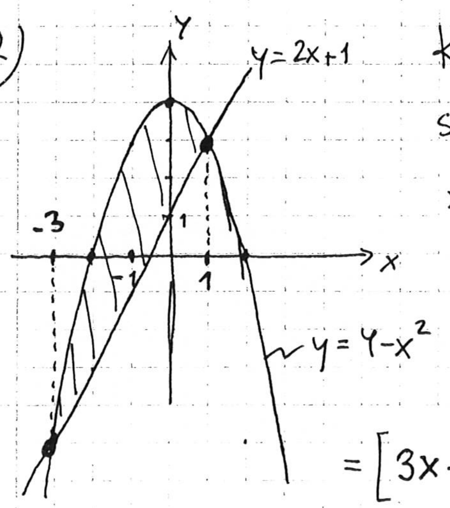
NBAMOO Naturvetenskapl. basår, Matematik del 2, 2018-01-09

1) $f(x) = \ln(3x^2-2x-1)$ ger $f(-1) = \ln(3+2-1) = \ln 4 = 2\ln 2$.
Punkten på kurvan är alltså $(-1, 2\ln 2)$. Vidare,
$f'(x) = \frac{6x-2}{3x^2-2x-1}$ ger $f'(-1) = \frac{-6-2}{3+2-1} = \frac{-8}{4} = -2$.

Riktningskoeff. för tangenten är $k_T = -2$ och för normalen $k_N = -\frac{1}{-2} = 1/2$. Ekvation för tangenten:
$y - 2\ln 2 = -2(x+1) = -2x-2$, dvs. $y = -2x-2+2\ln 2$
Ekv. för normalen: $y - 2\ln 2 = \frac{1}{2}(x+1)$, dvs. $y = \frac{x}{2}+\frac{1}{2}+2\ln 2$

2) 

Kurvorna $y=4-x^2$ och $y=2x+1$ skär varandra då $4-x^2=2x+1$, dvs.
$x^2+2x-3=0 \iff x=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2=\begin{cases}-3\\+1\end{cases}$
Arean av området (streckat) är
$\int_{-3}^{1} 4-x^2-(2x+1)\,dx = \int_{-3}^{1} 3-x^2-2x\,dx =$
$=\left[3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-3}^{1} = 3-\frac{1}{3}-1-\left(-9+3^2-3^2\right) =$
$= 2-\frac{1}{3}+9 = 11-\frac{1}{3} = \frac{32}{3}$ (a.e.).

3) $g(x)=\sqrt{10-(f(x))^2}$, Kedjeregeln 2 ggr. ger
$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{10-(f(x))^2}}\cdot(-1)\,2f(x)f'(x) = \frac{-f(x)f'(x)}{\sqrt{10-(f(x))^2}}$
och $g'(-2) = \frac{-f(-2)f'(-2)}{\sqrt{10-(f(-2))^2}} = \frac{-3\cdot 2}{\sqrt{10-3^2}} = \frac{-6}{\sqrt{1}} = -6$

4) $xy=49$ ger $y=49/x$. Sätt $f(x)=x+9\cdot\frac{49}{x}$. Då
$f'(x)=1-9\cdot 49/x^2 = 0 \iff x^2=9\cdot 49 \iff x = \underset{(-)}{+}3\cdot 7 = \underset{(-)}{+}21$

	0		21	
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘		↗

Av teckenschemat framgår att f har minimum för $x=21$ och $f(21) = 21+\frac{9\cdot 49}{21} = 42$ är minsta värdet.

5) a) $\dfrac{2+3i}{1-2i} + \dfrac{7}{2+i} = \dfrac{(2+3i)(1+2i)}{1+4} + \dfrac{7(2-i)}{4+1} = \dfrac{2+4i+3i-6+14-7i}{5} =$

$= \dfrac{10}{5} = 2$.

b) $z^2 - (3-i)z + 4 - 3i = 0 \iff \left(z - \left(\frac{3-i}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{3-i}{2}\right)^2 + 4 - 3i = 0$

$\iff \left(z - \left(\frac{3-i}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{3-i}{2}\right)^2 - 4 + 3i = \dfrac{9-6i-1}{4} - 4 + 3i = -2 + \frac{3}{2}i \quad (*)$

Ansätt $z - \left(\frac{3-i}{2}\right) = u + iv$. Ekvationen $(*)$ blir då

$(u+iv)^2 = u^2 + 2uvi - v^2 = -2 + \frac{3}{2}i \iff$ [identifiera real- o. imdel]

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = -2 \\ 2uv = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 - v^2 = -2 \\ v = \frac{3}{4u} \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 - \frac{9}{16u^2} = -2 \\ v = \frac{3}{4u} \end{cases}$$

$u^2 - \dfrac{9}{16u^2} = -2 \iff u^4 - \dfrac{9}{16} = -2u^2 \iff u^4 + 2u^2 - \dfrac{9}{16} = 0 \iff$

[sätt $u^2 = t$] $\iff t^2 + 2t - \frac{9}{16} = 0 \iff t = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = -1 \pm \sqrt{\frac{25}{16}} \iff$

$t = -1 \pm \frac{5}{4} = \begin{cases} 1/4 \\ -9/4 \leftarrow \text{ORIMLIG, ty } t = u^2 > 0 \end{cases}$

$\therefore u^2 = t = 1/4 \iff u = \pm 1/2$. Vi får två lösningar:

$u_1 = 1/2$, $v_1 = \dfrac{3}{4u_1} = \dfrac{3}{2}$. Ger $\underline{z_1} = \left(\frac{3-i}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = \underline{2+i}$

$u_2 = -1/2$, $v_1 = -\frac{3}{2}$. Ger $\underline{z_2} = \left(\frac{3-i}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i = \underline{1-2i}$

6) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4} = \dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{x-2}$ för $x \neq 2$, $x \neq -2$

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 2, x \neq -2\}$ och $f(x) = \frac{1}{x-2}$ för $x \in D_f$.

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2} < 0$ för alla $x \in D_f$. Teckenschema:

x		-2		2	
$f'(x)$	$-$	ξ	$-$	ξ	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ξ	$\searrow$	ξ	$\searrow$

f är avtagande i intervallen $]-\infty, -2[$, $]-2, 2[$ och $]2, \infty[$

c) Av teckenschemat framgår att f saknar lokala extrempktr.

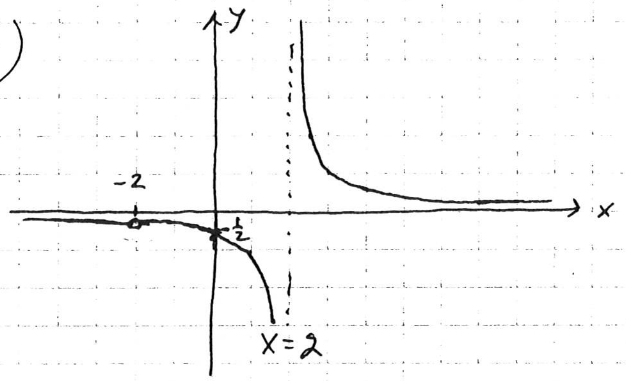
d) För $x \in D_f$ har vi $f(x) = \dfrac{1}{x-2} \to \begin{cases} +\infty & \text{då } x \to 2^+ \\ -\infty & \text{då } x \to 2^- \end{cases}$

vilket visar att $x = 2$ är en lodrät asymptot till kurvan $y = f(x)$. Observera att $x = -2$ <u>inte</u>

forts. 6) är en lodrät asymptot, ty $f(x) = \frac{1}{x-2} \to -\frac{1}{4}$ då $x \to -2$

e) $f(x) = \frac{1}{x-2} \to 0$ då $x \to +\infty$ resp $x \to -\infty$. Alltså är $y = 0$ en vågrät as. både då $x \to +\infty$ och då $x \to -\infty$

f)



7) $f'(x) - \tan x \, f(x) = 2\sin x$. (DE) $\int -\tan x \, dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + C$

Integrerande faktor $e^{\ln|\cos x|} = |\cos x| = \cos x$ (då x vid 0)

DE $\Leftrightarrow \cos x \, f'(x) - \sin x \, f(x) = 2 \sin x \cos x$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \cos x \, f(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos x \, f(x) = \int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$

$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + \frac{C}{\cos x}$.

$f(0) = 0$ ger $0 = -\frac{1}{2} + C$, dvs. $C = \frac{1}{2}$ och vi har

$f(x) = \frac{-\cos 2x + 1}{2\cos x}$ = [formelblad] $= \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \sin x \tan x$

Vi får $f'(x) = \underbrace{\cos x \tan x}_{\sin x} + \sin x (1 + \tan^2 x) = \sin x (2 + \tan^2 x)$

så $f'(0) = 0$, Vidare är

$f''(x) = \cos x (2 + \tan^2 x) + \sin x \quad 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$ så

$f''(0) = 1 \cdot 2 + 0 = 2 > 0$,

Eftersom $f'(0) = 0$ och $f''(0) > 0$ har f ett lokalt minimum i $x = 0$ enl. Sats. $\boxtimes$