NBAMO0 Naturv. basår, Matematik del 2, 2019-02-23

1 a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2-3x^2-4x^5}{3x^5+2x^4-7} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5\left(\frac{2}{x^5}-\frac{3}{x^3}-4\right)}{x^5\left(3+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^5}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^5}-\frac{3}{x^3}-4}{3+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^5}} = -\frac{4}{3}$

2) $f(x) = 3\tan\left(2x-4+\pi/4\right)$; $f(2) = 3\tan\frac{\pi}{4} = 3$; $P=(2,3)$

$f'(x) = 3\left(1+\tan^2\left(2x-4+\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot 2$;

Riktn. koeff. för tangenten genom P är $k_T = f'(2) =$

$= 3\left(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2 = 3(1+1)\cdot 2 = 12$

Tangentens ekvation: $y-3 = 12(x-2)$, dvs. $y = 12x-21$

Normalens ekvation: $y-3 = -\frac{1}{12}(x-2)$, dvs. $y = -\frac{x}{12}+\frac{19}{6}$

3) $g(x) = f\left(\sqrt{5x^2-11}\right)$. Kedjeregeln ger

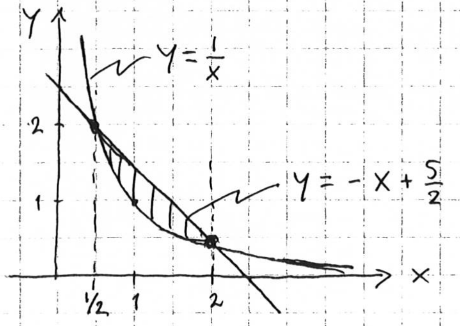
$g'(x) = f'\left(\sqrt{5x^2-11}\right)\frac{d}{dx}\sqrt{5x^2-11} = f'\left(\sqrt{5x^2-11}\right)\frac{5\cdot 2x}{2\sqrt{5x^2-11}} = \frac{5x\, f'\left(\sqrt{5x^2-11}\right)}{\sqrt{5x^2-11}}$

och $g'(2) = \frac{5\cdot 2\, f'\left(\sqrt{5\cdot 2^2-11}\right)}{\sqrt{5\cdot 2^2-11}} = \frac{10\, f'(\sqrt{9})}{\sqrt{9}} = \frac{10\cdot f'(3)}{3} = \frac{10\cdot 5}{3} = \frac{50}{3}$

4) Beräkna först skärningspunkterna:

$\frac{1}{x} = -x+\frac{5}{2} \underset{(x\neq 0)}{\iff} 1 = -x^2+\frac{5}{2}x \iff x^2-\frac{5}{2}x+1 = 0 \iff$

$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}-\frac{16}{16}} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} = \begin{cases} 2 \\ 1/2 \end{cases}$



$A = \int_{1/2}^{2} -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{x}\, dx = \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{5x}{2}-\ln x\right]_{1/2}^{2} =$

$= -2+5-\ln 2-\left(-\frac{1}{8}+\frac{5}{4}-\ln\frac{1}{2}\right) =$

$= 3-\ln 2+\frac{1}{8}-\frac{5}{4}+\ln\frac{1}{2} =$

$= 3-\frac{9}{8}-\ln 2+\ln 1-\ln 2 = \frac{15}{8}-2\ln 2$ (a.e.)

5) $x + 2y = 10 \iff x = 10 - 2y$. Sök största värde till
$f(y) = xy = (10-2y)y = 10y - 2y^2$. Vi har
$f'(y) = 10 - 4y = 0 \iff y = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

y		$5/2$	
$f'(y)$	$+$	0	$-$
$f(y)$	$\nearrow$		$\searrow$

Av teckenschemat framgår att f antar största värde då $y = 5/2$ och vi har

$$f_{max} = f(5/2) = 10 \cdot \frac{5}{2} - 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}$$

Största möjliga värdet av produkten xy är alltså $\frac{25}{2}$ då (x,y) ligger på linjen $x + 2y = 10$.

6) $f(x) = \frac{x^2-8}{x^2-4}$ $\quad D_f = \{x;\ x \neq \pm 2\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2-8)}{(x^2-4)^2} = \frac{8x}{(x^2-4)^2} = 0 \iff x = 0$$

x		-2		0		2	
$f'(x)$	$-$	$\wr$	$-$	0	$+$	$\wr$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$		$\nearrow$	$\wr$	$\nearrow$

Av teckenschemat framgår att f har lokalt min. i $x = 0$
$f(0) = -8/-4 = 2$

$$f(x) = \frac{x^2-8}{(x-2)(x+2)} \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{då } x \to 2^+ \\ +\infty & \text{då } x \to 2^- \\ +\infty & \text{då } x \to (-2)^+ \\ -\infty & \text{då } x \to (-2)^- \end{cases}$$

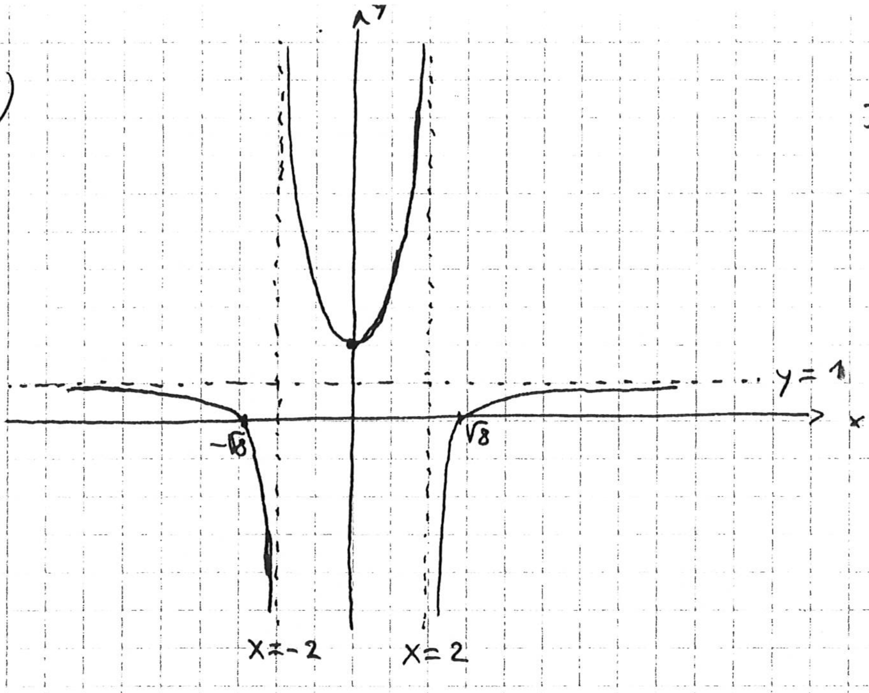
$\therefore$ f har lodräta asymptoter: $x = 2$ och $x = -2$

$$f(x) = \frac{x^2-8}{x^2-4} = \frac{x^2(1 - 8/x^2)}{x^2(1 - 4/x^2)} = \frac{1 - 8/x^2}{1 - 4/x^2} \to 1 \text{ då } x \to \pm\infty$$

$\therefore$ f har vågrät asymptot $y = 1$ både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$

forts. 6)

$f(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{8}$



7) $(x+2)y' + y = \frac{2}{1+x^2} \iff y' + \frac{1}{(x+2)}y = \frac{2}{(1+x^2)(x+2)} \iff$

$\left[\int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln(x+2) + C, \quad \text{Int.f. } e^{\ln(x+2)} = x+2 \right]$

$(x+2>0)$

$(x+2)y' + y = \frac{2}{(1+x^2)}$ (tillbaka där vi startade ☺)

$\iff \frac{d}{dx}\Big((x+2)y\Big) = \frac{2}{1+x^2} \iff$

$(x+2)y = \int \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\arctan x + C \iff$

$y = \frac{2\arctan x + C}{x+2}$ detta är <u>allmän lösning</u>!

$1 = y(0) = \frac{2\arctan 0 + C}{2} = \frac{C}{2} \Rightarrow C = 2.$

Sökta lösningen är $y = \frac{2 + 2\arctan x}{x+2}$