INKLUSION-EXKLUSIONSPRINCIPEN MEDELST GENERERANDE FUNKTIONER

ANDERS CLAESSON

Följande variant av *Inexprincipen* (inklusion-exklusionsprincipen) är i allt väsentligt identisk med den som Wilf ger i [1, s 110]. Låt Ω vara en ändlig mängd och antag att vi är givna en samling egenskaper $\{R_i\}_{i\in J}$, där $R_i \subseteq \Omega$. Vi säger att $\omega \in \Omega$ har egenskapen R_i om $\omega \in R_i$. Den kvantitet, $f(k)$, vi vill finna är antalet objekt i Ω med exakt k egenskaper. Notera att $|\cap_{i\in I} R_i|$ räknar antalet objekt som åtminstone har egenskaperna $\{R_i\}_{i\in I}$ och sätt

$$g(k) = \sum_{\substack{I\subseteq J\\ |I|=k}} |\cap_{i\in I} R_i|$$

Då det vanligtvis är lättare att finna g än f vill vi uttrycka f i termer av g. Om vi definierar $I(\omega) = \{i : \omega \in R_i\}$, så kan vi skriva $g(k)$ på följande vis

$$\begin{aligned} g(k) &= \sum_{|I|=k} \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ I\subseteq I(w)}} 1 \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} \sum_{\substack{I\subseteq I(w)\\ |I|=k}} 1 \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} \binom{|I(\omega)|}{k} \end{aligned}$$

Således bidrar varje objekt som har exakt n egenskaper med $\binom{n}{k}$ till $g(k)$. Eftersom det finns $f(k)$ objekt med exakt k egenskaper har vi visat

$$g(k) = \sum_n \binom{n}{k} f(n)$$

Låt $G(x) = \sum_k g(k)x^k$ och multiplicera uttrycket ovan med x^k samt summera över k. Då får vi

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_k \sum_n \binom{n}{k} f(n)x^k \\ &= \sum_n f(n) \sum_k \binom{n}{k} x^k \\ &= \sum_n f(n)(x+1)^n \end{aligned}$$

Alltså är $G(x-1)$ en genererande funktion för $\{f(n)\}_n$.

Problem 1. *Visa följande identitet för Stirlingtalen av andra slaget:*

$$k!S(n,k) = \sum_i (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Lösning. En *k-pseudopartition* av en mängd M är en familj, $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$, av parvis disjunkta delmängder till M sådana att $M = \cup_i B_i$. Låt Ω vara mängden av alla ordnade k-pseudopartitioner av $[n]$ och sätt $R_i = \{\pi \in \Omega : B_i = \emptyset\}$. Med notation som ovan har vi

$$g(r) = \sum_{\substack{I \subseteq [k] \\ |I|=r}} |\cap_{i\in I} R_i| = \binom{k}{r}(k-r)^n$$

Den sista likheten följer av att det finns en naturlig bijektion mellan strängar av längd n i alfabetet $[k] \setminus I$ och ordnade k-pseudopartitioner av $[n]$ sådana att $B_i = \emptyset$ för varje $i \in I$. Låt $G(x) = \sum_r g(r)x^r$, då är $G(x-1)$, enligt inexprincipen, en genererande funktion för antalet $\pi \in \Omega$ med exakt r tomma block. Speciellt räknar den konstanta termen i $G(x-1)$ antalet $\pi \in \Omega$ sådana att inget block i partitionen är tomt, d.v.s. antalet ordnade k-partitioner av $[n]$. Alltså har vi $k!S(n,k) = G(-1)$, d.v.s.

$$k!S(n,k) = \sum_i (-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n$$

□

Problem 2. *Låt $S(n,k)$ och $A(n,k)$ vara Stirlingtalen respektive de Eulerska talen. Visa att*

$$A(n,i) = \sum_k (-1)^{n-k-i}\binom{n-k}{i} k!S(n,k)$$

Lösning. Låt $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ vara en ordnad partition av $[n]$ och lista elementen i partitionen så att element tillhörande samma block är skrivna i fallande ordning. På så vis kan vi tolka π som en unik permutation $\widehat{\pi} = a_1 \cdots a_n$ i $\mathcal{S}_n$. Vi säger att i är ett *inre fall* i $\widehat{\pi}$ om i är ett fall och det finns något block B_j så att $a_i, a_{i+1} \in B_j$. Notera att $\widehat{\pi}$ har $n-k$ inre fall om och endast om π är en ordnad k-partition. Vidare observerar vi att givet $\widehat{\pi}$ och en indexmängd I innehållande de inre fallen i $\widehat{\pi}$, så kan vi rekonstruera π. Låt R_i vara mängden av alla permutationer i $\mathcal{S}_n$ med ett fall på plats i, då har vi visat

$$g(n-k) = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=n-k}} |\cap_{i\in I} R_i| = k!S(n,k)$$

Om $G(x) = \sum_k g(k)x^k$, så är $G(x-1)$ enligt inexprincipen en genererande funktion för antalet permutationer med exakt k fall, d.v.s.

$$G(x-1) = \sum_i A(n,i)x^i$$

men vi har också

$$\begin{aligned}
G(x-1) &= \sum_k k!S(n,k)(x-1)^{n-k} \\
&= \sum_k \sum_i k!S(n,k)\binom{n-k}{i}x^i(-1)^{n-k-i} \\
&= \sum_i \sum_k (-1)^{n-k-i}\binom{n-k}{i}k!S(n,k)x^i
\end{aligned}$$

vilket implicerar

$$A(n,i) = \sum_k (-1)^{n-k-i}\binom{n-k}{i} k!S(n,k)$$

□

Problem 3. *Låt c_n^k vara antalet partitioner av [2n] med k block som alla har ett jämnt antal element. Då är*

$$E_{2n} = \sum_k (-1)^{n-k} k! c_n^k$$

där E_m är det m:te Eulertalet, d.v.s. antalet alternerande permutationer i $\mathcal{S}_m$. Ge ett bevis för ovanstående identitet. Beviset skall också (med en liten modifiering) täcka följande identitet:

$$E_{2n-1} = \sum_k (-1)^{n-k} (k-1)! c_n^k$$

Lösning. Låt

$$M = \{a_1 \cdots a_{2n} \in \mathcal{S}_{2n} : a_{2i-1} > a_{2i} \text{ för varje } i \in [n]\}$$

och associera till varje $i \in [n-1]$ en mängd $R_i = \{\pi \in M : a_{2i} > a_{2i+1}\}$. Tag en godtycklig ordnad k-partition π av $[2n]$ sådan att varje block är av jämn storlek. Lista elementen i partitionen så att element tillhörande samma block är skrivna i fallande ordning. Då ser vi att π bestämmer en permutation $\widehat{\pi}$ i M. På liknande sätt som i lösningen till problem 2 finner vi en bijektion $(I, \widehat{\pi}) \longmapsto \pi$, där $2I$ är mängden av jämna inre fall i $\widehat{\pi}$. Därav följer

$$g(n-k) = \sum_{\substack{I \subseteq [n-1] \\ |I| = n-k}} |\cap_{i \in I} R_i| = k! c_n^k$$

Om

$$G(x) = \sum_k g(k) x^k = \sum_k k! c_n^k x^{n-k}$$

så är $G(x-1)$ enligt inexprincipen en genererande funktion för antalet $\pi \in M$ med exakt k jämna fall. Speciellt bestäms antalet alternerande permutationer av den konstanta termen i $G(x-1)$. Alltså har vi visat

$$E_{2n} = \sum_k (-1)^{n-k} k! c_n^k$$

Av ovanstående följer också

$$E_{2n-1} = \sum_k (-1)^{n-k} (k-1)! c_n^k$$

Ty låt en partition av $[2n]$ med k block som alla har ett jämnt antal element vara given. Identifiera det block som innehåller talet $2n$ och ta bort det från det blocket. Bilda nu en ordnad partition genom att ge det block som tidigare innehöll $2n$ index k och tilldela de övriga blocken var sitt index ur $[k-1]$. Följ sedan det tidigare givna beviset. □

Referenser

[1] Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.

Matematiska institutionen, Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet, 412 96 Göteborg, *E-postadress*: `claesson@math.chalmers.se`