2017-02-25 NBAM00 Naturvetenskapligt basår, Matematik del 2

1a) $\int \frac{2}{\sqrt{x}} - \sin 3x \, dx = 4\sqrt{x} + \frac{\cos 3x}{3} + C$

b) $f'(x) = \frac{(\cos x + e^{2x} + 2xe^{2x})x^2 - 2x(\sin x + x e^{2x})}{x^4} =$

$= \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x + x^2 e^{2x}(1 + 2x - 2)}{x^4} =$

$= \frac{x \cos x - 2 \sin x + x e^{2x}(2x - 1)}{x^3}$

2a) $f(x) = \ln(\cos x)$. Vi har $f(\frac{\pi}{4}) = \ln(\cos\frac{\pi}{4}) = \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\ln\sqrt{2}$
så punkten på kurvan är $(\frac{\pi}{4}, -\ln\sqrt{2})$.
$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$, så $f'(\frac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ vilket är riktningskoefficienten för tangenten. Tangentens ekvation är: $y + \ln\sqrt{2} = -1(x - \frac{\pi}{4}) = -x + \frac{\pi}{4}$, dvs.

$y = -x + \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$

b) $f''(x) = \frac{d}{dx}(-\tan x) = -(1 + \tan^2 x)$. Vi får nu
$f''(x) - f'(x)\tan x = -1 - \tan^2 x + \tan x \cdot \tan x = -1$.
Med $a = -1$ är alltså f en lösning till diffekvatione

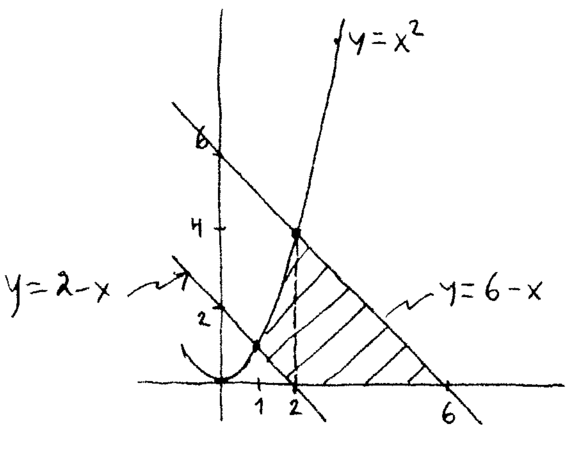
3) Vi börjar med att beräkna skärningspunkter:

$x^2 = 2 - x \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm$

$\iff \underline{x = 1}$ eller $x = -2$ (ointressant då $x > 0$)

$x^2 = 6 - x \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\iff \underline{x = 2}$ eller $x = -3$ (ointressant då $x > 0$)



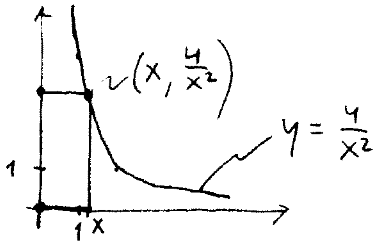
Det sökta området är det streckade i figuren. Arean får delas upp i två delar och ges av ...

fonts. 3) $A = \int_1^2 x^2 - (2-x)\,dx + \int_2^6 6-x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_2^6 =$

$= \frac{8}{3} - 4 + 2 - \left(\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2}\right) + 36 - 18 - (12 - 2) = 8 + \frac{7}{3} - \frac{1}{2} =$

$= 8 + \frac{11}{6} = \frac{59}{6}$ (a.e.)

4)



Omkretsen av en rektangel är $f(x) = 2x + 2\left(\frac{4}{x^2}\right) = 2x + \frac{8}{x^2}$ vilket ger

$f'(x) = 2 - \frac{16}{x^3} = 0 \iff x^3 = 8 \iff x = 2$

x	0		2	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Av teckenschemat framgår att f har min. i $x = 2$, så

$f_{min} = f(2) = 4 + \frac{8}{4} = 6$

$\therefore$ Minsta omkretsen är 6 l.e.

5a) $(1+i)^{100} = \left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^{100} = 2^{50}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100} =$ (de Moivre)

$= 2^{50}\left(\cos\frac{100\pi}{4} + i\sin\frac{100\pi}{4}\right) = 2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi) =$

$= 2^{50}(-1 + i\,0) = \underline{\underline{-2^{50}}}$

b) $z^2 - 2iz - 1 + 8i = 0 \iff (z-i)^2 - (i)^2 - 1 + 8i = 0 \iff$

$(z-i)^2 = -8i$. [Ansätt $z - i = u + iv$] $\iff$

$(u+iv)^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = -8i \iff \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ 2uv = -8 \end{cases}$

$u^2 - v^2 = 0$ ger $v = \pm u$. Insatt i $2uv = -8$ får vi

$2u(\pm u) = \pm 2u^2 = -8$ som ger att "+" är orimligt.

$-2u^2 = -8 \iff u^2 = 4 \iff u = \pm 2$. Vi har alltså

lösningarna $u_1 = 2,\ v_1 = -2$ och $u_2 = -2,\ v_2 = 2$,

vilket ger lösningarna z_1 och z_2 till ekvationen, enl:

$z_1 = i + u_1 + iv_1 = i + 2 - 2i = 2 - i$

$z_2 = i + u_2 + iv_2 = i - 2 + 2i = -2 + 3i$

5c) Kontroll av lösningarna:

$z_1^2 - 2iz_1 - 1 + 8i = (2-i)^2 - 2i(2-i) - 1 + 8i =$

$= 4 - 4i + i^2 - 4i + 2i^2 - 1 + 8i = 4 - 1 - 2 - 1 - 4i - 4i + 8i = 0$ OK

$z_2^2 - 2iz_2 - 1 + 8i = (-2+3i)^2 - 2i(-2+3i) - 1 + 8i =$

$= 4 - 12i + 9i^2 + 4i - 6i^2 - 1 + 8i = 4 - 9 + 6 - 1 - 12i + 4i + 8i = 0$ ok

6) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}$

a) Definitionsmängden för f är alla reella tal utom $x=3, x=-3$

dvs. $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 3,\ x \neq -3\}$.

För $x \in D_f$ gäller $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ (förkorta faktorn $(x-3)$)

så $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2} < 0$ för alla $x \in D_f$.

x		-3		3	
$f'(x)$	$-$	$\wr$	$-$	$\wr$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$

f är alltså avtagande på intervallen $]-\infty, -3[$, $]-3, 3[$ och $]3, \infty[$

b) Av teckenschemat framgår att f saknar lokala extrempunkter.

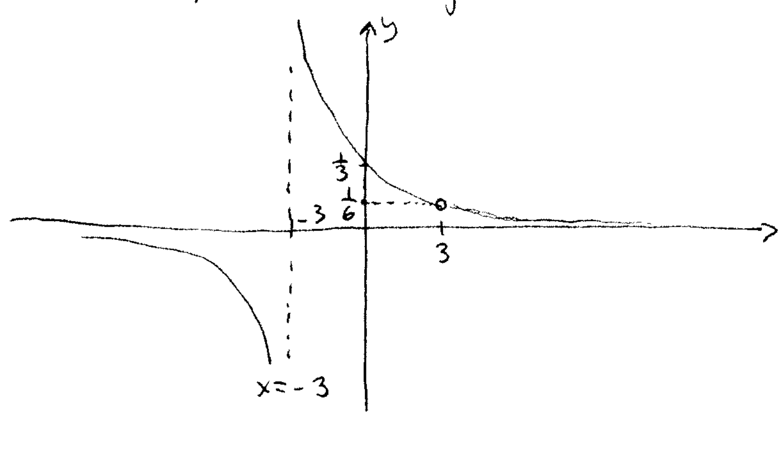
c) För $x \in D_f$ har vi $f(x) = \dfrac{1}{x+3} \to \begin{cases} +\infty & \text{då } x \to (-3)^+ \\ -\infty & \text{då } x \to (-3)^- \end{cases}$

vilket visar att $x = -3$ är en lodrät asymptot till kurvan $y = f(x)$. Observera att $x = 3$ inte är lodrät asymptot, ty $f(x) = \dfrac{1}{x+3} \to \dfrac{1}{6}$ då $x \to 3$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+3} \to 0$ då $x \to +\infty$ resp. $x \to -\infty$

Alltså är $y = 0$ en vågrät as. både i $+\infty$ och $-\infty$.

e)



7) $f(a) = \int_0^1 (ae^{ax} - a)\,dx = \left[e^{ax} - ax \right]_0^1 = e^a - a - 1$

$f'(a) = e^a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

	-1		0		1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Av teckenschemat framgår att $f(a)$ antar sitt minsta värde i $a=0$, dvs.

$f_{min} = f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

Det största värdet antas i $a=-1$ eller $a=1$. Vi har

$f(-1) = e^{-1} + 1 - 1 = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, ty $e > 2$

$f(1) = e - 1 - 1 = e - 2 > \frac{1}{2}$, ty $e > 2{,}7$

Största värdet antas alltså i $a = 1$ och

$f_{max} = f(1) = e - 2$