NBAM00 Naturvetenskapligt basår, Matematik del 2, 2017-01-10.

1a) $\int\left(\frac{2}{x} + 6\cos 2x\right)dx = 2\ln|x| + 3\sin 2x + C$

b) $f(x) = \sin(\cos 2x)$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos(\cos 2x)\cdot(-\sin 2x)\cdot 2$

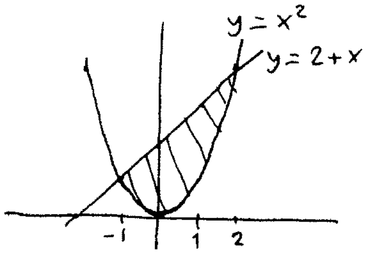
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = \cos 0\cdot(-1)\cdot 2 = -2$ riktn.koeff.

Tangentens ekvation är:

$y - 0 = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ dvs. $y = -2x + \frac{\pi}{2}$

2) Kurvorna $y = x^2$ och $y = 2 + x$ skär varandra då $x^2 = 2 + x$, "dvs." $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

dvs. då $x = -1$ resp. $x = 2$. Figur:

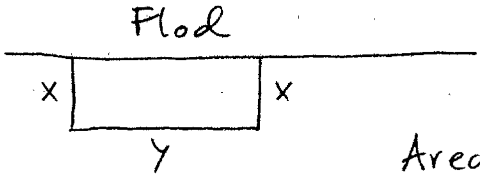


Arean av området (strecket) är

$\int_{-1}^{2}(2 + x - x^2)\,dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} =$

$= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 8 - \frac{1}{2} - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

3)



$2x + y = 100$, dvs.

$y = 100 - 2x \quad (0 \le x \le 50)$

Arean $A = xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

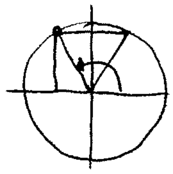
$A'(x) = 100 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 25$

		25	
$A'(x)$	+	0	−
$A(x)$	↗		↘

$A_{max} = A(25) = 25(100 - 50) = 1.250$ (a.e.)

∴ Största möjliga arean är $1.250\ m^2$

4a) $4e^{i2\pi/3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{-2+2\sqrt{3}\,i}$



b) $z^2-(3+i)z+4+3i=0 \iff \left(z-\left(\frac{3+i}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{3+i}{2}\right)^2+4+3i=0 \iff$

$\underbrace{\left(z-\left(\frac{3+i}{2}\right)\right)^2} = \left(\frac{3+i}{2}\right)^2-4-3i = \frac{9+6i-1}{4}-4-3i = \underbrace{-2-\frac{3}{2}i}$ ⊛

Ansätt $z-\left(\frac{3+i}{2}\right) = u+iv$. Ekvationen ⊛ blir då

$(u+iv)^2 = u^2+2uvi+i^2v^2 = -2-\frac{3}{2}i \iff u^2-v^2+2uvi = -2-\frac{3}{2}i$

$\iff \begin{cases} u^2-v^2=-2\\ 2uv=-3/2\end{cases} \iff \begin{cases}u^2-v^2=-2\\ v=-\frac{3}{4u}\end{cases}\iff \begin{cases}u^2-\frac{9}{16u^2}=-2\\ v=-3/4u\end{cases}$

$u^2-\frac{9}{16u^2}=-2 \iff u^4-\frac{9}{16}=-2u^2 \iff u^4+2u^2-\frac{9}{16}=0\iff$

[Sätt $u^2=t$] $\iff t^2+2t-\frac{9}{16}=0 \iff t=-1\pm\sqrt{1+\frac{9}{16}} = -1\pm\sqrt{\frac{25}{16}} \iff$

$\iff t=-1\pm\frac{5}{4} = \begin{cases}1/4\\ -9/4 \leftarrow \text{ORIMLIG, ty } t=u^2\geq 0\end{cases}$

$t=\frac{1}{4}$, dvs. $u^2=\frac{1}{4}$ vilket ger $u=\pm\frac{1}{2}$.

Vi får två lösningar:

$u_1=\frac{1}{2},\ v_1=-\frac{3}{4/2}=-\frac{3}{2}$; $\underline{\underline{z_1}} = \frac{3+i}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i = \underline{\underline{2-i}}$

$u_2=-\frac{1}{2},\ v_2=+\frac{3}{4/2}=\frac{3}{2}$; $\underline{\underline{z_2}}=\frac{3+i}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i = \underline{\underline{1+2i}}$

5) $f(x)=\frac{x^2}{4-x^2} = \frac{1}{4/x^2-1} \to -1$ då $x\to\infty$ resp $x\to-\infty$

∴ $y=-1$ är vågrät as. då $x\to\pm\infty$.

$f'(x) = \frac{2x(4-x^2)-x^2(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8x-2x^3+2x^3}{(4-x^2)^2} = \frac{8x}{(4-x^2)^2}=0 \iff x=0$

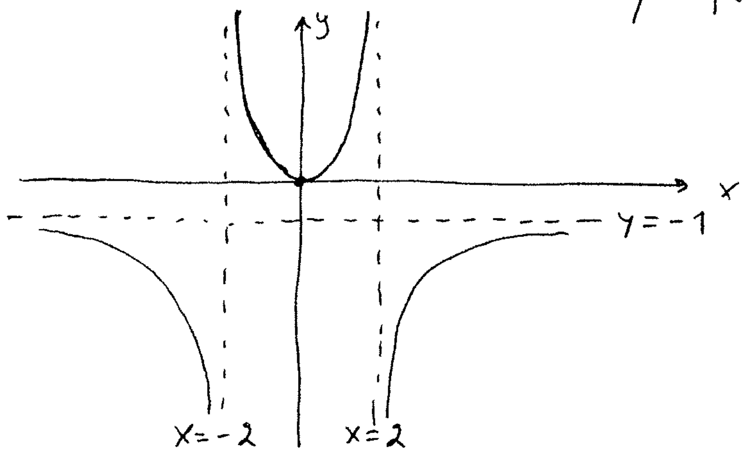
		-2		0		2	
$f'(x)$	$-$	≀	$-$	0	$+$	≀	$+$
$f(x)$	↘	≀	↘		↗	≀	↗

$f(x)$ är ej def. då $x^2=4$, dvs $x=\pm 2$

f har lok. min. i $x=0$; $f(0)=0$

$f(x)=\frac{x^2}{4-x^2} \to \begin{cases}-\infty & \text{då } x\to(-2)^-\\ +\infty & \text{då } x\to(-2)^+\\ +\infty & \text{då } x\to 2^-\\ -\infty & \text{då } x\to 2^+\end{cases}$ ∴ f har lodräta asympt: $x=-2$ och $x=2$

forts 5) Vi kan nu rita kurvan $y = f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$



6) $y' + 3x^2 y = e^{-x^3}$. Integrerande faktor är e^{x^3}, ty $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$.

$y' + 3x^2 y = e^{-x^3} \iff y' e^{x^3} + 3x^2 e^{x^3} y = e^{-x^3} e^{x^3} \iff$

$\frac{d}{dx}\left(y e^{x^3}\right) = 1 \iff y e^{x^3} = x + C \iff \underline{y = (x+C)e^{-x^3}}$

Detta är allmän lösning.

$y(0) = 1$ ger $1 = Ce^0 = C$, dvs $C = 1$, dvs. $\underline{y = (x+1)e^{-x^3}}$

7) Visa $2\sin x + \tan x > 3x$ för $0 < x < \pi/2$

Sätt $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$. Visa $f(x) > 0$ då $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Vi har $f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = 0 \iff (\cos x \neq 0)$

$2\cos^3 x + 1 - 3\cos^2 x = 0 \iff 2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1 = 0$

[Sätt $\cos x = t$] $\iff 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0$.

Vi ser att $t = 1$ är en lösning och polynomdiv. ger

$(2t^3 - 3t^2 + 1) = (t-1)(2t^2 - t - 1)$ och

$2t^2 - t - 1 = 0 \iff t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = 0 \iff t = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

$2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1 = 0$ har alltså lösningarna

$\cos x = t = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$ men detta gäller <u>inte</u> för något $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Alltså gäller att $f'(x)$ inte växlar tecken i $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Eftersom $f'(\frac{\pi}{4}) = 2\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} - 3 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1/2} - 3 =$

$= \sqrt{2} + 2 - 3 > 1 + 2 - 3 = 0$ gäller att

f är (str.) växande på $]0, \frac{\pi}{2}[$ och $f(x) > f(0) = 0$ för

alla $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ VSB.