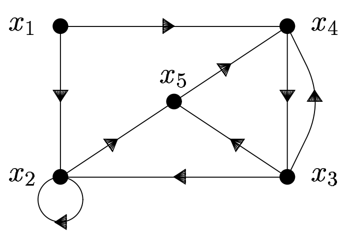
Kantmatriser och vägmatriser

Låt G vara en riktad graf med noder $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Kantmatrisen till G är matrisen

$$K_G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

där $a_{ij} = 1$ om G har en riktad kant från x_i till x_j, och $a_{ij} = 0$ annars.

Exempel:



$$K_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Om man multiplicerar K_G med sig själv får man

$$K_G^2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{25} \\ & & \vdots & \\ b_{51} & b_{52} & \cdots & b_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funderar man på saken en stund (gör det!) kan man se att 1:an på plats (1,3), d.v.s $b_{13} = 1$, innebär att det finns en *riktad väg* av längd 2 från x_1 till x_3, d.v.s en följd av två riktade kanter, från x_1 till x_k respektive från x_k till x_3, där x_k är någon av noderna i G. Nämligen, att $b_{13} = 1$ beror på att när vi multiplicerade K_G med sig själv, då fick vi $b_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{43} + a_{15}a_{53} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$. Med andra ord så var det när vi multiplicerade ihop a_{14} och a_{43} som vi fick 1, och alla andra termer blev 0. Att $a_{14} = 1$ och $a_{43} = 1$ betyder, enligt definitionen av K_G, att det finns en riktad kant från x_1 till x_4 respektive från x_4 till x_3, vilket innebär att det finns en riktad väg av längd 2 från x_1 till x_3.

Upprepar vi det här resonemanget ser vi att i

$$K_G^3 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{25} \\ & & \vdots & \\ c_{51} & c_{52} & \cdots & c_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

är $c_{35} = 2$, vilket motsvarar att det finns två riktade vägar av längd 3 från x_3 till x_5. Dessa vägar är $x_3 \to x_2 \to x_2 \to x_5$ respektive $x_3 \to x_4 \to x_3 \to x_5$. Observera att den första av dessa två vägar snurrar runt ett varv på öglan vid x_2, vilket är tillåtet enligt vår definition av riktad väg. Den andra vägen är också lite virrig, eftersom den först går till x_4 och sen tillbaka till x_3 innan den går till målnoden x_5.

Om man räknar K_G^3 genom att multiplicera $K_G^2 \cdot K_G$ ser man att c_{35} i K_G^3 blir 2 därför att 1:orna på platserna (3,2) i K_G^2 och (2,5) i K_G respektive 1:orna på platserna (3,3) i K_G^2 och (3,5) i K_G multipliceras ihop och bidrar med var sin etta till summan $2 = c_{35}$ i K_G^3. Att multiplicera ihop 1:orna på platser (3,2) i K_G^2 och (2,5) i K_G motsvarar att man lägger ihop vägen av längd 2 från x_3 till x_2 och vägen av längd 1 (kanten) från x_2 till x_5 för att få vägen av längd 3 från x_3 till x_5.

I allmänhet kan man använda samma argument för att visa att elementet på plats (i, j) i K_G^n är lika med antalet vägar av längd n från x_i till x_j i G.

Om vi nu bara är intresserade av att veta *om* det finns en väg av längd n från x_i till x_j, men inte bryr oss om hur många, då kan vi istället för K_G^n ta fram den *n:te booleska potensen* av K_G, där varje positivt element i K_G^n ersätts med 1. M.a.o så utför man matrismultiplikationen så att $1 + 1 = 1$.

Vill vi veta mellan vilka par av noder det finns någon väg, oavsett längd, då kan vi ta alla booleska potenser av K_G och addera dessa booleskt, d.v.s addera alla element på plats (i, j) enligt regeln 1+1 =1 för att få fram elementet (i, j) i *vägmatrisen* V_G för G. Om det finns någon väg mellan x_i och x_j i en graf G, då måste det finnas en väg av längd högst n där n är antalet noder i G (varför?). Det räcker därför att addera de första n booleska potenserna av K_G för att få fram vägmatrisen V_G. Alltså har vi

$$V_G = K_G \oplus K_G^{*2} \oplus K_G^{*3} \oplus \cdots \oplus K_G^{*n}$$

där $\oplus$ är booleskt plus och K_G^{*m} är den m:te booleska potensen av K_G.

Exempel: För G som ovan har vi

$$V_G = K_G \oplus K_G^{*2} \oplus K_G^{*3} \oplus K_G^{*4} \oplus K_G^{*5} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus$$

$$\oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket överensstämmer med att det finns en väg mellan varje par av noder, förutom att det finns inga vägar till x_1. Observera att $K_G^{*4} = K_G^{*5} = V_G$ och att faktiskt $V_G = K_G^{*2} \oplus K_G^{*3}$. Kan du förklara detta?