NBAMOO Naturv. basår, Matematik del 2, 2019-01-15

1a) $\frac{\sin 5x}{6x} = \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{6} \to 1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ då $x \to 0$

b) $\sqrt{4x^2+x} - 2x = \frac{\left(\sqrt{4x^2+x} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x} + 2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x} + 2x\right)} = \frac{4x^2+x-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x} + 2x} =$

$= \frac{x}{\sqrt{4x^2+x} + 2x} \underset{\substack{x>0 \\ \text{så } \sqrt{x^2} = x}}{=} \frac{x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}} + 2x} = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}} + 2} \to \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$ då $x \to \infty$

2a) $f(x) = \frac{3\sin 2x}{(3x-1)^4}$; $f'(x) = \frac{(3x-1)^4 \cdot 6\cos 2x - 4(3x-1)^3 \cdot 3 \cdot 3\sin 2x}{(3x-1)^8}$

$= \frac{(3x-1)6\cos 2x - 36\sin 2x}{(3x-1)^5}$

b) $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}\right)dx =$

$= 2\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x^{-1/2}}{(-1/2)} + C = 2\arctan x + \frac{1}{\sqrt{x}} + C$

3a) $f(x) = 2 + \sin(\ln x)$; $f(1) = 2 + \sin(\underbrace{\ln 1}_{=0}) = 2$

$f'(x) = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$; $f'(1) = \cos(\ln 1) = 1$

Tangentens ekvation är

$y - 2 = 1(x-1)$ dvs. $y = x + 1$

b) $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$ enl. ovan så

$f''(x) = \frac{x(-\sin(\ln x))\frac{1}{x} - \cos(\ln x)}{x^2} = \frac{-\sin(\ln x) - \cos(\ln x)}{x^2}$

Vi får

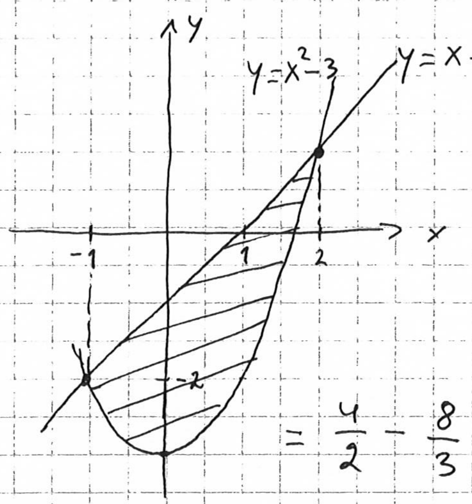
$x^2 f''(x) + xf'(x) + f(x) = -\sin(\ln x) - \cos(\ln x) + \cos(\ln x) + 2 + \sin(\ln x)$

$= 2$ så med $a = 2$ blir $f(x) = 2 + \sin(\ln x)$

en lösning till diffekvationen.

4) Bestäm först skärningspunkterna till $y=x^2-3$ & $y=x-1$

$$x^2-3=x-1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$$



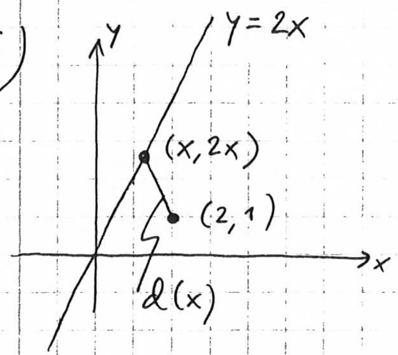
$$A=\int_{-1}^{2}\left(x-1-(x^2-3)\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(x-x^2+2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{4}{2}-\frac{8}{3}+4-\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)}{3}-2\right)=8-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$$

$$=5-\frac{1}{2}=\underline{\frac{9}{2}\ \text{(a.e.)}}$$

5)



Avståndet från en punkt $(x,2x)$ på linjen till punkten $(2,1)$ ges av

$$d(x)=\sqrt{(x-2)^2+(2x-1)^2}.$$

Vi söker minimum av $d(x)$.

$$d'(x)=\frac{2(x-2)+2(2x-1)2}{2\sqrt{(x-2)^2+(2x-1)^2}}=\frac{5x-4}{\sqrt{(x-2)^2+(2x-1)^2}}=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$$

x		$4/5$	
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$	↘		↗

Av teckenschemat framgår att d antar minsta värde då $x=4/5$. Alltså ges det kortaste avståndet av $d(4/5)=\sqrt{(\frac{4}{5}-2)^2+(\frac{8}{5}-1)^2}=$

$$=\sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{1}{5}\sqrt{36+9}=\sqrt{45}/5=3\sqrt{5}/5 \text{ l.e.}$$

6) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{(2x-1)(x+1)} = \dfrac{(x+1)^2}{(2x-1)(x+1)} = \dfrac{x+1}{2x-1}$, $x \in D_f$

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} ; \ x \neq -1 , \ x \neq \frac{1}{2}\}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x-1-2(x+1)}{(2x-1)^2} = \dfrac{-3}{(2x-1)^2} < 0$ för alla $x \in D_f$

x		-1		$1/2$	
$f'(x)$	$-$	§	$-$	§	$-$
$f(x)$	$\searrow$	§	$\searrow$	§	$\searrow$

c) Enl. teckenschemat saknar f lokala extrempunkter

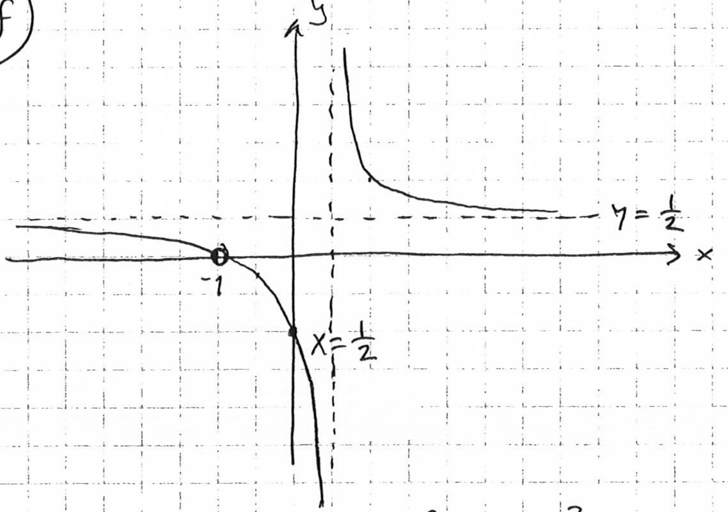
d) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{då } x \to -1 \\ -\infty & \text{då } x \to (\frac{1}{2})^- \\ +\infty & \text{då } x \to (\frac{1}{2})^+ \end{cases}$

Alltså är $x = \frac{1}{2}$ en lodrät as. till f. Den enda!

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{1+1/x}{2-1/x} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ då $x \to \pm\infty$.

Alltså är $y = \frac{1}{2}$ vågrät as. både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$

f)



7) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ där $a_3 \neq 0$ då f 3:e gradspol.

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x = 0 \iff x = -\dfrac{a_2}{3a_3}$. Teckenschema för f'':

		$-a_2/3a_3$		
$f''(x)$	$+$	0	$-$	om $a_3 < 0$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	om $a_3 > 0$
f	konvex		konkav	$a_3 < 0$
	konkav		konvex	$a_3 > 0$

Vi ser att $-a_2/3a_3$ är inflexionspunkt, den enda, oavsett om $a_3 > 0$ eller $a_3 < 0$

$\blacksquare$