NBAM00 Naturv.basår, Matematik del 2, 2018-02-24

1 a) $f(x) = \ln\left(e^{3x}\tan x\right)$. Kedjeregeln o. prod.regeln ge

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}\tan x + e^{3x}(1+\tan^2 x)}{e^{3x}\tan x} = 3 + \tan x + \frac{1}{\tan x} =$$

$$= 3 + \tan x + \cot x.$$

b) $$\int\left(\frac{1}{x^{2/5}} + \cos 3x\right)dx = \int\left(x^{-2/5} + \cos 3x\right)dx =$$

$$= \frac{x^{3/5}}{3/5} + \frac{\sin 3x}{3} + C = \frac{5x^{3/5}}{3} + \frac{\sin 3x}{3} + C.$$

2a) $$f(x) = \frac{5x+2}{x-2}; \quad f'(x) = \frac{5(x-2)-(5x+2)}{(x-2)^2} = \frac{-12}{(x-2)^2}$$

$$f(x) = 11 \iff 5x+2 = 11(x-2) = 11x-22 \iff x = 4$$

$\therefore$ Kurvan skär linjen $y=11$ i punkten $(4,11) = P$

Riktn.koeff. för tangenten i $P$ är $f'(4) = \frac{-12}{(4-2)^2} = -3$.

Tangentens ekvation är

$$y-11 = -3(x-4) = -3x+12 \iff y = -3x+23.$$

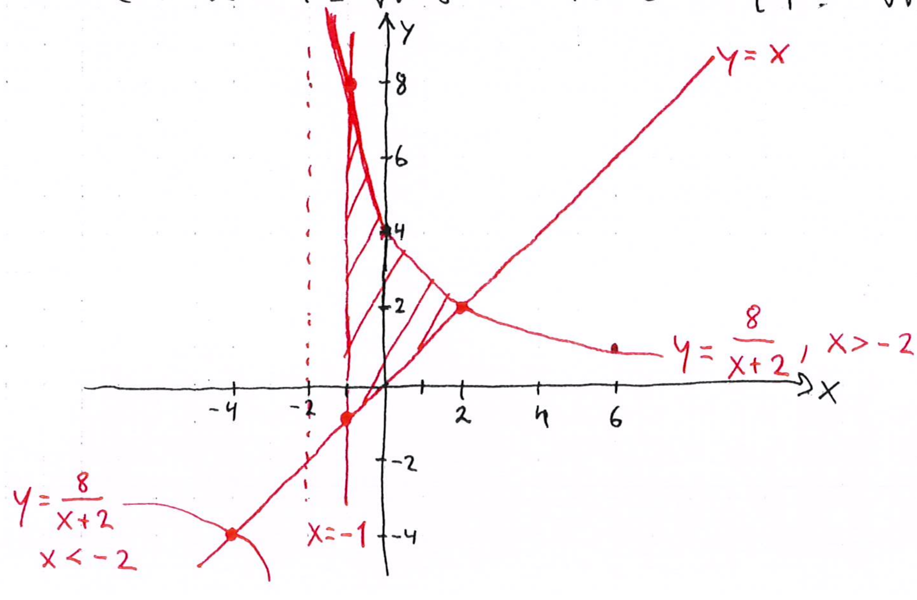
b) Med $f(x) = 6 + \frac{1}{x+4}$ gäller att kurvan $y=f(x)$ har lodrät as. $x=-4$, ty $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to \begin{matrix}(-4)^+\\(-4)^-\end{matrix}$ resp

och vågrät asymptot $y=6$, ty $f(x)\to 6$ då $x \to \pm\infty$

3) Området begränsas av kurvorna: $x=-1$, $y=x$, $y=\frac{8}{x+2}$

Vi beräknar skärningspunkter: $x = \frac{8}{x+2} \iff x^2+2x-8=0$

$\iff x = -1 \pm\sqrt{1+8} = -1\pm 3 = \begin{cases}2\\-4\end{cases}$. Vi ritar området:



forts. 3) Områdets area är

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{8}{x+2}-x\right)dx = \left[8\ln(x+2)-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = 8\ln 4 - \frac{4}{2} -$$

$$\left(8\ln 1 - \frac{1}{2}\right) = 8\ln 4 - 2 + \frac{1}{2} = \underline{16\ln 2 - \frac{3}{2}\ \text{(a.e.)}}$$

4) $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$. Vi börjar med att derivera två gånger

$$f'(x) = \frac{x^2+3-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+3)^2-(3-x^2)2(x^2+3)2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-2x(x^2+3)-4x(3-x^2)}{(x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{-2x\left[x^2+3+2(3-x^2)\right]}{(x^2+3)^3} = \frac{-2x(9-x^2)}{(x^2+3)^2}$$

Vi har: $f'(x)=0 \iff x=\pm\sqrt{3}$

och $f''(x)=0 \iff x=0$ eller $x=\pm 3$

Vi gör teckenscheman för $f'(x)$ resp. $f''(x)$:

| $x$ | | $-\sqrt{3}$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

$f$ har lok. min. i $x=-\sqrt{3}$

lok. max. i $x=\sqrt{3}$

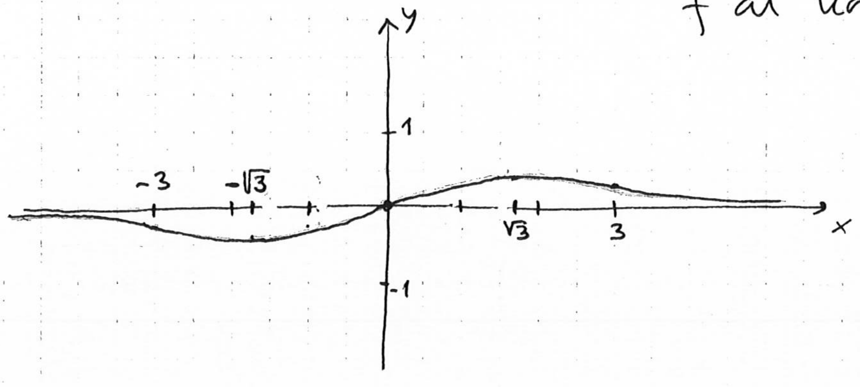
& $f(x)\to 0$ då $x\to\pm\infty$

| $x$ | | $-3$ | | $0$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | konkav | | konvex | | konkav | | konvex |

$f$ har inflexionspktr. i $x=-3$, $x=0$, $x=3$

$f$ är konvex i $[-3,0]$ & $[3,\infty[$

$f$ är konkav i $]-\infty,-3]$ & $[0,3]$




$f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{6} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$

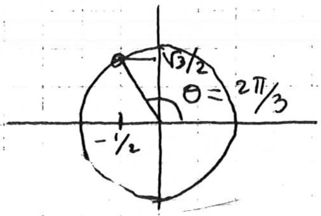
$f(\sqrt{3}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$f(-3) = -1/4$

$f(3) = 1/4$

5 a) $z = -1 + i\sqrt{3}$; $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$z = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$




$\arg z = \frac{2\pi}{3}$

b) $(-1 + i\sqrt{3})^{13} = 2^{13}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{13} \underset{\text{deMoivre}}{=} 2^{13}\left(\cos\frac{13\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{13\cdot 2\pi}{3}\right)$

$= 2^{13}\left(\cos\left(4+\frac{1}{3}\right)2\pi + i\sin\left(4+\frac{1}{3}\right)2\pi\right) = 2^{13}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 2^{13}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{12}(-1 + i\sqrt{3})$.

6) $xy' - y = x^2\sin x \iff y' - \frac{1}{x}y = x\sin x \iff$ $x>0$

$\left[\int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln x\ (+C) = \ln\frac{1}{x}\ (+C),\ \text{Int.f. } e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\right]$

$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \sin x \iff \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \sin x \iff$

$\frac{1}{x}y = -\cos x + C \iff \underline{y = -x\cos x + Cx}$ Allm. lösn.

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \iff \pi = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + C\frac{\pi}{2} = C\frac{\pi}{2} \iff C = 2$

∴ Sökt partikulärlösning är $\underline{y = 2x - x\cos x}$.

7) $y = \frac{1}{1+x^2}$. Sätt $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Då $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Kurvans tangent, i pkt. $(x,y)$, har lutningen $f'(x)$.
Vi söker alltså max av $f'(x)$. Sätt $g(x) = f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

$g'(x) = (-2)\frac{(1+x^2)^2 - x\,2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = (-2)\cdot\frac{(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$

$g'(x) = 0 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Teckenschemat ger att

| | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $g(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

g har lok. max. i $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$
$= \frac{2/\sqrt{3}}{(1+1/3)^2} = \frac{2/\sqrt{3}}{(4/3)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Eftersom $g(x) \to 0$ då $x \to \infty$ ger teckenschemat att $g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ är ett globalt max. Kurvan har alltså störst lutning då $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ & lutningen är $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.