Övningstenta nr 2. NBAM00, del 2

1 a) $\int_1^2 (3x^2 - 3\sqrt{x})\,dx = \left[x^3 - 3\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \left[x^3 - 2x\sqrt{x}\right]_1^2 =$

$= \left(2^3 - 2\cdot 2\sqrt{2}\right) - (1-2) = 8 - 4\sqrt{2} + 1 = 9 - 4\sqrt{2}$

b) $f'(x) = \dfrac{\cos 2x - x(-\sin 2x)2}{\cos^2(2x)} = \dfrac{\cos 2x + 2x\sin 2x}{\cos^2(2x)}$

2) $f(x) = \sin(e^{2x})$, $f'(x) = \cos(e^{2x})\cdot 2e^{2x}$,

$f''(x) = -\sin(e^{2x})\cdot 2e^{2x}\cdot 2e^{2x} + \cos(e^{2x})\cdot 4e^{2x}$. Vi får

$f''(x) - 2f'(x) + 4e^{4x}f(x) =$

$-4e^{4x}\sin(e^{2x}) + 4e^{2x}\cos(e^{2x}) - 4e^{2x}\cos(e^{2x}) + 4e^{4x}\sin(e^{2x}) = 0$

∴ Med $a=0$ blir f en lösning till diffekvationen.

3) $f(x) = \dfrac{2x}{2+x^2}$, $f'(x) = \dfrac{2(2+x^2) - 2x\cdot 2x}{(2+x^2)^2} = \dfrac{4-2x^2}{(2+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Vi gör teckenschema:

		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

f har lok. min. i $x = -\sqrt{2}$ och $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/2$

f har lok. max. i $x = \sqrt{2}$ och $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$

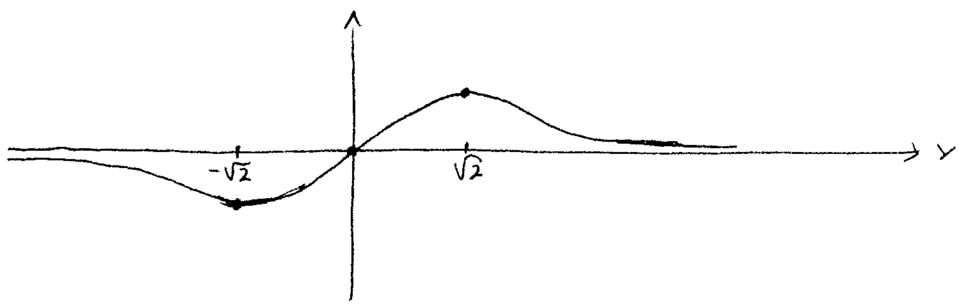
Vi söker ev. asymptoter:

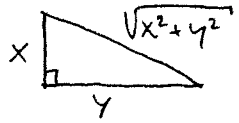
$f(x) = \dfrac{2x}{2+x^2} = \dfrac{2/x}{2/x^2 + 1} \to 0$ då $x \to \infty$ resp. $x \to -\infty$.

∴ $y=0$ är vågrät as. då $x\to\infty$ & då $x \to -\infty$.

Lodräta asymptoter saknas, ty $2+x^2 \geq 2 > 0$ för alla x.

Vi skissar kurvan $y = f(x)$:



4)  Arean är $\frac{xy}{2} = 2$ ger $y = 4/x$.

Hypotenusans längd $L(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2}$.

Vi söker minimum av $L(x) = \sqrt{x^2 + 16x^{-2}}$ då $x > 0$.

$$L'(x) = \frac{2x - 32x^{-3}}{2\sqrt{x^2+16x^{-2}}} = \frac{x - 16x^{-3}}{\sqrt{x^2+16x^{-2}}} = 0 \iff x = \frac{16}{x^3} \iff x^4 = 16 \iff x = 2 \quad (x > 0)$$

	0		2	
$L'(x)$	⦚	$-$	0	$+$
$L(x)$	⦚	↘		↗

Enl. teckenschemat antar L sitt minsta värde då $x = 2$. Då är $y = \frac{4}{2} = 2$.

Den rätvinkliga triangel, med area 2, som har kortast hypotenusa är alltså den liksidiga triangeln med kateterna 2 l.e.

5a) $z = 3\sqrt{3} + 3i$. $|z| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$.

$$z = 6\left(\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{6}i\right) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 6e^{i\pi/6}$$

b) $$(3\sqrt{3} + 3i)^{99} = \left(6e^{i\pi/6}\right)^{99} = 6^{99} e^{i\,99\pi/6} = 6^{99} e^{i\left(\frac{33}{2}\right)\pi} =$$

$$= 6^{99} e^{i\left(\frac{1}{2}+16\right)\pi} = 6^{99} e^{i\pi/2} = \underline{\underline{6^{99}\, i}}$$

6a) Betrakta kurvan $y = \frac{4}{x}$. Sätt $f(x) = \frac{4}{x}$. Då gäller $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ och $f'(1) = -4$ och $f'(4) = -\frac{1}{4}$.

Kurvans tangent i punkten $(4,1)$ har alltså riktn.koeff. $k_T = -\frac{1}{4}$ och tangentens ekvation är $y - 1 = -\frac{1}{4}(x-4)$, dvs.

$$y = -\frac{1}{4}x + 2 \qquad (\text{tangenten i } (4,1)).$$

Kurvans normal i punkten $(1,4)$ har riktn.koeff. $k_N = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$ och normalens ekvation är $y - 4 = \frac{1}{4}(x-1)$, dvs

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4} \qquad (\text{normalen i } (1,4)).$$

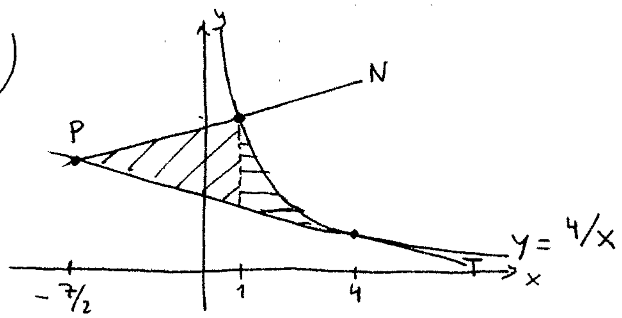
Skärningspunkten mellan tangenten & normalen fås av

$$-\frac{1}{4}x + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4} \iff -\frac{x}{2} = \frac{15}{4} - 2 = \frac{7}{4} \iff x = -\frac{7}{2}$$

varav $y = -\frac{1}{4}\left(-\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{7}{8} + 2 = 23/8$.

Skärningspunkten är alltså $\left(-\frac{7}{2}, \frac{23}{8}\right)$.

6b)



$P = \left(-\frac{7}{2}, \frac{23}{8}\right)$

Området är strechat och dess area beräknas i "två delar" enl.

$$A = \int_{-7/2}^{1} \left(\frac{1}{4}x + \frac{15}{4} - \left(-\frac{1}{4}x + 2\right)\right) dx + \int_{1}^{4} \left(\frac{4}{x} - \left(-\frac{1}{4}x + 2\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-7/2}^{1} \left(\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) dx + \int_{1}^{4} \left(\frac{4}{x} + \frac{x}{4} - 2\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{7}{4}x\right]_{-7/2}^{1} + \left[4\ln x + \frac{x^2}{8} - 2x\right.$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{7}{4} - \frac{49}{16} + \frac{49}{8} + 4\ln 4 + \frac{16}{8} - 8 - 4\underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{8} + 2 = \frac{15}{16} + 4\ln 4 =$$

$$= \frac{15}{16} + 8\ln 2 \quad (\text{a.e.}).$$

7) $f(x) = 2e^x - x - 1$

$f'(x) = 2e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

	$-\ln 2$	
$f'(x)$	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Av teckenschemat framgår att

$f(x) \geq f(-\ln 2) = 2e^{-\ln 2} + \ln 2 - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + \ln 2 - 1$

$= \ln 2 > \ln 1 = 0$

Detta visar att f saknar nollställen. VSB.