NBAM00 Naturv. basår, Matematik del 2, 2018-06-08

1a) $f(x) = \dfrac{1 + x^2 \cos x}{x^3}$,

$$f'(x) = \frac{(2x\cos x - x^2 \sin x)x^3 - 3x^2(1 + x^2\cos x)}{x^6} =$$

$$= \frac{(2x\cos x - x^2\sin x)x - 3(1+x^2\cos x)}{x^4} =$$

$$= \frac{-x^2\cos x - x^3 \sin x - 3}{x^4}$$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + 3x^{-3/2}\right) dx = \ln|x| + 3\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C$

$= \ln|x| - 6x^{-1/2} + C = \ln|x| - \dfrac{6}{\sqrt{x}} + C$

2) $y = \ln(\sin x)$, $x_0 = \pi/6$. Sätt $f(x) = \ln(\sin x)$.

Då $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ så $f'(x_0) = \dfrac{\cos \pi/6}{\sin \pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

och $f(x_0) = \ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

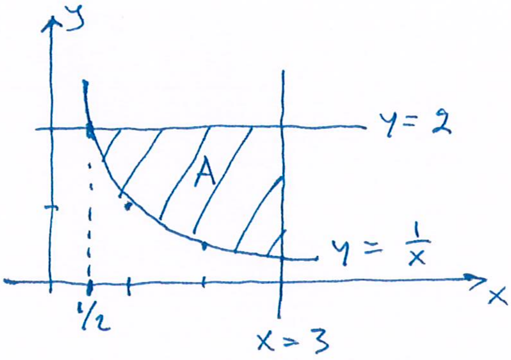
Tangentens ekvation ges av:

$$y - (-\ln 2) = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \iff \underline{y = \sqrt{3}\,x - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \ln 2}$$

Normalens ekvation:

$$y - (-\ln 2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \iff \underline{y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \ln 2}$$

3)



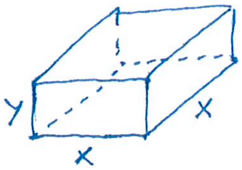
$y = \dfrac{1}{x} = 2 \iff x = \dfrac{1}{2}$

$$A = \int_{1/2}^{3} \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \Big[2x - \ln x\Big]_{1/2}^{3} =$$

$$= 6 - \ln 3 - \left(1 - \ln\frac{1}{2}\right) = 5 - \ln 3 + \ln\frac{1}{2} =$$

$$= 5 - \ln 3 - \ln 2 = 5 - (\ln 3 + \ln 2) = \underline{5 - \ln 6} \text{ (a.}$$

4) 

$$V = yx^2 = 4 \Rightarrow y = 4/x^2 \qquad (x>0)$$

(4 liter $= 4\ dm^3$; längdmått är dm)

Plåtarean $A = x^2 + 4xy = x^2 + 4x \cdot \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x}$

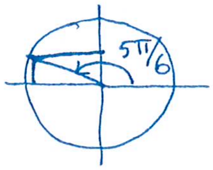
$$A' = 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} 2x^3 = 16 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow \underline{x = 2}$$

x	0		2	
A'		$-$	0	$+$
A		$\searrow$		$\nearrow$

Teckenschemat visar att Arean är som minst då $x = 2$

Lådans mått ska alltså vara bredd = djup = 2 dm och höjd $= \frac{4}{2^2} = 1$ dm. ∎

5a) $3e^{i5\pi/6} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) =$



$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

b) $z^2 - (5-i)z + 6 - 3i = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{(5-i)}{2}\right)^2 - \frac{(5-i)^2}{4} + 6 - 3i = 0$

$\Leftrightarrow \left(z - \frac{(5-i)}{2}\right)^2 = \frac{25-10i-1}{4} - 6 + 3i = \left(3 - \frac{10}{4}\right)i = \frac{1}{2}i$

Ansätt $z - \left(\frac{5-i}{2}\right) = u + iv$. Då blir ekvationen:

$u^2 - v^2 + 2iuv = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ +2uv = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 0 \\ v = \frac{1}{4u} \end{cases}$

$u^2 - v^2 = u^2 - \frac{1}{16u^2} = 0 \Leftrightarrow u^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow u^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$u = \pm 1/2 \quad \therefore \quad u_1 = 1/2,\ v_1 = 1/2 \ ; \quad u_2 = -\frac{1}{2} = v_2$

Vi får lösningarna

$$\underline{\underline{z_1}} = \frac{5-i}{2} + u_1 + iv_1 = \frac{5-i}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \underline{\underline{3}}$$

$$\underline{\underline{z_2}} = \frac{5-i}{2} + u_2 + iv_2 = \frac{5-i}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = \underline{\underline{2-i}}$$

6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$ $\qquad D_f = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \neq \pm 3\}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-9) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-18x}{(x^2-9)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x		-3		0		3	
$f'(x)$	$+$	ξ	$+$	0	$-$	ξ	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

f är växande på $]-\infty, -3[$ & $]-3, 0]$

f är avt. på $[0, 3[$ & $]3, \infty[$

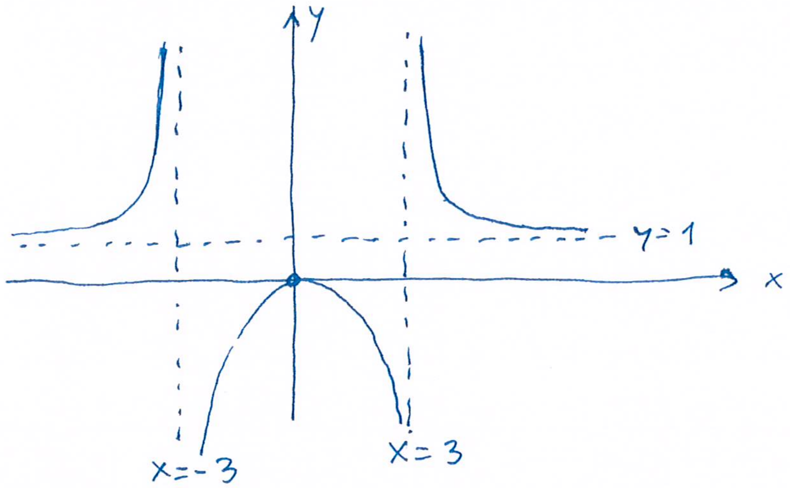
c) f har lokalt max. i $x = 0$; $\quad f(0) = 0$

d) f har lodräta as: $x = -3$ och $x = 3$, ty

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-9} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{då } x \to (-3)^- \\ -\infty & \text{då } x \to (-3)^+ \\ -\infty & \text{då } x \to 3^- \\ +\infty & \text{då } x \to 3^+ \end{cases}$$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9} = \dfrac{1}{1 - 9/x^2} \to 1$ då $x \to \pm\infty$ $\therefore$ $\underline{y = 1}$ är vågrät as. både då $x \to \infty$ & $x \to -\infty$

f)



7) $f(a) = \int_0^a \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\sin x + \frac{x}{2}\right]_0^a = \sin a + \frac{a}{2}$

$f'(a) = \cos a + \frac{1}{2} = 0 \iff \cos a = -\frac{1}{2} \iff a = \frac{2\pi}{3}$ el. $a = \frac{4\pi}{3}$

$0 \le a \le 2\pi$

a	0		$2\pi/3$		$4\pi/3$		2π
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Av teckenschemat framgår att f antar

- största värde i $a = \frac{2\pi}{3}$ eller $a = 2\pi$
- minsta värde i $a = 0$ eller $a = 4\pi/3$

Vi har att

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} < 1 + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} < \pi = f(2\pi)$

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} > -1 + \frac{2\pi}{3} > -1 + 2 > 0 = f(0)$

Vilket ger att

största värdet till f är $f(2\pi) = \pi$ och

minsta värdet till f är $f(0) = 0$ $\boxtimes$