Kromatiska polynom

Att färglägga en graf G är att ge varje nod i G en färg så att inga grannar (två noder med en kant sinsemellan) får samma färg. Att färglägga G med (högst) n färger innebär att vi har n färger att välja bland och skall använda några av dessa för att färglägga G.

Här är en mer precis definition.

Definition 1 Låt G vara en graf med nodmängd N. En *färgläggning av G med n färger* är en funktion $f : N \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ så att $f(x) \neq f(y)$ om x och y har en kant sinsemellan.

Definition 2 Låt G vara en ändlig graf. Det *kromatiska polynomet till G* är funktionen $\chi_G(n)$, definierad för varje positivt heltal n som antalet färgläggningar av G med n färger.

Sats: Det kromatiska polynomet är ett polynom i n.

Observera att det *kromatiska talet* för G, $\chi(G)$, är lika med det minsta positiva heltalet n för vilket $\chi_G(n)$ är större än 0. (Det kromatiska talet är det minsta antal färger som behövs för att färglägga G).

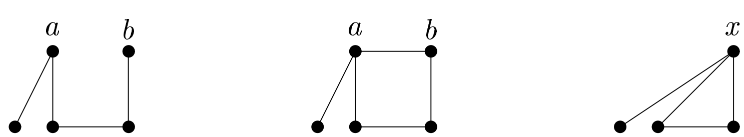
Det finns ingen snabb algoritm för att bestämma det kromatiska talet till en graf G och därmed finns det inte heller något snabbt sätt att bestämma det kromatiska polynomet till G. Mer exakt tillhör dessa problem klassen NP, vilket innebär att det än så länge inte finns någon algoritm som i polynomiell tid ger svaren. (Huruvida det någonsin blir möjligt är en av de stora frågorna inom datalogi).

Ett sätt att bestämma det kromatiska polynomet till en graf G är följande:

Sats 3 *Given en ändlig graf G, och två olika noder a, b i G, så att (a, b) inte är en kant i G, låt G_{a-b} vara grafen som fås genom att lägga till en kant mellan a och b i G, och låt $G_{a=b}$ vara grafen som fås genom att ersätta a och b med en nod x så att x har en kant till varje nod som a eller b har en kant till i G. Då är*

$$\chi_G(n) = \chi_{G_{a-b}}(n) + \chi_{G_{a=b}}(n). \tag{1}$$

Bevis: Varje färgning av G där a och b har olika färger motsvarar en färgning av G_{a-b} och omvänt. Varje färgning av G där a och b ha samma färg motsvarar en färgning av $G_{a=b}$ och omvänt. $\square$



$\chi_G(n) \quad = \quad \chi_{G_{a-b}}(n) \quad + \quad \chi_{G_{a=b}}(n)$

Observera att den rekursiva formeln i Sats 3 även kan skrivas så här:

$$\chi_{G_{a-b}}(n) = \chi_G(n) - \chi_{G_{a=b}}(n). \tag{2}$$

Att använda denna version av formeln innebär att avlägsna kanter från G tills vi bara har isolerade noder kvar. Vilken av dessa två formler som är effektivast för att bestämma det kromatiska polynomet till en graf G beror på G:s struktur.

Notera också att om vi bara är intresserade av av att räkna ut det kromatiska polynomet (eller det kromatiska talet) behöver vi inte fortsätta rekursionen tills den bottnar, utan kan sluta så fort vi har fått grafer vars kromatiska polynom/tal vi kan räkna ut direkt. Till exempel skulle vi kunna ta fram det kromatiska polynomet för den mittersta grafen i figuren ovan m.h.a. ett enda steg i rekursionen (2), för det ger just de andra två graferna i figuren, och deras kromatiska polynom är $n(n-1)^4$ respektive $n(n-1)^2(n-2)$.

Stable eller *independent* på engelska

Definition 4 Låt G vara en graf och M en mängd av noder i G. Mängden M är *stabil* om inga två noder i M utgör en kant i G.

Definition 5 Den i-te *fallande fakulteten* av n är $(n)_i = n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)$. Vi sätter $(n)_0 = 1$.

En färgning av G med k färger ger alltid upphov till en partition av noderna i G i k stabila mängder, eftersom varje mängd av likfärgade noder måste vara stabil. Omvänt ger en partition av noderna i G i k stabila mängder en färgning av G med k färger, genom att de stabila mängderna tilldelas var sin färg. Om vi har n färger till vårt förfogande kan detta göras på $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ olika sätt, det vill säga på $(n)_k$ olika sätt. Därav följande sats.

Sats 6 *Låt $S_G(k)$ vara antalet sätt att dela upp noderna i G i k stabila mängder. Då har vi*

$$\chi_G(n) = \sum_k S_G(k)(n)_k.$$

Ur denna sats följer direkt att $\chi_G(n)$ är ett polynom i n, för $(n)_k$ är uppenbarligen ett polynom i n för varje k. Det följer också att $\chi_G(n)$ har heltalskoefficienter.

Terminologin i grafteorin är tyvärr långt ifrån standardiserad. Här nedan ger jag några (mestadels informella) definitioner som kan vara användbara.

En *väg* i en graf G är en följd $x_1, x_2, \ldots, x_k$ av noder i G så att (x_i, x_{i+1}) är en kant för varje $i < k$ (och $k \geq 2$).

Nyttig övning: Skriv de här definitionerna i samma stil som den första

En *stig* är en väg som inte går över samma kant mer än en gång.

En *cykel* är en väg som börjar och slutar i samma nod.

En *cirkel* är en stig som börjar och slutar i samma nod.

En *minimal cirkel* är en cirkel som inte besöker någon nod mer än en gång.

En *cykelfri stig* är en stig som ...

En graf är *sammanhängande* om det finns en väg mellan varje par av noder.

En *graf* är ett par av mängder, N och K, där K består av 2-elements delmängder i N.

En *riktad graf* är ett par av mängder, N och K, där $K \subseteq N \times N$.