{2a} + \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ och (c) $\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, där $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ges av figuren:



Övning 2.2. Låt $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$ i följande kub.



Bestäm tal x, y och z så att $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ då

(a) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$, (b) $\mathbf{v} = \overrightarrow{EH}$, (c) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG}$,

(d) $\mathbf{v} = \overrightarrow{HA}$, och (e) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HA}$.

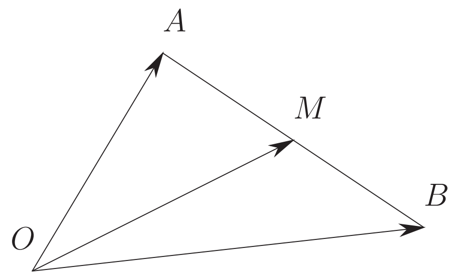
Övning 2.3. En motorbåt går i stillastående vatten med farten 6 m/s. Båten körs i en älv där vattnet strömmar rakt söderut med farten 2 m/s.
(a) Bestäm båtens hastighet (storlek och fart) om den styrs i rakt östlig riktning.
(b) Vilken kurs skall båten hålla för att röra sig rakt öster ut?

2.3. Geometriska tillämpningar

I det här avsnittet ger vi några tillämpningar av vektoralgebra på geometriska problem.

Exempel 2.2. Låt O, A och B vara tre punkter. Om M är mittpunkten på sträckan $\overrightarrow{AB}$ så gäller

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

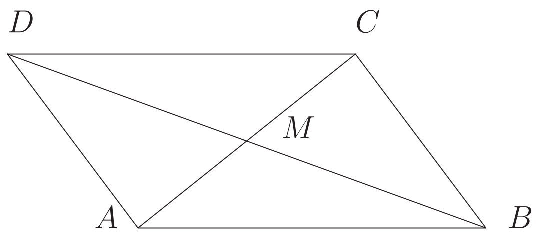


Eftersom $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ gäller

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

$\square$

Exempel 2.3. Diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu.



Påståendet innebär att diagonalernas skärningspunkt är mittpunkt både på diagonalen AC och på diagonalen BD.

Låt M vara mittpunkten på diagonalen BD. För att visa påståendet räcker det att visa att M också är mittpunkt på diagonalen AC. (Varför?) Enligt förra exemplet är

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

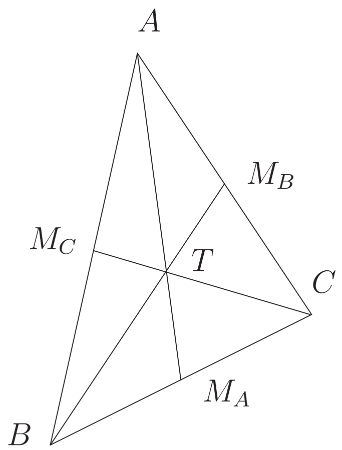
Men $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ så

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC},$$

dvs. M är mittpunkt på diagonalen AC. □

Exempel 2.4. (En triangels tyngdpunkt.)

En median i en triangel är sträckan från ett hörn till motstående sidas mittpunkt. Vi skall visa att medianerna skär varandra i en punkt som delar medianen i förhållandet 2 : 1 från spetsen räknat. Denna punkt kallas triangelns tyngdpunkt. (Varför då?)



Låt O vara en godtycklig punkt, M_A, M_B och M_C vara triangelsidornas mittpunkter (se figur) och T vara den punkt på linjen AM_A som delar AM_A i förhållandet 2 : 1. Då gäller $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_A}$. Exempel 2.2 ger att $\overrightarrow{AM_A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Så

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Detta ger

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC})\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right.$$

Om $\overrightarrow{BT_B}= \frac{2}{3}\ \overrightarrow{BM_B}$ och $\overrightarrow{CT_C}= \frac{2}{3}\ \overrightarrow{CM_C}$ får vi på samma sätt (eller ännu enklare på grund av symmetri) att

$$\overrightarrow{OT_B}=\overrightarrow{OT_C}= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) .$$

Så

$$\overrightarrow{OT_B}=\overrightarrow{OT_C}=\overrightarrow{OT} \text{ och } T_B = T_C = T$$

och alltså ligger T på alla medianerna.

$\square$

Observera om O är en godtycklig punkt och T triangelns tyngdpunkt så har vi visat att

$$\overrightarrow{OT}= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) .$$

Anmärkning 2.3. Beviset ovan är ett ”orakelbevis”. Hur kunde vi veta att tyngdpunkten delar medianen i förhållandet $2:1$?

Här ger vi ett alternativt bevis som inte utnyttjar detta faktum. Låt som förut O vara en godtycklig punkt, M_A, M_B och M_C vara triangelsidornas mittpunkter och T skärningspunkten mellan AM_A och BM_B. Eftersom $\overrightarrow{AM_A}$ och $\overrightarrow{AT}$ är lika riktade gäller $\overrightarrow{AT}= a\overrightarrow{AM_A}$ för någon skalär a. På samma sätt gäller $\overrightarrow{BT}= b\overrightarrow{BM_B}$.

Eftersom M_A och M_B är mittpunkter på sträckan BC respektive AC så gäller $\overrightarrow{AM_A}= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ och $\overrightarrow{BM_B}= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$. Så

$$\overrightarrow{AT}= \frac{a}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) \text{ och } \overrightarrow{BT}= \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right) .$$

Detta ger

$$\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{BA}+\frac{a}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\left(\frac{a}{2}-1\right)\overrightarrow{AB}+\frac{a}{2}\ \overrightarrow{AC} ,$$

men också

$$\overrightarrow{BT}= \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=b\ \overrightarrow{BA}+\frac{b}{2}\ \overrightarrow{AC} .$$

Så

$$\left(\frac{a}{2}-1\right)\overrightarrow{AB}+\frac{a}{2}\ \overrightarrow{AC}= b\ \overrightarrow{BA}+\frac{b}{2}\ \overrightarrow{AC}$$

och

$$\left(\frac{a}{2}+b-1\right)\overrightarrow{AB}= \frac{b-a}{2}\ \overrightarrow{AC} .$$

Men vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är *inte* parallella och därför är

$$\left(\frac{a}{2} + b - 1\right) = \frac{b-a}{2} = 0$$

vilket ger $a = b = \dfrac{2}{3}$.

Nu har vi själva visat att att tyngdpunkten delar medianen i förhållandet $2:1$ och behöver inte hänvisa till något orakel.

$\square$

Övning 2.4. Visa att om $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ så är M mittpunkt på sträckan AB.

Övning 2.5. Visa att om $\overrightarrow{OT} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ så är T tyngdpunkt i triangeln ABC.

Övning 2.6. Punkterna D, E och F delar triangeln ABC så att $\overrightarrow{AB} = 3\ \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} = 3\ \overrightarrow{BE}$ och $\overrightarrow{CA} = 3\ \overrightarrow{CF}$. Visa att trianglarna ABC och DEF har samma tyngdpunkt.

Övning 2.7. Låt M vara mittpunkten på sträckan mellan två motstående kanters mittpunkter i tetraedern $ABCD$.

(a) Visa att

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\ .$$

(b) Hur många par av motstående kanter finns det?

(c) Visa att punkten M i (a) inte beror på vilka kanter vi valt, dvs. sträckan mellan mittpunkterna på motstående kanter skär varandra i en punkt.

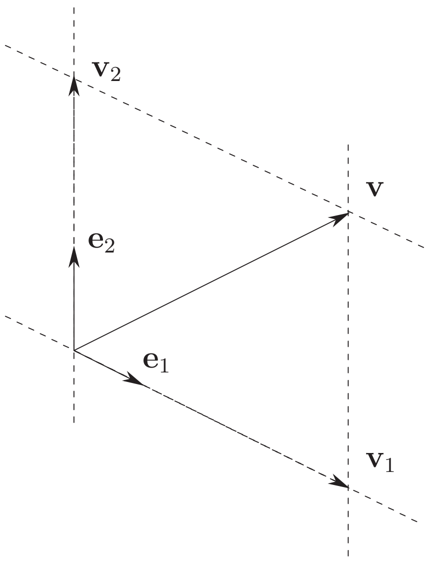
3. Baser och koordinater

För att göra det mer praktiskt att räkna med geometriska vektorer i planet och rummet skall vi se hur man kan representera dem som par respektive tripplar av reella tal. På så sätt kan man räkna med vektorer ”som vanligt” fast med två respektive tre kopior av $\mathbb{R}$.

3.1. Baser i planet

Definition 3.1. *Två vektorer i planet* $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$ *som inte är parallella kallas en* bas*.*

Låt $\mathbf{v}$ vara en godtycklig vektor. Placera $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}$ så att de börjar i samma punkt. Drag linjer genom $\mathbf{v}$:s ändpunkter parallella med $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ och låt $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ vara sidorna i den parallellogram som bildas.



Då är $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$. Eftersom $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ är parallella med $\mathbf{e}_1$ respektive $\mathbf{e}_2$ finns tal x och y så att $\mathbf{v_1} = x\,\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{v_2} = y\,\mathbf{e}_2$. Alltså är $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och vi har visat ena halvan av följande sats.

Sats 3.2. *Om* $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$ *är en bas i planet så kan varje vektor* $\mathbf{v}$ *entydigt skrivas*

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2.$$

(Talen x och y kallas för $\mathbf{v}$:s koordinater *i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.)*

Det återstår att visa entydigheten. Så antag att $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 = x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2$. Vi måste visa att $x = x'$ och $y = y'$. Men om t.ex $x \neq x'$ så är $\mathbf{e}_1 =$

$-\dfrac{y-y'}{x-x'}\,\mathbf{e}_2$, dvs. $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är parallella. Men detta är en motsägelse eftersom $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ är en bas, så $x = x'$. ■

Anmärkning 3.1. I resonemanget ovan har vi implicit antagit att varken $\mathbf{e}_1$ eller $\mathbf{e}_2$ är nollvektorn. För att inte behöva behandla nollvektorn speciellt använder vi i fortsättningen konventionen att $\mathbf{0}$ är parallell med (och vinkelrät mot) varje vektor. □

Om basvektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är vinkelräta (eller *ortogonala*) och har längden ett kallas de *ortonormerade*. I fortsättningen arbetar vi oftast med ortonormerade basvektorer.

Om det är klart vilka basvektorerna är, skriver vi helt kort $\mathbf{v} = (x, y)$ i stället för $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och kallar x och y för $\mathbf{v}$:s koordinater. Om $(x, y) = (x', y')$ så ger entydigheten i Sats 3.2 att $x = x'$ och $y = y'$.

Sats 3.3. *Om* $\mathbf{v} = (x, y)$, $\mathbf{u} = (x', y')$ *och* $t \in \mathbb{R}$ *så gäller*

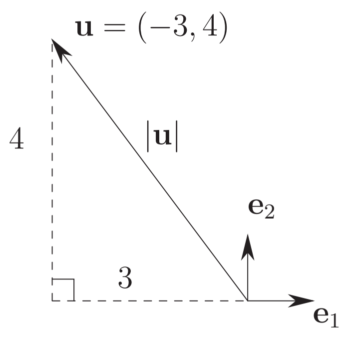
$$t\,\mathbf{v} = t\,(x, y) = (tx, ty)$$

och

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Bevis. Satsen följer enkelt från räknereglerna för vektorer. Vi har $t\,\mathbf{v} = t(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2) = tx\,\mathbf{e}_1 + ty\,\mathbf{e}_2 = (tx, ty)$ och $\mathbf{v} + \mathbf{u} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2 = (x + x')\,\mathbf{e}_1 + (y + y')\,\mathbf{e}_2 = (x + x', y + y')$. ■

Exempel 3.1. Antag att $\mathbf{u} = (-3, 4)$ i en ortonormerad bas. Hur lång är $\mathbf{u}$?



Lösning. Pythagoras sats ger (se figuren) $|\mathbf{u}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ så $|\mathbf{u}| = 5$.

Med samma resonomang ser vi att om $\mathbf{u} = (x, y)$ så är

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{och} \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

□

Exempel 3.2. Krafterna $\mathbf{F_1} = (-1, 2)$ och $\mathbf{F_2} = (2, -3)$ (i Newton) verkar på en partikel. Hur stor är deras sammanlagda verkan?
Lösning. Den resulterande kraften är $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = (-1, 2) + (2, -3) = (1, -1)$ så $|\mathbf{F}| = \sqrt{1+1}\,\mathrm{N} = \sqrt{2}\,\mathrm{N}$. □

Övning 3.1. Antag att $\mathbf{u} = (1, 2)$ och att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 4)$. Vad är då $\mathbf{v}$?

Övning 3.2. Antag att $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 2)$. Bestäm $\overrightarrow{BC}$.

Övning 3.3. Sätt $\mathbf{v} = (1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1)$. Visa att $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$.

Övning 3.4. Låt $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ ha koordinaterna $(1, 2)$ respektive $(1, 1)$ i en given bas. Visa att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ också är en bas i planet. Vilka är de nya koordinaterna för den vektor som har de gamla koordinaterna $(2, 1)$?

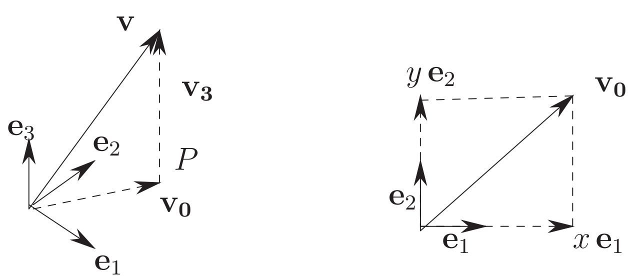
3.2. Baser i $\mathbb{R}^3$

Definition 3.4. *Tre vektorer* $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *utgör en* bas *för* $\mathbb{R}^3$ *om de inte ligger i ett plan.*

Sats 3.5. *Om* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *är en bas i rummet kan varje vektor* $\mathbf{v}$ *entydigt skrivas*

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 \ .$$

Bevis. Placera $\mathbf{v}$ och basvektorerna så att de börjar i samma punkt. Drag en linje parallell med $\mathbf{e}_3$ som går genom spetsen på $\mathbf{v}$. Den skär planet som innehåller $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ i en punkt P. (Linjen skär planet eftersom $\mathbf{e}_3$ inte ligger i planet.) Då är $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v_3}$, se figuren. $\mathbf{v_3}$ är parallell med $\mathbf{e}_3$, så $\mathbf{v_3} = z\,\mathbf{e}_3$.



$\mathbf{v_0}$ ligger i planet som spänns av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Observera att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella. (Varför?) Med hjälp av Sats 3.1 ser vi att $\mathbf{v_0} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och alltså $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v_3} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$, och existensen är klar.

För att visa entydigheten antar vi att

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 = x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2 + z'\,\mathbf{e}_3 \ .$$

Vi måste visa att $x = x'$, $y = y'$ och $z = z'$. Antag tex. att $z \neq z'$. Då gäller

$$\mathbf{e}_3 = -\frac{x - x'}{z - z'}\,\mathbf{e}_1 - \frac{y - y'}{z - z'}\,\mathbf{e}_2\ ,$$

vilket betyder att $\mathbf{e}_3$ ligger i samma plan som $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Detta motsäger att $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är en bas, och alltså är $z = z'$.

■

Som i $\mathbb{R}^2$ skriver vi kortfattat $\mathbf{v} = (x, y, z)$ och vi har räknereglerna

$$t\,(x, y, z) = (tx, ty, tz) \quad \text{och} \quad (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')\ .$$

En bas är *ortonormerad* om alla basvektorerna har längden ett och är vinkelräta mot varandra. Med hjälp av Pythagoras sats ser vi (Hur då?) att i en ortonormerad bas ges en vektors längd av

$$|\mathbf{u}|^2 = |(x, y, z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{och} \quad |\mathbf{u}| = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

.

Övning 3.5. Bestäm $\overrightarrow{BC}$ om $\overrightarrow{AB}= (1, 2, 1)$ och $\overrightarrow{AC}= (2, 1, 3)$.

Övning 3.6. Sätt $\mathbf{u} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$. Beräkna $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

Övning 3.7. Bestäm ett tal a så att vektorerna $(a, 2 + a, 6)$ och $(2, 1, -3)$ är parallella.

Övning 3.8. Bestäm ett tal t så att vektorerna
(a) $(1, 2)$ och (t, t^2), (b) $(t, 1 - t, 1 + t)$ och $(2, 0, 4)$
och (c) $(t, 2t^2, 3t)$ och $(1, 6, t)$
blir parallella.

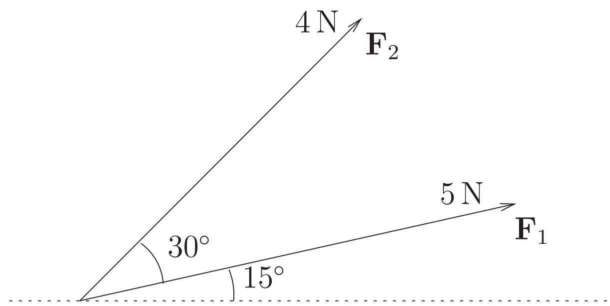
Övning 3.9. Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som har längden 1 och är parallell med $(-1, 2, 2)$.

Övning 3.10. Bestäm längderna av vektorerna
(a) $(-1, -2, -3)$, (b) $(1, 1, 1)$ och (c) $(-1, 2, 2)$.

Övning 3.11. Krafterna $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ verkar på en partikel. Bestäm storlek och riktning av krafternas resultant om

(a) $\mathbf{F}_1 = (1, -3, 4)$ och $\mathbf{F}_2 = (5, 9, 2)$,

(b) ges av följande figur:

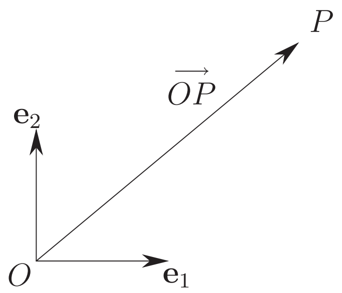


(ON-bas, SI-enheter.)

Övning 3.12. Bildar vektorerna $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ och $(1, 1, 1)$ en bas för $\mathbb{R}^3$? Motivera ditt svar.

3.3. Koordinatsystem

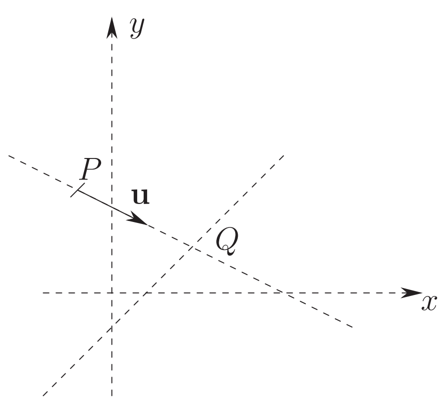
I det här avsnittet skall vi beskriva punkter med hjälp av koordinater. Detta gör vi genom att fixera en punkt O som vi kallar *origo*. En punkt P bestämmer en vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ och omvänt om vi har en vektor $\mathbf{u}$ så finns det en punkt P så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$. Vektorn $\overrightarrow{OP}$ kallas för P:s ortsvektor.



Vi har alltså identifierat punkten P med vektorn $\overrightarrow{OP}$. Om $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ (i en viss bas) får P samma kordinater; $P = (x, y, z)$. För origo gäller $O = (0, 0, 0)$. (Varför?)

Exempel 3.3. Bestäm koordinaterna för den vektor $\overrightarrow{PQ}$ som går från $P = (1, -2, 1)$ till $Q = (-2, 1, 0)$.
Lösning. Vi har $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$. Så $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = Q - P = (-2, 1, 0) - (1, -2, 1) = (-3, 3, -1)$. $\square$

Exempel 3.4. Genom punkten $P = (-1, 3)$ dras en linje parallell med vektorn $\mathbf{u} = (2, -1)$. Var skär denna linjen $x - y = 1$?
Lösning. Kalla skärningspunkten Q.



Eftersom $\overrightarrow{PQ}$ är parallell med $\mathbf{u}$ finns ett tal t med $\overrightarrow{PQ}= t\,\mathbf{u}$ eller $Q = P + t\,\mathbf{u} = (-1, 3) + t(2, -1) = (2t - 1, 3 - t)$. Men att Q ligger på linjen $x - y = 1$ betyder att $2t - 1 - (3 - t) = 1$. Denna ekvation har lösningen (Räkna själv!) $t = 5/3$. Alltså är $Q = (-1, 3) + \dfrac{5}{3}(2, -1) = \dfrac{1}{3}(7, 4)$. □

Vi har alltså sett att två punkter P och Q bestämmer en vektor $\overrightarrow{PQ}$ som beräknas genom

$$\overrightarrow{PQ}= Q - P\,.$$

Ett annat sätt att skriva detta är

$$P+ \overrightarrow{PQ}= Q\,;$$

om vi startar i punkten P och går längs vektorn $\overrightarrow{PQ}$ hamnar vi i Q.

Övning 3.13. Antag att $\overrightarrow{OP}= (2, 3)$, $\overrightarrow{OQ}= (3, 4)$. För vilken punkt R gäller det att $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$?

Övning 3.14. En triangel har hörn i $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 5, 7)$ och $C = (2, -9, -5)$. Bestäm vektorerna $\mathbf{u} =\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} =\overrightarrow{BC}$ och $\mathbf{w} =\overrightarrow{CA}$.

Övning 3.15. Vad är mittpunkten på sträckan vars ändpunkter är
(a) $(1, 2, 3)$ och $(3, 0, -1)$, (b) (x, y, z) och (x_1, y_1, z_1) ?

Övning 3.16. Bestäm mittpunkten på sträckan mellan de båda punkterna $(1, 2, 3)$ och $(4, 4, 4)$.

Övning 3.17. En triangel har hörnen $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ och $(3, -2, 2)$. Bestäm triangelns tyngdpunkt.

Övning 3.18. Bestäm avståndet mellan följande par av punkter
(a) $(1, 0), (0, 1)$ (b) $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$ och (c) $(1, 1, 2), (2, 1, 1)$.

Övning 3.19. Visa att punkterna $(1, 1, -1), (1, -1, 1)$ och $(-1, 1, 1)$ bildar hörn i en liksidig triangel.

Övning 3.20. Bestäm en punkt i planet så att den tillsammans med $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(2, -3)$ bildar en parallellogram.

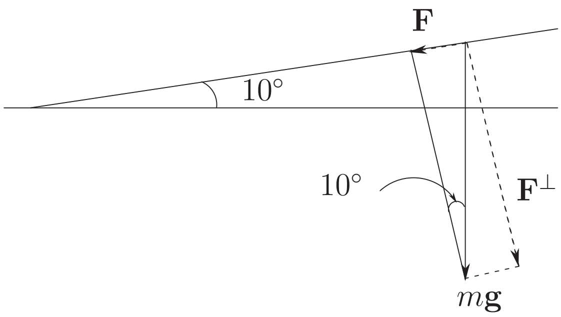
Övning 3.21. Undersök om punkterna $(1, 1, 2)$, $(0, 3, 2)$, $(2, 2, 1)$ och $(1, 4, 1)$ är hörn i en parallellogram.

Övning 3.22. Det finns tre parallellogrammer som har hörn i punkterna $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$ och $(2, 3, 5)$. Bestäm diagonalernas skärningspunkt i dessa tre parallellogrammer.

4. Skalärprodukt

I det här avsnittet skall vi behandla problem som har att göra med vinklar mellan vektorer. Ett viktigt tillämpningsområde är fysiken och vi börjar med två sådana exempel.

Exempel 4.1. Stina som är ute och cyklar står på krönet av en brant backe. Hon rullar utför backen som är femtio meter lång och lutar tio grader.Hur fort rullar hon vid foten av backen?
(Bortse från friktion och luftmotstånd).
Lösning. Antag att Stina med cykel väger m kg. Hon påverkas endast av tyngdkraften. Arbetet som uträttas är produkten av storleken av tyngdkraftens verkan i backens riktning ($\mathbf{F}$) och backens längd.



($\mathbf{F}^{\perp}$ som är vinkelrät mot backen bidrar inte till arbetet.)

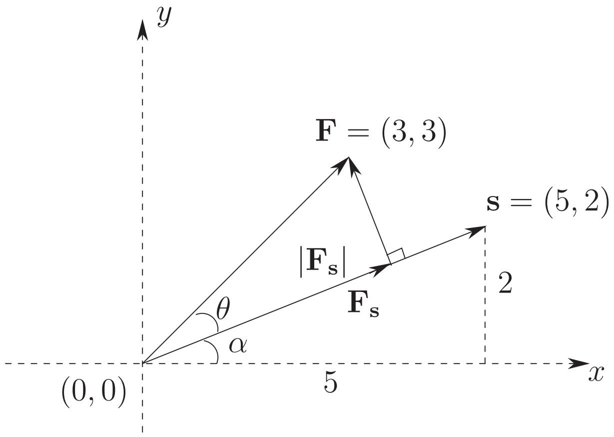
Från figuren ser vi att $\sin 10° = |\mathbf{F}|/mg$ eller $|\mathbf{F}| = mg \sin 10°$. Så $W = |\mathbf{F}| \cdot 50 = 50mg \sin 10°$. Detta arbete omvandlas till rörelseenergi. Om v är den sökta hastigheten är rörelseenergin $\frac{1}{2}mv^2$. Detta ger $W = \frac{1}{2}mv^2$ eller $v^2 = 100g \sin 10° \approx 982 \sin 10° \approx 170,5$ och $v \approx 13$ (m/s). (13 m/s=47 km/tim.)

□

Exempel 4.2. En partikel rör sig under påverkan av kraften $(3, 3)$ rätlinjigt från origo till punkten $(5, 2)$ i ett ortonormerat koordinatsystem. Hur stort arbete uträttas?

(SI-enheter)

Lösning 1. Det uträttade arbetet är produkten av vägen och kraftens projektion i vägens riktning; $W = |\mathbf{F_s}| \cdot |\mathbf{s}|$.



Vektorn $(3,3)$ bildar 45°:s vinkel med x-axeln så $\theta = 45 - \alpha$. Vinkeln α uppfyller $\tan\alpha = 2/5$ så $\alpha = \arctan(2/5)$. Alltså är $|\mathbf{F_s}| = |\mathbf{F}|\cos\theta = \sqrt{9+9}\cos\theta = 3\sqrt{2}\cos\theta$. Vägen $\mathbf{s}$ har längden $|\mathbf{s}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$, och vi får $W = 3\sqrt{2}\cos\theta\sqrt{29} = 21$. (Exakt! Kan du visa det?)

Anmärkning 4.1. Observera att $W = 21 = 3\cdot5+3\cdot2$, dvs. arbetet är summan av produkterna av kraften och vägens x och y-koordinater. Detta är ingen tillfällighet, och ett av syftena med införandet av skalärprodukt är att visa att det alltid är så. □

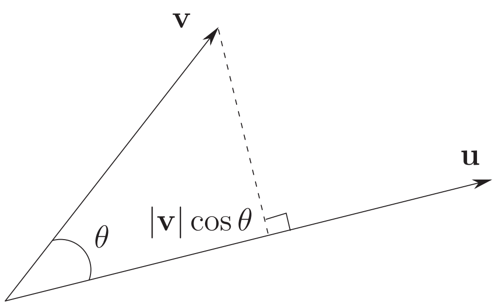
Lösning 2. Vi angriper problemet genom att införa en ny ortonormerad bas $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2})$, där $\mathbf{f_1}$ pekar i samma riktning som $\mathbf{s}$ och $\mathbf{f_2}$ i den ortogonala riktningen $(-2,5)$. $\big($$(5,2)$ och $(-2,5)$ är vinkelräta. Kontrollera det genom att använda Pythagoras sats på triangeln $(0,0), (5,2), (-2,5)$. Vi skall strax se hur skalärprodukten kan användas för att se att $(5,2)$ och $(-2,5)$ är vinkelräta.$\big)$ Vi normaliserar vektorerna $(5,2)$ och $(-2,5)$ och sätter $\mathbf{f_1} = (5,2)/\sqrt{29}$ och $\mathbf{f_2} = (-2,5)/\sqrt{29}$. I denna bas är $(5,2)_e = \sqrt{29}\,\mathbf{f_1} = (\sqrt{29},0)_f$. Här betecknar $(x,y)_e$ koordinaterna i den ursprungliga basen och $(x,y)_f$ koordinaterna i den nya. Om$(x,y)_f$ är koordinaterna för $(3,3)_e$ så gäller $(3,3)_e = (x,y)_f = x\,\mathbf{f_1} + y\,\mathbf{f_2} = (5x-2y, 2x+5y)_e/\sqrt{29}$. (Rita figur!) Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3\sqrt{29} \\ 2x + 5y = 3\sqrt{29}\,. \end{cases}$$

Om vi multiplicerar den första ekvationen med 5 och den andra med 2 och adderar får vi $29x = 21\sqrt{29}$ eller $x = 21/\sqrt{29}$. Så (Varför?) $W = x|\mathbf{s}| = 21/\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} = 21$.

$\square$

Efter dessa preludier är det dags att definiera skalärprodukten mellan två vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Med *vinkeln* θ mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, båda skilda från $\mathbf{0}$, menas den minsta vinkel som bildas då $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de börjar i samma punkt.



Definition 4.1. Skalärprodukten *av vektorerna* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta\,,$$

där θ *är vinkeln mellan* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Om $\mathbf{u}$ *eller* $\mathbf{v}$ *är* $\mathbf{0}$ *så är* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Observera att definitionen är gjord så att $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ i förra exemplet.

Räkneregler.
(1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (*kommutativitet*),
(2) $(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
(3) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (*distributivitet*),
(4) $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$,
(5) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta.

Du bör själv övertyga dig om att (1),(2),(4) och (5) gäller. Jag återkommer till (3) i slutet av paragrafen. $\square$

För att praktiskt räkna med skalärprodukt behöver vi veta vad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ blir i koordinater. För att uttrycket skall bli enkelt antar vi att basen är ortonormerad.

Sats 4.2. *Låt* $\mathbf{u} = (x, y, z)$ *och* $\mathbf{v} = (x', y', z')$ *i ett ortonormerat koordinatsystem. Då gäller*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = xx' + yy' + zz' \,.$$

I $\mathbb{R}^2$ *gäller* $(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$.

Bevis. Eftersom basen är ortonormerad gäller $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Så

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \cdot (x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3) \\
&= xx'\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + yy'\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + zz'\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \\
&+ (xy' + yx')\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + (xz' + x'z)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + (yz' + y'z)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\
&= xx' + yy' + zz' \,.
\end{aligned}$$

■

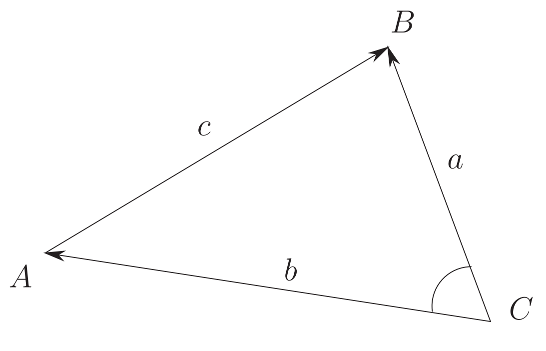
Exempel 4.2. (Fortsättning.)
Lösning 3. Vi har $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = (3, 3) \cdot (5, 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 21$. □

Exempel 4.3. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, -2)$.
Lösning. Vi har $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2^2) + 1^2 + (-2)^2} = 3$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(-2) + 2 \cdot 1 + 2(-2) = -4$. Eftersom $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$ får vi $\cos\theta = -4/(3 \cdot 3) \approx -0,4444$ och $\theta \approx 116,4°$.

□

Exempel 4.4. I Exempel 4.2, Lösning 2 använde vi att vektorerna $(5, 2)$ och $(-2, 5)$ är vinkelräta. Med hjälp av skalärprodukt ser vi detta genast eftersom $(5, 2) \cdot (-2, 5) = 5(-2) + 2 \cdot 5 = 0$. □

Exempel 4.5. Cosinusatsen.
I en triangel gäller $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

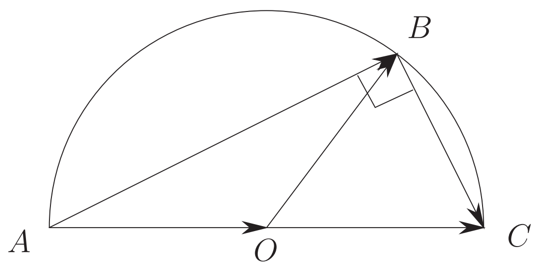


Bevis. Eftersom $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ och $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}= ab\cos C$ så är

$$\begin{aligned} c^2 &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}= (\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA} \\ &= a^2-2ab\cos C+b^2\,. \end{aligned}$$

□

Exempel 4.6. Periferivinkeln i en halvcirkel är rät.



Bevis. Vi skall visa att $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}= 0$. Men $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ och $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$. Så

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

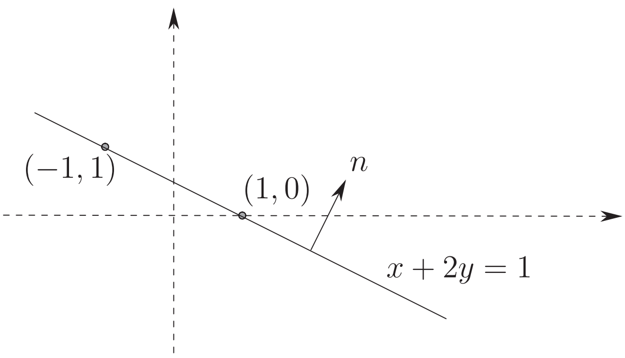
$$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}\,.$$

Eftersom $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ får vi om cirkelns radie är R

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}= R^2-R^2=0\,.$$

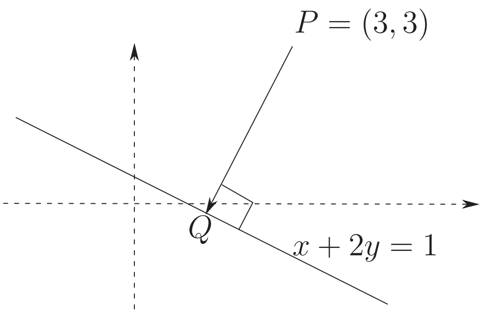
□

Exempel 4.7. Bestäm en normalvektor till linjen $x + 2y = 1$.
(En normalvektor är en vektor som är vinkelrät mot linjen.)



Lösning. Punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 1)$ ligger på linjen, så $\mathbf{v} = (1, 0) - (-1, 1) = (2, -1)$ är en riktningsvektor till linjen. Men om $\mathbf{n} = (1, 2)$ är $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = (1, 2) \cdot (2, -1) = 2 - 2 = 0$, så $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta. Alltså är $\mathbf{n} = (1, 2)$ en normalvektor. $\square$

Exempel 4.8. Bestäm avståndet från punkten $(3, 3)$ till linjen $x + 2y = 1$.
Lösning. Med avståndet d från en punkt P till en linje menas det kortaste av avstånden $|P - Q|$ då Q ligger på linjen. Detta antas då $\overrightarrow{PQ}$ är vinkelrät mot linjen. (Varför?)

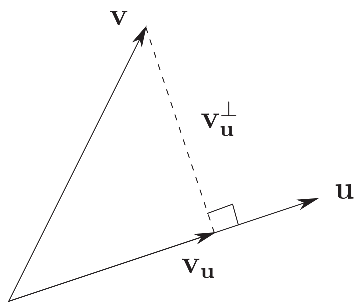


Enligt förra exemplet är $(1, 2)$ vinkelrät mot linjen så $\overrightarrow{PQ} = t(1, 2)$ för något t. Men $Q = P + \overrightarrow{PQ} = (3+t, 3+2t)$ som ligger på linjen om $(3+t)+2(3+2t) = 1$, dvs. om $t = -8/5$. Så $\overrightarrow{PQ} = -8/5(1, 2)$ och $d = |\ \overrightarrow{PQ}\ | = \frac{8}{5}\sqrt{1+4} = 8/\sqrt{5} \approx 3,13$.

Punkten Q kallas för *ortogonala projektionen* av P med avseende på linjen $x + 2y = 1$. $\square$

Ortogonal projektion.

Vi skall nu diskutera hur man kan dela upp en vektor $\mathbf{v}$ i två komponenter; $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_u^\perp}$; där $\mathbf{v_u}$ är parallell med en given vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v_u^\perp}$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$.



$\mathbf{v_u}$ kallas för $\mathbf{v}$:s *ortogonala projektion* på $\mathbf{u}$.

Om $\mathbf{v_u}$ är parallell med $\mathbf{u}$ så är $\mathbf{v_u} = t\mathbf{u}$, och genom att skalärmultiplicera båda leden i $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_u^\perp}$ med $\mathbf{u}$ får vi

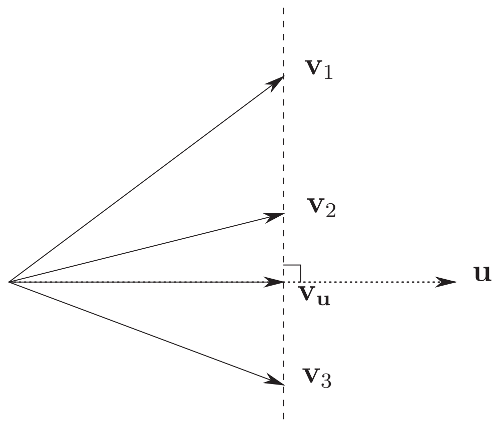
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u^\perp} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u} = t\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = t|\mathbf{u}|^2 \,.$$

Så $t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/|\mathbf{u}|^2$ och

$$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2}\, \mathbf{u} \,. \tag{4.1}$$

Skriver vi nu $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + (\mathbf{v} - \mathbf{v_u})$ har vi den önskade uppdelningen eftersom $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v_u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

En viktig egenskap hos $\mathbf{v_u}$ är att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u}$.



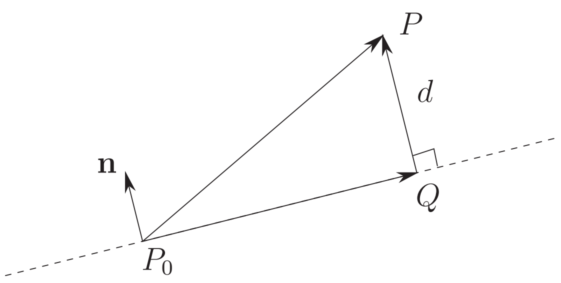
I figuren ovan är alla skalärprodukter $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i$ lika och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u}$ för alla i.

Exempel 4.9. Om $\mathbf{v} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ i en ortonormerad bas så är $x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1$, $y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2$ och $z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3$.
Bevis av den första likheten. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1$
$= x\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = x.$ □

Exempel 4.10. Avståndsformeln.
Avståndet d från punkten $P = (x, y)$ till linjen $ax + by = c$ ges av

$$d = \frac{|ax + by - c|}{|(a, b)|}.$$

Bevis. Låt $P_0 = (x_0, y_0)$ vara en godtycklig punkt på linjen och Q ortogonala projektionen av P på linjen. Vektorn $\mathbf{n} = (a, b)$ är en normalvektor till linjen, jämför Exempel 4.7 och Övning 4.10.



Avståndet till linjen är $d = |\overrightarrow{QP}|$. Men $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{P_0P}_{\mathbf{n}}$, $\overrightarrow{P_0P}$:s ortogonala projektion på $\mathbf{n}$. Eftersom $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$ ger (4.1)

$$d = |\overrightarrow{P_0P}_{\mathbf{n}}| = \left| \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} \right| = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax + by - c|}{|(a, b)|},$$

eftersom $ax_0 + by_0 = c$. (P_0 ligger på linjen.)

Tillämpar vi detta på Exempel 4.8 får vi

$$d = \frac{|3 + 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

□

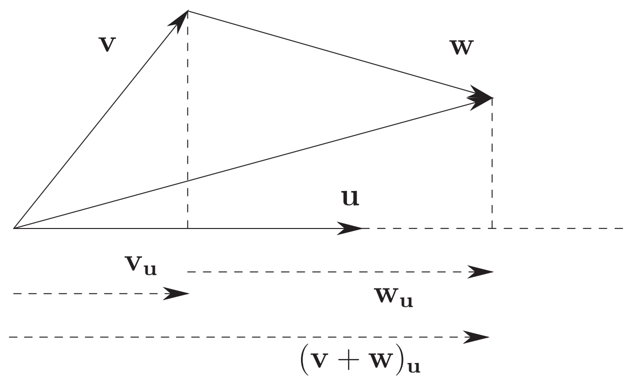
Vi avslutar den här paragrafen med att visa distributiva lagen för skalärprodukt:
Med hjälp av ortogonal projektion kan vi reducera distributiva lagen för

skalärprodukt till den för reella tal. Vi har $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})_{\mathbf{u}}$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{u}}$, så det räcker att visa att

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})_{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}} \tag{4.2}$$

och

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{u}}\,. \tag{4.3}$$



För att se att (4.2) gäller skriver vi $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\perp} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{\perp} = (\mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}) + (\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\perp} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{\perp})$. Men eftersom $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}$ och $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}$ båda är parallella med $\mathbf{u}$ är $\mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}$ det också. På samma sätt är $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\perp} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{\perp}$ vinkelrät mot $\mathbf{u}$. Detta bevisar (4.2).

För att bevisa (4.3) observerar vi att vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}$ och $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}$ är parallella så påståendet är väsentligen distributiva lagen för reella tal. Mer precist om vi låter s och t uppfylla $\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = s\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}_{\mathbf{u}} = t\mathbf{u}$ så gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}) &= \mathbf{u} \cdot (s\mathbf{u} + t\mathbf{u}) = (s+t)|\mathbf{u}|^2 = s|\mathbf{u}|^2 + t|\mathbf{u}|^2 \\ &= \mathbf{u} \cdot s\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot t\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{u}}\,. \end{aligned}$$

■

Övning 4.1. Vilka av följande par av vektorer är ortogonala?
(a) $(-1, 2, 2)$, $(2, 2, -1)$, (b) $(2, 1, 1)$, $(2, 1, -5)$ och (c) $(1, 1, 1)$, $(2, -1, -1)$.

Övning 4.2. Bestäm vinkeln mellan vektorerna (a) $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$,
(b) $\mathbf{u} = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 4)$ och (c) $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$.

Övning 4.3. Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{2b} - \mathbf{a}$ då $\mathbf{a} = (2, -3, 4)$ och $\mathbf{b} = (3, 4, 0)$.

Övning 4.4. Bestäm en vektor som är vinkelrät mot
(a) $(2, -3)$, (b) (a, b), och (c) $(3, 4, -2)$.

Övning 4.5. Bestäm t så att vektorerna $(t, 2t^2, 3t)$ och $(-1, 1, t)$ blir vinkelräta.

Övning 4.6. En triangel har hörnen $(2, 1, 3)$, $(-1, 4, 2)$ och $(0, 6, 5)$. Är triangeln rätvinklig?

Övning 4.7. Kraften $(3, -4, 2)$ verkar på en kropp som rör sig rätlinjigt från punkten $(-1, 3, 2)$ till

(a) $(1, 4, 5)$, (b) $(-3, 2, 3)$ och (c) (0,5,3).

Beräkna ändringen i partikelns rörelseenergi.

Övning 4.8. Visa att $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Övning 4.9. (a) Bestäm avståndet från punkten $(1, 2)$ till linjen $y = 5$.
(b) Bestäm avståndet från punkten $(1, 2)$ till linjen $x + y = 5$.

Övning 4.10. Visa att (a, b) är en normalvektor till linjen $ax + by = c$.

Övning 4.11. Vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ har längderna 3, 4 och 2. Hur stor är vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$?

Övning 4.12. Låt $\mathbf{u}$ vara en fix vektor med $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och antag att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\,.$$

Måste $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Motivera ditt svar!

Övning 4.13. Antag att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

för alla $\mathbf{u}$. Måste $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Motivera ditt svar!

Övning 4.14. Två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ har längderna 2 respektive 3 och vinkeln mellan dem är $60°$. Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{a}$ på $\mathbf{b}$ och tvärtom.

Övning 4.15. Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har samma längd. Vad kan du säga om $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$?

Övning 4.16. Visa att en triangels höjder skär varandra i en punkt.

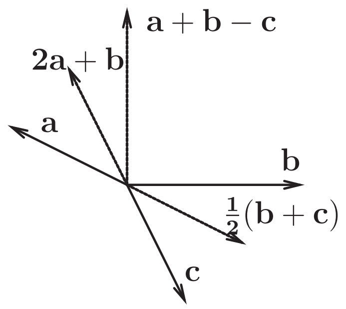
Övning 4.17. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{u}'$ vara parallella (och ingen $\mathbf{0}$). Visa att då gäller $\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_{\mathbf{u}'}$.

Övning 4.18. Ange en ortogonalbas i $\mathbb{R}^3$ som innehåller vektorn $(1, 2, 3)$. Bestäm sedan koordinaterna i denna bas för den vektor som har standardkoordinaterna $(1, 1, 1)$.

9. Förslag till svar

Kapitel 2

1.



2. (a)&(b) $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, (c) $\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$, (d) $-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$, (e) $-\mathbf{e}_1$

3. (a) Med farten $\sqrt{40}$ m/s i riktning $341,6°$, (b) $19,5°$ 7. (b) 3

Kapitel 3

1. $(2,2)$ 2. $(1,1)$ 4. $(-1,3)$ 5. $(1,-1,2)$ 6. $(-8,7,-9)$
7. $a=-4$ 8. (a) 0 eller 2„ (b) 1, (c) 0 eller 3 9. $\mathbf{u}=\pm\frac{1}{3}(-1,2,2)$
10. (a) $\sqrt{14}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 3
11. (a) $6\sqrt{3}$ N i riktningen $(1,1,1)$, (b) $8,70$ N i $28,3^{\cdot}$ med avseende på ö-axeln
13. $(5,7)$ 14. $\overrightarrow{AB}=(2,3,4), BC=(-1,-14,-12), \overrightarrow{CA}=(-1,11,8)$
15. (a) $(2,1,1)$, (b) $1/2(x+x_1, y+y_1, z+z_1)$ 16. $(5/2,3,7/2)$
17. $(2,1,2)$ 18. $\sqrt{2}$ i alla tre fallen 19. Sidorna är $2\sqrt{2}$.
20. $(3,-2)$, $(1,-4)$ eller $(-1,4)$ 21. Ja 22. $(1,5/2,7/2),(3/2,5/2,4),(3/2,3,9/2)$

Kapitel 4

1. Alla är ortogonala 2. (a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) $\arccos(5/7)$ 3. $128°$
4. T.ex. (a) $(3,2)$, (b) $(b,-a)$ och (c) $(0,1,2)$ 5. 0 och $1/5$,
6. Ja, vinkeln vid $(-1,4,2)$ är rät.
7. (a) 8 joule, (b) 0 joule, och (c) -3 joule 9. (a) 3 (b) $\sqrt{2}$ 11. $151°$
12. Nej 13. Ja 14. (a) $1/3\,\mathbf{b}$, (b) $3/4\,\mathbf{a}$ 15. De är vinkelräta
18. T.ex. $\mathbf{e}_1=(1,2,3)$, $\mathbf{e}_2=(2,-1,0)$ och $\mathbf{e}_3=(3,6,-5)$.
$(1,1,1)$ har koordinaterna $(3/7,1/5,2/35)$