

NBAM00 Naturvetenskapligt basår, Matematik del 2

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559
Telefonvakt: Oskar Allerbo, tel 772 5325
Hjälpmedel: Linjal, formelblad utdelat med tesen (tryckt på baksidan).

Betygsgränser: 20 poäng krävs för betyget G och 36 poäng krävs för betyget VG.
Lösningförslag publiceras på kurswebsidan.

Motivera väl och skriv fullständiga lösningar!

- (a) Derivera $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$. (3p)

(b) Beräkna $\int \left(\frac{1}{3x^{1/3}} + 6 \cos 2x\right) dx$. (3p)
- (a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \frac{8x-4}{3-x}$ i den punkt där kurvan skär linjen $y = 12$. (3p)

(b) Ge exempel (med motivering) på en kurva $y = f(x)$ sådan att $x = 2$ är en lodrät asymptot och $y = -7$ är en vågrät asymptot. (3p)

- Kurvan $y = 8/(x+2)$, $x \geq 0$, och linjen $y = x$ avgränsar tillsammans med y -axeln ett begränsat område. Rita området och beräkna områdets area. (6p)

4. Beräkna gränsvärdena

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$ (3p)
- (b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x-5}$ (3p)

- Beräkna kortaste avståndet från origo till kurvan $y = 1/\sqrt{x}$. Av lösningen ska det framgå att det verkligen är det minsta avståndet. (6p)

6. Bestäm lokala extrempunkter och inflexionspunkter till funktionen

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2} + x}$$

och ange på vilka intervall funktionen är konvex respektive konkav. Motivera dina slutsatser med hjälp av teckenscheman för $f'(x)$ respektive $f''(x)$. Skissa funktionens graf. (7p)

- Låt antalet insekter, vid tiden t (dygn), i en insektspopulation betecknas med $P(t)$. Antag att, enligt Malthus modell, populationsökningen är proportionell mot populationens storlek, dvs att

$$P'(t) = kP(t)$$

där k är en positiv konstant. Bestäm funktionen $P(t)$ om man vet att antalet insekter vid tiden $t = 0$ är 250 och att efter 2 dygn är antalet 1000. (6p)

8. Bevisa standardgränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Observera att olikheten som beviset bygger på också måste bevisas. (7p)

Lycka till!
Ulla