

NBAM00: Naturvetenskapligt basår – Matematik, del 1

Några exempel på tentauppgifter

Gränsvärden

Beräkna

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8x+4} - 2\sqrt{x+1}}{x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + x^2}{\sin x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 10x^8}{x^3 - 5x^8}$$

Absolutbelopp

(a) Lös ekvationen

$$|x| = |x - 2|.$$

Anm.: Du får gärna utnyttja den geometriska tolkningen av absolutbeloppet för att lösa ekvationen.

(b) Lös olikheten

$$|x| - |x - 2| \geq 1.$$

Teoretiska frågor

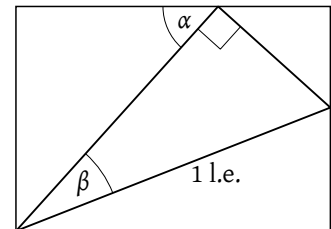
Uppgift 1. Utgå från figuren till höger för att bevisa formlerna

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

och

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

förutsatt att vinklarna α, β samt $(\alpha - \beta)$ har storleken mellan 0 och $\pi/2$.

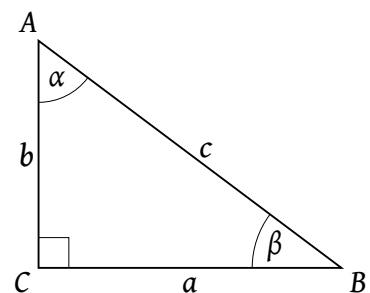


Uppgift 2. Låt $\triangle ABC$ vara en rätvinklig triangel med rät vinkel vid hörnet C . Låt a, b och c beteckna triangelns sidolängder som vanligt (se figuren till höger).

(a) Definiera $\sin \alpha, \cos \alpha$ samt $\tan \beta$ uttryckta med hjälp av a, b och/eller c .

(b) Bevisa att det i denna triangel gäller att $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

(c) Utnyttja identiteten i (b) för att bevisa $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.



Svar

Gränsvärden

- (a) 1 (b) $\frac{5}{3}$ (c) 3 (d) 0 (e) 2

Absolutbeloppet

- (a) $x = 1$ (b) $x \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

Teoretiska frågor

Uppgift 2.

(a)

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a}.$$

(b)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \left/ \text{Pythagoras sats ger att } a^2 + b^2 = c^2 \right/ = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

(c) Dela båda leden av triggettan med $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{V.S.B.}$$