NBAM00 Naturvetenskapligt basår, Matematik del 2, 2019-06-05

1a) $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{1+x^2}} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = (1+x^2)(-1)(1+x^2)^{-2} 2x = \dfrac{-2x}{1+x^2}$

b) $\int \left(\dfrac{1}{3x^{1/3}} + 6\cos 2x\right) dx = \dfrac{1}{3} x^{2/3} \cdot \dfrac{3}{2} + \dfrac{6 \sin 2x}{2} + C = \dfrac{x^{2/3}}{2} + 3\sin 2x + C$

2a) $f(x) = \dfrac{8x-4}{3-x} = 12 \iff 8x - 4 = 36 - 12x \iff 20x = 40 \iff x = 2$

$\therefore$ Tangenten ska beräknas i punkten $(2, 12)$

$f'(x) = \dfrac{8(3-x) - (-1)(8x-4)}{(3-x)^2} = \dfrac{20}{(3-x)^2} \quad \therefore k_T = f'(2) = 20$

Tangentens ekvation: $y - 12 = 20(x-2) = 20x - 40$

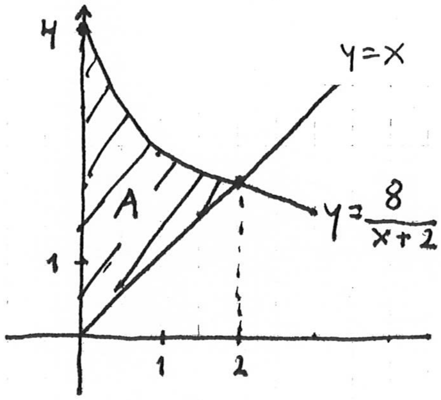
$\iff \quad y = 20x - 28$

b) Med $f(x) = -7 + \dfrac{1}{x-2}$ gäller att kurvan $y = f(x)$ har lodrät as. $x = 2$, ty $f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{då } x \to 2^+ \\ -\infty & \text{då } x \to 2^- \end{cases}$ och vågrät as. $y = -7$, ty $f(x) \to -7$ då $x \to \pm\infty$

3) Beräkna först skärningspunkter:

$\dfrac{8}{x+2} = x \iff 8 = x^2 + 2x \iff x^2 + 2x - 8 = 0 \iff$

$x = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3 = \begin{cases} 2 \\ -4 \leftarrow \text{ej aktuell, ty } x \geq 0 \end{cases}$



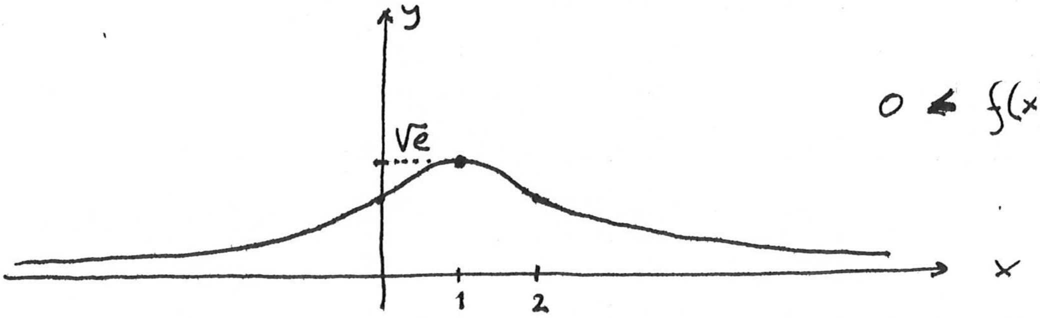
$A = \displaystyle\int_0^2 \left(\frac{8}{x+2} - x\right) dx =$

$= \left[8 \ln(x+2) - \dfrac{x^2}{2}\right]_0^2 =$

$= 8 \ln 4 - 2 - 8 \ln 2 \quad = [\ln 2^2 = 2 \ln 2]$

$= 16 \ln 2 - 2 - 8 \ln 2 = 8 \ln 2 - 2$

forts. 6) f är konvex på intervallen $]-\infty, 0]$ och $[2, \infty[$ och konkav på intervallet $[0, 2]$.



$0 < f(x) \to 0, \ x \to \pm\infty$

7) $P' = kP \iff P' - kP = 0 \iff \left[\text{Int.f } e^{\int -k\,dt} = e^{-kt} \right]$

$e^{-kt}P' - ke^{-kt}P = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(e^{-kt}P\right) = 0 \iff$

$e^{-kt}P = C \iff P(t) = Ce^{kt}$ allm. lösn.

$250 = P(0) = Ce^{0} = C \implies P(t) = 250e^{kt}$

$1000 = P(2) = 250e^{2k} \implies e^{2k} = 4 \implies 2k = \ln 4 \implies$

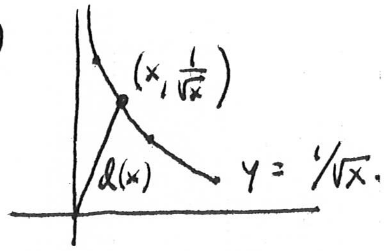
$k = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2$

$\therefore \ P(t) = 250\, e^{t \ln 2} = 250\, e^{\ln 2^{t}} = \underline{250 \cdot 2^{t}}$

4a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = \left[\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}} = x\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}} \text{ då } x>0\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(5+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 5+1 = 6$$

b) $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{x+4-9}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{1}{6}$$

5) 

Avståndet från origo till en punkt $(x, \frac{1}{\sqrt{x}})$ på kurvan ges av

$d(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$. Vi söker minsta värde av $d(x)$.

$$d'(x) = \frac{2x - x^{-2}}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}} = 0 \iff 2x = \frac{1}{x^2} \iff x^3 = \frac{1}{2} \iff x = 2^{-1/3}$$

		$1/\sqrt[3]{2}$	
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Teckenschemat ger att d antar minsta värde då $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ så $d_{min} = d\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) =$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{2/3}} + 2^{1/3}} = \sqrt{2^{-2/3}(1+2)} = \sqrt{\frac{3}{2^{2/3}}} = \sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$$

6) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}+x}$, $f'(x) = (1-x)e^{-\frac{x^2}{2}+x}$,

$$f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}+x} + (1-x)e^{-\frac{x^2}{2}+x}(1-x) = x(x-2)e^{-\frac{x^2}{2}+x}$$

Vi har följande två teckenscheman:

		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$

		0		2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex		konkav		konvex

f har lok. max. i $x=1$ och inflexionspktr. i $x=0$ och $x=2$.