ICKE LINJÄRA EVOLUTIONSEKVATIONER

FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR

Björn E. J. Dahlberg

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA OCH
GÖTEBORGS UNIVERSITET
S-412 96 GÖTEBORG

Innehåll

1 Inledning

Vår avsikt är att först behandla den allmänna teorin för icke linjära evolutionsekvationer. I sin mest generella form gäller det att studera ekvationer av formen

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u_0,$$

där A är en icke-linjär operator på ett Banachrum. Det kan här påpekas att de flesta PDE problem som kommer från tillämpningarna är av denna form. Efter att ha gjort den allmänna teorin är avsikten att behandla ett konkret problem, nämligen ekvationen $\Delta u^2 = \frac{\partial u}{\partial t}$, som är en modell för gasflöden i porösa medier. Klart är att utrustad med allmän teori når man inte så långt i förståelsen av ett specifikt problem, men det är intressant att se hur mycket extra arbete man måste lägga ner i ett konkret fall. Vi skall visa att denna icke linjära ekvation kan förstås lika väl som exempelvis den linjära ekvationen $\frac{du}{dt} = \Delta u$.

Den icke linjära operatorn A kommer normalt inte att vara definierad på hela Banachrummet X, utan på någon delmängd $D(A)$ av X. Oftast kommer $D(A)$ att vara tät i X. Om A är "hygglig" så kan man lätt visa existens av lösningar till den icke linjära evolutionsekvationen med följande sats.

Sats 1. *(Existens av fixpunkt till kontraktiva avbildningar.) Låt T vara en operator på Banachrummet X som tar enhetsbollen B in i B.*

$$T : B \to B, \quad B = \{x \in X, \|x\| < 1\}.$$

Om T är starkt kontraktiv, $\|Tx - Tx'\| \leq c\|x - x'\|, c \in (0,1)$, så har T exakt en fixpunkt $x \in B$,

$$Tx = x.$$

Exempel 2. Låt $A : X \to X$ vara Lipschitz kontinuerlig

$$\|Ax - Ay\| \leq C\|x - y\|, \quad C > 0.$$

Då har

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1}$$

en entydig lösning $u : [0, T^*[\to X$ för alla $u_0 \in X$. (T^* kan tas som ∞ eller också $\|u(t)\| \to \infty$ då $t \to T^*$.) Detta inses lätt med argument från Picards sats. Integrera (1)

$$u(t) = u_0 + \int_0^t Au(s)ds$$

och definiera $T_t : X \to X$ som höger ledet. T_t är en kontraktion för små t och existensen av $u(t)$ följer av sats 1.

Det går att förbättra föregående sats om existens av fixpunkt. I fortsättningen skall vi inkludera $c = 1$ i vår definition av kontraktion.

Definition 3. T är en *kontraktion* om för all $x, x' \in X$ gäller

$$\|Tx - Tx'\| \leq \|x - x'\|$$

Sats 4. *Låt X vara ett likformigt konvext Banachrum, $C \subset X$ en sluten, begränsad, konvex mängd och $T : C \to C$ en kontraktion. Då har T en fixpunkt i C.*

Anmärkning. Det är nödvändigt med extra villkor på X. Tag

$$X = C_0 = \{(x_i)_{i=1}^{\infty},\ x_i \to 0, i \to \infty \text{ och } \|(x_i)^{\infty}\| = \sup\{|x_i|\}_{i=1}^{\infty}\}$$

och $T(x_i) = (1, x_1, x_2, \dots)$. Då är T en kontraktion på enhetsbollen i C_0, men T saknar fixpunkt.

Definition 5. Banachrummet X är *strikt konvex* om likhet i

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

medför att x och y är parallella.

Definition 6. Banachrummet X är *likformigt konvex* om för alla $\varepsilon > 0$ det finns $\delta > 0$ så att

$$\sup\{\|x + y\|;\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x - y\| > \varepsilon\} \leq 2 - \delta.$$

Känslan för det här skall vara att "alla" rum utom L^1 och L^∞ är likformigt konvexa. Följande satser belyser sambandet mellan reflexivitet och konvexitet hos ett Banchrum.

Sats. (Asplund, Israel J. Math., 5 (1967), 227-253). Om X är ett reflexivt Banachrum så finns en norm, ekvivalent med den ursprungliga normen, så att X blir strikt konvex.

Sats. Om X är likformigt konvext Banachrum så är X reflexitvt.

Övning 1. Visa att L^p, $1 < p < \infty$, är likformigt konvext.

Övning 2. Visa att mängden av fixpunkter till T i Sats 4 är konvex.

2 Linjära halvgrupper

Om en lösning existerar till vår evolutionsekvation för någon mängd M av begynnelsevärden, kan vi definiera en lösningsoperator $S(t): M \to X$ så att $S(t)x$ är lösningen vid tiden t för begynnelsevärde x. Lösningen vid tiden $t+s$ fås som

$$S(t+s)x = S(t)S(s)x.$$

Detta säger att S är en halvgrupp. Efter att ha gått igenom linjära teorin för halvgrupper skall vi peka på var utvidgningar skall till för att man skall klara av icke linjära operatorer. Bland annat skall vi se på halvgrupper i Hilbertrum genererade av monotona avbildningar och accretiva operatorer i Banachrum. Målsättningen, till att börja med, är att visa Hille-Yosidas sats, som talar om när en linjär operator A genererar en halvgrupp. Det är klart att en begränsad operator genererar en halvgrupp. Ty låt $A \in L(X)$, mängden av begränsade linjära operatorer på X. Evolutionsekvationen $\dot{u} = Au$, $u(0) = x$, har då lösningen $u(t) = e^{At}x$, där

$$e^{At}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x,$$

är halvgruppen genererad av A.

Då A är obegränsad behövs lämpliga villkor på A för att man skall erhålla en halvgrupp.

Exempel 7. För $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ och

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \Delta u, \\ u(0) = f, \end{cases}$$

så är

$$u(t) = S(t)f = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} f(y)dy.$$

Här är halvgruppen $S(t)$ faltning med Gauss-Weierstrass Kärnan. Vi observerar att $S(t)$ är en kontraktiv halvgrupp då $\|S(t)f\|_p \leq \|f\|_p$, $1 \leq p < \infty$.

Om X är ett Hilbertrum och om t.ex. A är självadjungerad kan spektralsatsen användas för att studera e^{At}. Men många intressanta evolutionsproblem har Banachrum som underliggande rum och därför behöver vi Hille-Yosidas sats.

Definition 8. De linjära begränsade operatorerna $S(t) \in L(X)$, $t \geq 0$ på Banachrummet X bildar en C_0 - *halvgrupp* om

1) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $t, s \geq 0$

2) $S(0) = I$

3) $\lim_{t \to t_0} S(t)x = S(t_0)x$ för alla $x \in X$ och $t_0 \in [0, \infty[$.

Övning 3. I definitionen av C_0-halvgrupp så kräver man starkt gränsvärde i 3). Visa att svag konvergens implicerar detta.

För normen av $S(t)$ kan vi visa följande uppskattning.

Proposition 9. *Det finns $M > 0$ och $\beta \in \mathbb{R}$ så att*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\beta t}, \quad t \in [0, \infty[.$$

Bevis. Av Banach-Steinhaus' sats följer, att för alla $T \in [0, \infty[$ så är $\sup_{t \in [0,T]} \|S(t)\| < \infty$. Sätt

$$p(t) = \log \|S(t)\|, \quad t \in [0, \infty[.$$

Av egenskap 1) följer att p är subadditiv, $p(t + s) \leq p(t) + p(s)$. För p gäller då

$$\lim_{t \to \infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t} < \infty. \tag{2}$$

Antag att för något $T \in (0, \infty)$, $\dfrac{p(T)}{T} < \beta \in \mathbb{R}$. För $t > T$ finns $n \in Z$ och $s \in [0, T)$ så att $t = nT + s$. Av subadditiviteten följer $p(t) \leq np(T) + p(s)$.

Dividera med t och låt $t \to \infty$. Då $p(s)$, $s \in [0, T)$ är uppåt begränsad så fås $\overline{\lim}_{r \to \infty} \dfrac{p(t)}{t} < \beta$. Nu följer (2) och propositionen.

Definition 10. Den *infinitesimala generatorn* A till halvgruppen $S(t)$, $t \geq 0$ definieras av

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

Definitionsmängden $D(A)$ till A är mängden av $x \in X$ där gränsvärdet existerar.

Några viktiga egenskaper hos $S(t)$ och A ges i följande proposition.

Proposition 11. *Låt A vara generator till linjära halvgruppen $S(t)$, $t \geq 0$, på Banachrummet X. Då gäller*

i) *A är tätt definierad, d.v.s. $D(A)$ är tät i X.*

ii) *A är en sluten operator d.v.s. grafen* $\{(x, Ax), x \in D(A)\}$ *är sluten i* $X \times X$.

iii) *Om* $x \in D(A)$ *så är* $t \mapsto S(t)x$ *en funktion i* $C^1([0,\infty[, X)$ *och*

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Bevis. i) Sätt

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t S(v)x dv,\ x \in X.$$

Då $v \to S(v)x$ är kontinuerlig och $S(0) = I$ fås $x_t \to x$ då $t \to 0$. Dessutom, gäller $x_t \in D(A)$ då $t > 0$, ty

$$\begin{aligned}\frac{S(h)x_t - x_t}{h} &= \frac{1}{t}\frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} S(v)xdv - \int_0^t S(v)xdv\right) = \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(v)xdv - \frac{1}{h}\int_0^h S(v)xdv\right) \longrightarrow \frac{1}{t}(S(t)x - x) \text{ då } h \downarrow 0.\end{aligned}$$

Alltså är $D(A)$ tät i X.

För att visa iii) behövs följande lemma.

Lemma 12. *Låt* $f : I \to \mathbb{R}$ *vara kontinuerlig på ett intervall* I*, och antag högerderivatan* D^+f *existerar och är kontinuerlig på* I*. Då gäller* $f \in C^1(I)$.

Övning 4. Bevisa lemma 12.

Bevis Prop. 11 iii). Från definitionen av S och A fås att $t \to S(t)x$ är kontinuerlig och har kontinuerlig högerderivata då $x \in D(A)$.

$$\frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = \frac{S(t+h)x - S(t)(x)}{h} =$$

$$S(t)\frac{S(h)x - x}{h} \to S(t)Ax,\ h \downarrow 0,\ x \in D(A).$$

Första termen går mot $S(t)x$. Nu följer iii) av Lemma 12.

Bevis Prop. 11 ii). Tag $x_n \in D(A)$, $n \in N$, så att $x_n \to x_0$ och $Ax_n \to y_0$ då $n \to \infty$. Vi skall visa att $x_0 \in D(A)$ och $Ax_0 = y_0$.

$$S(t)x_n - x_n = \int_0^t S(v)Ax_n dv,$$

då fås

$$S(t)x_0 - x_0 = \int_0^t S(v)y_0 dv.$$

Dividera med t och låt $t \to 0$. Då fås $x_0 \in D(A)$ och $Ax_0 = y_0$.

Nu kan vi formulera och bevisa Hille-Yosidas sats.

Sats 13 (Hille-Yosida). *Antag A är en tätt definierad, sluten, linjär operator på Banachrummet X. Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att A skall vara generator till en C_0-halvgrupp $S(t), t \geq 0$, med $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$ är*

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(Re\ \lambda - w)^n},\ n = 1, 2, 3, \dots,\ Re\ \lambda > w. \tag{3}$$

Bevis. Vi börjar med att visa att resolventen $(\lambda I - A)^{-1}$ kan fås som en integral analog med Laplace transformen (Tänk på $S(t)$ som e^{At}).

Sätt

$$\begin{aligned} R(\lambda)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t)x dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} S(t)x dt = \\ &= x - \lambda R(\lambda)x \end{aligned}$$

där sista steget fås med partial-integrering. Alltså är

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Nu följer lätt att (3) är ett nödvändigt villkor för att A skall vara generator

$$\|(\lambda I - A)^{-n}x\| = \left\| \frac{d^{n-1}R(\lambda)}{(n-1)!d\lambda^{n-1}} x \right\| =$$
$$\left\| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^{n-1} S(t)x dt \right\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\ \lambda - w)^n} \|x\|.$$

Vi visar att (3) är tillräckligt, genom att konstruera en C_0-halv grupp från A. Idén är att approximera A med begränsade operatorer och visa att halvgrupperna som genereras av dessa, konverger mot en halvgrupp, som har A som generator.

Det räcker att studera fallet $w = 0$ ty man kan alltid multiplicera S med e^{-wt} vilket motsvarar translation av A med $-wI$. Sätt

$$J_n = (I - \frac{1}{n}A)^{-1}.$$

Av (3) fås $J_n \in L(X)$ och $\|J_n^k\| \leq M$. Som approximation till A tar vi

$$A_n = n(J_n - I).$$

Det gäller

$$\begin{aligned} n(J_n - I) &= n(J_n - (I - \frac{1}{n}A_n)J_n) = \\ n(J_n - J_n(I - \frac{1}{n}A_n)) &= AJ_n = J_nA, \end{aligned} \tag{4}$$

och

$$\|(J_n - I)x\| = \|\frac{1}{n}J_nAx\| \to 0,\ n \to \infty,\ x \in D(A).$$

Nu fås från (4) att

$$A_nx \to Ax,\ n \to \infty,\ x \in D(A).$$

Låt $S_n(t)$, $t \geq 0$ vara halvgrupperna som genereras av A_n,

$$S_n(t) = \exp(tA_n) = e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ntJ_k)^k}{k!}.$$

Då är $\|S_n(t)\| \leq M$ ty $\|J_n^k\| \leq M$. Vi visar nu att $(S_n(t)x)_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchy sekvens för varje $x \in X$. Det räcker att göra detta i den täta delmängden $D(A)$.

$$\begin{aligned} S_m(t)x - S_n(t)x &= \Big[S_n(t-s)S_m(s)x\Big]_{s=0}^{s=t} = \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}S_n(t-s)S_m(s)xds = \\ &= \int_0^t S_n(t-s)(A_m - A_n)S_m(s)x\,ds, \quad x \in D(A). \end{aligned}$$

Man får

$$\|S_m(t)x - S_n(t)x\| \leq M^2 \cdot t\|A_mx - A_nx\|, \quad x \in D(A).$$

Alltså konvergerar $S_n(t)x$ då $n \to \infty$, för alla $t \in [0, \infty[$ och $x \in X$. Låt $S(t)x = \lim_{n\to\infty} S_n(t)x$. Det inses lätt att $S(t), t \geq 0$, är en C_0-halvgrupp med $S(t) \leq M$. Låt B vara generator till $S(t)$. Då är $B = A$, ty låt $n \to \infty$ i

$$S_n(t)x - x = \int_0^t S_n(v)A_nxdv,\ x \in D(A).$$

Då fås

$$S(t)x - x = \int_0^t S(v)Axdv, \quad x \in D(A)$$

och man ser att B är en utvidgning av A, $A \subset B$. Men då värdemängderna av $(I-A)^{-1}$ och $(I-B)^{-1}$ är $D(A)$ resp. $D(B)$ och $(I-B)D(A) = X$ så måste $D(B) = D(A)$ och $B = A$. Att bevisa entydighet hos $S(t)$ lämnas som övning.

Övning 5. Visa att om $T(t)$ är en halvgrupp som också har A som generator så är $T(t) = S(t)$, $t \geq 0$.

Referenser för linjära halvgrupper

K. Yosida, Funktional Analysis, Springer-Verlag, 1978.

E. Hille & R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, AMS 1957.

3 Monotona operatorer

I det här avsnittet skall vi behandla monotona operatorer på Hilbertrum. Innan vi går in på de icke linjära operatorerna, ska vi se vad villkoret i Hille-Yosida's sats säger i ett Hilbertrum H. Om

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq (\mathrm{Re}\,\lambda)^{-1}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

så är villkoret (3) uppfyllt och A är generator till en kontraktiv halvgrupp. För $x \in H$ fås med $\lambda > 0$,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \lambda^{-1}\|x\|,$$

vilket ger

$$\|x\| \leq \lambda^{-1}\|(\lambda I - A)x\|, \quad x \in D(A),$$
$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2 - 2\lambda^{-1}\langle x, Ax\rangle,$$

och för alla $x \in D(A)$ gäller

$$\langle x, Ax\rangle \leq 0.$$

Alltså, om B är en sluten och tätt definierad, positiv operator

$$\langle x, Bx\rangle \geq 0, \quad x \in D(B),$$

så är $-B$ generator till en C_0-halvgrupp.

För att få en tillräckligt användbar definition av monoton operator skall vi titta på flervärda operatorer,

$$A : D(A) \to P(H)$$

där $D(A) \subset H$ och $P(H)$ är klassen av alla delmängder av H. Inversen av en flervärd operator A existerar alltid och definieras av

$$\begin{aligned} &A^{-1} : D(A^{-1}) \to P(H) \\ &x \mapsto \{y; x \in Ay\} \end{aligned}$$

Definition 14. Låt A vara en flervärd operator på H. A är *monoton* om, för alla $x, y \in D(A)$, alla $\xi \in Ax$ och alla $\eta \in Ay$ gäller

$$\langle \xi - \eta, x - y \rangle \geq 0. \tag{5}$$

Man ser direkt att en linjär positiv operator är monoton. Dessutom är definitionen "riktig" för monotona funktioner på R.

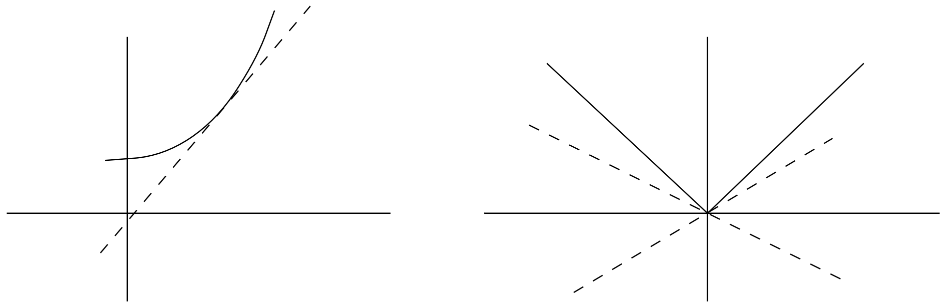
Exempel 15. Tag $f : R \to R$ växande. Motsvarande operator $\tilde{f}$ blir då $\tilde{f}(x) = [f(x^-), f(x^+)]$ och man ser att (5) gäller för $\tilde{f}$.

Proposition 16. *Om $A : D(A) \to P(H)$ är monoton så är A^{-1} monoton.*

Övning 6. Bevisa Proposition 16.

För konvexa mängder gäller att till varje randpunkt finns åtminstone ett stödplan, dvs ett plan sådant att mängden ligger på ena sidan av planet.

Exempel 17. "Tangenter".



Detta leder till definition av subdifferential för konvexa funktioner.

Definition 17. *Subdifferentialen* av en konvex funktion $\varphi : H \to]-\infty, \infty]$ i en punkt $x \in H$ är

$$\partial\varphi(x) = \{y : \varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z - x \rangle, \quad \text{för alla} \quad z \in H\}.$$

Exempel 18. För $\varphi \in C^1(R)$ konvex så är,

$$\begin{aligned}\partial\varphi(x) &= \{y : \varphi(\xi) \geq \varphi(x) + y(\xi - x), \quad \xi \in R\}\\ &= \{y : \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x)}{\xi - x} \geq y \quad \xi \in R\}\\ &= \{\frac{d\varphi}{dx}(x)\}\end{aligned}$$

Sats 19. *För en konvex funktion $\varphi : H \to]-\infty, \infty]$ så är $\partial\varphi$ monoton.*

Bevis. Låt $x, y \in H$. Vi skall visa; för alla $\xi \in \partial\varphi(x), \quad \eta \in \partial\varphi(y)$ gäller $\langle \xi - \eta, x - y\rangle \geq 0$. Definitionen av $\partial\varphi$ ger

$$\begin{aligned}\varphi(y) &\geq \varphi(x) + \langle \xi, y - x\rangle,\\ \varphi(x) &\geq \varphi(y) + \langle \eta, x - y\rangle.\end{aligned}$$

Adderas dessa två olikheter så får man

$$\langle \xi - \eta, x - y\rangle \geq 0.$$

Övning 7. Låt H vara Sobolev-rummet

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n); \sum_{|\alpha|\leq 2} \int |D^\alpha f|^2 < \infty\}$$

och

$$\varphi(u) = \int |\nabla u|^2.$$

Visa $\partial\varphi(u) = -2\Delta u$.

Definition 20. En operator A är *maximal monoton* om det inte finns någon monoton utvidgning av operatorn. Detta betyder att om B är monoton och $G(A) \subset G(B)$ så är $A = B$. Här är $G(A)$ grafen av A,

$$G(A) = \{[x, \xi] \in H \times H; \quad x \in D(A), \quad \xi \in Ax\}.$$

Värdemängden av A skall vi beteckna med $R(A)$,

$$R(A) = \{\xi \in H, \quad \xi \in Ax, \quad x \in D(A)\}.$$

Innan nästa sats, som behandlar resolventen av en maximal monoton operator, så observerar vi att en kontraktion är alltid envärd.

Sats 21. *Låt A vara en flervärd operator på H. Följande påståenden är ekvivalenta.*

1) A är maximal monoton.

2) A är monoton och $R(I+A)=H$.

3) För alla $\lambda>0$ är $(I+\lambda A)^{-1}$ en kontraktion på H.

Bevis. 2) $\Leftrightarrow$ 3).

För $x_1, x_2 \in D(A)$ och $\lambda>0$ är

$$\langle \lambda(\xi-\eta), x_1-x_2\rangle \geq 0,\ \xi \in Ax_1,\ \eta \in Ax_2.$$

Vi får

$$\begin{aligned} &\|x_1-x_2+\lambda(\xi-\eta)\|^2 = \\ &\|x_1-x_2\|^2+2\langle x_1-x_2, \lambda(\xi-\eta) > +\lambda^2\|\xi-\eta\|^2 \geq \|x_1-x_2\|^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Med

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+\lambda\xi, \quad (I+\lambda A)^{-1}y_1 = x_1, \\ y_2 &= x_2+\lambda\eta, \quad (I+\lambda A)^{-1}y_2 = x_2, \end{aligned}$$

fås

$$\|y_1-y_2\| \geq \|(I+\lambda A)^{-1}y_1-(I+\lambda A)^{-1}y_2\|.$$

Det går också bra att vända på argumenten och utnyttja att (6) skall gälla för alla $\lambda>0$. Detta visar 3) $\Leftrightarrow$ 2).

Bevis. 2) $\Rightarrow$ 1).

Antag det finns B monoton, som är en utvidgning av A, alltså $G(A)\subset G(B)$. Tag $[x,y]\in G(B)$, d.v.s. $y\in Bx$. Då gäller

$$x+y \in x+Bx, \tag{7}$$

och det finns $x'\in D(A)$ så att

$$x+y \in x'+Ax', \tag{8}$$

och alltså

$$x+y \in x'+Bx'. \tag{9}$$

(7) och (9) ger enligt 2) och 3)

$$(I+B)^{-1}(x+y) = x = x'.$$

Av (8) följer då

$$y \in Ax,$$

och $G(B)=G(A)$.

För att bevisa 1) $\Rightarrow$ 2) så skall vi utnyttja följande sats.

Sats 22. *Låt C vara konvex och sluten delmängd i H och A monoton operator $D(A) \to P(H)$. Då gäller att för varje $y \in H$ finns $x \in C$ så att*

$$\langle \eta + x, \xi - x \rangle \geq \langle y, \xi - x \rangle, \quad [\xi, \eta] \in G(A), \quad \xi \in C.$$

Nu följer lätt 1) $\Rightarrow$ 2).

Bevis Sats 21. 1) $\Rightarrow$ 2).

Antag det finns y sådant att $y \notin R(I + A)$. Låt $C \supseteq D(A)$ vara konvex och sluten. Då finns $x \in C$ så att

$$\langle \eta + x - y,\, \xi - x \rangle \geq 0.$$

Nu kan vi utvidga A monotont genom

$$y - x \in Ax.$$

För att bevisa Sats 22 behöver vi den välkända max-min satsen:

Proposition 23. *Låt $K_1 \subset R^n$ och $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ vara kompakta, konvexa delmängder och $f : K_1 \times K_2 \to R$ en kontinuerlig funktion sådan att*

1) För varje $y \in K_2$ är $f(\cdot, y)$ konvex på K_1.

2) För varje $x \in K_1$ är $f(x, \cdot)$ konkav på K_2.

Då finns $(x_0, y_0) \in K_1 \times K_2$ så att för varje $(x, y) \in K_1 \times K_2$

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0),$$

m.a.o. (x_0, y_0) är en sadelpunkt till f.

Bevis. Se appendix 2.

<u>Övning 8.</u> Visa propositionen ekvivalent med

$$\min_{x \in K_1} \max_{y \in K_2} f(x, y) \leq \max_{y \in K_2} \min_{x \in K_1} f(x, y).$$

Bevis Sats 22. Det räcker att titta på fallet $y = 0$, annars så betraktar vi operatorn $A - y$. Vi vill visa att mängderna

$$C[\xi, \eta] = \{x \in C; \langle \eta + x, \xi - x\rangle \geq 0\}, \quad [\xi, \eta] \in G(A),$$

har icke tomt snitt,

$$\cap_{[\xi,\eta]\in G(A)} C[\xi, \eta] \neq \emptyset.$$

Då $C[\xi, \eta]$ är begränsad är den svagt kompakt och det räcker att visa ändliga snittegenskapen hos mängderna $C[\xi, \eta], [\xi, \eta] \in G(A)$. Alltså vi skall visa

$$\cap_{i=1}^{n} C[\xi_i, \eta_i] \neq \emptyset$$

för alla uppsättningar $[\xi_i, \eta_i]_{i=1}^{n}$, $n \in N$ i $G(A)$. Låt

$$K = \{(d_1, \ldots , d_n); d_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} d_i = 1\} \subset R^n.$$

Sätt $f : K \times K \to R$

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \sum_{i=1}^{n} b_i \langle x(a) + n_i, x(a) - \xi_i\rangle, \quad a, b \in K, \\ x(a) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i \in H. \end{aligned} \tag{10}$$

f är konvex i a och linjär i b. Det finns a^0 så att

$$f(a^0, b) \leq \max_{d\in K} \min_{a\in K} f(a, d) \leq \max_{d\in K} f(d, d). \tag{11}$$

Nu visar vi att f är negativ på diagonalen

$$\begin{aligned} f(d, d) &= \sum_{i=1}^{n} d_i \langle x(d) + n_i, x(d) - \xi_i\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (d_i \langle x(d), x(d)\rangle) - \\ &- \langle x(d), \sum_{i=1}^{n} d_i \xi_i\rangle + \\ &+ \sum d_i \langle \eta_i, \sum_{j=1}^{n} d_j (\xi_j - \xi_i)\rangle = \\ &= \sum_{i,j}^{n} d_i d_j \langle n_i, \xi_j - \xi_i\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} d_i d_j \langle \eta_i - n_j, \xi_j - \xi_i\rangle \leq 0, \end{aligned}$$

då A är monoton. Av (10) och (11) fås att

$$\langle x(a^0)+n_j,\xi_j-x(a^0)\rangle\geq 0$$

för alla $j=1,\dots n$ och

$$x(a^0)\in\cap_{i=1}^n C[\xi_i,\eta_i].$$

Vår målsättning är att konstruera halvgrupper från maximala monotona operatorer på Hilbertrum. Vi skall utnyttja idéerna från Hille-Yosidas sats. För att kunna göra detta är det väsentligt att man förstår hur approximationerna

$$A_\lambda=\frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)=\frac{1}{\lambda}(I-(I+\lambda A)^{-1}),$$

konvergerar när A är en flervärd operator. Vi skall se att A_λ konvergerar mot en envärd operator A^0 på $D(A)$ kallad den minimala sektionen till A. Till att börja med studerar vi definitionsmängden $D(A)$ och värdemängden $R(A)$ för en maximal monoton operator.

Proposition 24. *Låt A vara maximal monoton och $x\in D(A)$. Då är Ax sluten och konvex.*

Bevis. Detta följer direkt ur definitionen,

$$\langle\xi-\eta,x-y\rangle\geq 0,\quad \xi\in Ax,\quad \eta\in Ay.$$

Ty olikheten gäller då ξ ersättes med konvexa kombinationer från Ax eller punkter ur höljet till Ax.

Nu följer en sats om definitionsmängden $D(A)$ till A och om hur resolventen $J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}$ beter sig då $\lambda\downarrow 0$.

Sats 25. *För A maximal monoton är $\overline{D(A)}$ konvex och*

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}J_\lambda x=Proj_D x,\quad D=\overline{D(A)}.$$

Här är $Proj_C x$ projektionen av x på C, dvs den punkt $y\in C$ som minimerar avståndet $d(x,y)=\|x-y\|$ till x. $Proj_C x$ är unik då $X=H$ Hilbertrum. För att bevisa satsen behöver vi ett tekniskt lemma.

Lemma 26. *Antag att $[x_n,y_n]\in G(A)$ och att $(x_n)_1^\infty$, $(y_n)_1^\infty$ konvergerar svagt*

$$x_n\to x,\quad y_n\to y\quad då\quad n\to\infty.$$

Om dessutom

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_n,y_n\rangle\leq\langle x,y\rangle,$$

så gäller $[x,y]\in G(A)$ och

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n,y_n\rangle=\langle x,y\rangle.$$

Anmärkning 27. Lemmat medför att $G(A)$ är sluten i $H_\omega\times H$ och $H\times H_\omega$, där H_ω är H med svaga topologin.

Bevis av lemmat. Tag $[\xi,\eta]\in G(A)$. Då A är monoton följer

$$0\le\langle\eta-y_n,\xi-x_n\rangle=\langle\eta,\xi\rangle-\langle\eta,x_n\rangle-\langle y_n,\xi\rangle+\langle y_n,x_n\rangle. \tag{12}$$

Lim sup av detta ger

$$\langle\eta-y,\xi-x\rangle\ge 0,$$

och då A maximal monoton följer

$$[x,y]\in G(A).$$

Låt $\eta=y$ och $\xi=x$ och tag lim inf i (12),

$$\liminf\langle y_n,x_n\rangle\ge\langle x,y\rangle$$

och vi har $\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n,y_n\rangle=\langle x,y\rangle$.

Bevis av Sats 25. Sätt $C=\overline{\text{konv }D(A)}$, slutna höljet av konvexa höljet av $D(A)$. Vi skall visa $C\subset\overline{D(A)}$, vilket medför $\overline{D(A)}$ konvex. För att kunna göra detta visar vi först hur $J_\lambda x$ konvergerar. Låt

$$x_\lambda=J_\lambda x=(I+\lambda A)^{-1}x\in D(A)$$

i) $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$ begränsad.

Vi har

$$\frac{1}{\lambda}(x-x_\lambda)\in Ax_\lambda.$$

Med $[\xi,\eta]\in G(A)$ fås

$$\langle\frac{1}{\lambda}(x-x_\lambda)-\eta,\quad x_\lambda-\xi\rangle\ge 0,$$

$$\langle x-x_\lambda-\lambda\eta,\, x_\lambda-\xi\rangle\ge 0. \tag{13}$$

Detta ger

$$\|x_\lambda\|^2\le\langle x_\lambda,\xi-x-\lambda\eta>-\langle x-\lambda\eta,\xi\rangle\le C'(\|x_\lambda\|+1),$$

alltså $\{x_\lambda\}$ begränsad.

ii) $\{x_\lambda\}$ konvergerar svagt mot $x_0\in C$. Då $\{x_\lambda\}$ begränsad kan vi välja delsekvens $\{x_{\lambda_n}\}$ som konvergerar svagt, säg

$$x_{\lambda_n}\to x_0,\quad \lambda_n\downarrow 0.$$

Vi har $x_0 \in C$, då starkt och svagt sluten är ekvivalent för konvexa mängder.

iii) $x_0 = \mathrm{Proj}_C x$, $C = \overline{\text{konv } D(A)}$.

Från (13) fås

$$\begin{aligned} & -\lambda\langle \eta, x_\lambda - \xi\rangle + \langle x, x_\lambda - \xi\rangle + \langle x_\lambda, \xi\rangle \geq \\ & \|x_\lambda\|^2, \quad \xi \in D(A), \quad n \in A\xi. \end{aligned} \tag{14}$$

Från den svaga konvergensen har vi

$$\liminf_{\lambda_n \downarrow 0} \|x_{\lambda_n}\| \geq \|x_0\|.$$

Detta och (14) medför

$$\langle x, x_0 - \xi\rangle + \langle x_0, \xi\rangle \geq \|x_0\|^2,$$

alltså

$$\langle x - x_0, x_0 - \xi\rangle \geq 0, \quad \xi \in D(A).$$

Denna olikhet är linjär i ξ, och den håller då för alla $\xi \in C$. Olikheten betyder att man kan dra ett stödplan genom x_0 som har $x - x_0$ som normal, dvs

$$x_0 = \mathrm{Proj}_C x.$$

Då alla delföljder ur $\{x_\lambda\}_{\lambda=0}$ som konvergerar svagt konvergerar mot $\mathrm{Proj}_C x$, så konvergerar $\{x_\lambda\}$ svagt mot $\mathrm{Proj}_C x$.

iv) x_λ konvergerar starkt mot $x_0 - 0$. Då vi har svag konvergens räcker det att visa att normerna konvergerar

$$\|x_\lambda\| \to \|x_0\|.$$

Vi har

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \|x_\lambda\| \geq \|x_0\|$$

och av (14) följer

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \|x_\lambda\|^2 \leq \langle x, x_0 - \xi\rangle + \langle x_0, \xi\rangle, \quad \text{för alla} \quad \xi \in C.$$

Alltså $x_\lambda \to x_0$.

v) $C = \overline{\text{konv } D(A)} \subset \overline{D(A)}$.

Tag $x \in C$ då $x_\lambda \in D(A)$ och $x_\lambda \to x$ fås $x \in \overline{D(A)}$. $\square$

Vi skall nu studera approximationerna till A

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda), \quad \lambda > 0$$
$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}, \quad \lambda > 0.$$

Den minimala sektionen till A är

$$A^0 x = \mathrm{Proj}_{Ax} 0,$$

alltså det element i Ax med minsta norm. De viktigaste egenskaperna hos A_λ ges i följande sats.

Sats 28. *1) A_λ är maximal monoton och Lipschitzkontinuerlig på H.*

2) $(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\nu}$.

3) För $x \in D(A)$ gäller $A_\lambda x \to A^0 x, \quad \lambda \to 0$, och $\|A_\lambda x\| \uparrow \|A^0 x\|$, $\lambda \downarrow 0$.

4) $x \notin D(A)$ så $\|A_\lambda x\| \uparrow \infty$, $\lambda \downarrow 0$.

Bevis av 2). Man inser lätt att följande påstående är ekvivalenta

$$\begin{aligned} y &= A_\lambda x \\ \lambda y &= x - J_\lambda x, \\ J_\lambda x &= x - \lambda y, \\ x &\in (I + \lambda A)(x - \lambda y), \\ x &\in x - \lambda y + \lambda A(x - \lambda y), \\ y &\in A(x - \lambda y), \end{aligned}$$

$$A_\lambda x \in A J_\lambda x. \tag{15}$$

Tillämpas detta på $(A_\lambda)_\mu$ så får man ekvivalenserna

$$\begin{aligned} y &= (A_\lambda)_\mu x, \\ y &= A_\lambda(x - \mu y), \\ y &\in A(x - \mu y - \lambda y), \\ y &= A_{\lambda+\mu} x. \end{aligned}$$

Bevis av 1). Först visar vi att A_λ är Lipschitz-kontinuerlig. Vi utnyttjar $I = \lambda A_\lambda + J_\lambda$ och

$$\begin{aligned} &\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \|x - y\| \geq \langle A_\lambda x - A_\lambda y, x - y\rangle = \\ &\langle A_\lambda x - A_\lambda y, \lambda(A_\lambda x - A_\lambda y\rangle + J_\lambda x - J_\lambda y\rangle = \\ &= \lambda \|A_\lambda x - A_\lambda y\|^2 + \langle A_\lambda x - A_\lambda y,\ J_\lambda x - J_\lambda y\rangle \geq \lambda \|A_\lambda x - A_\lambda y\|^2, \end{aligned}$$

där sista olikheten följer av att A är monoton och $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, enligt (15). Alltså

$$\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x-y\|.$$

Antag $[\xi,\eta] \in H \times H$ och

$$\langle \eta - A_\lambda x, \xi - x\rangle \geq 0, \quad x \in H.$$

Tillämpa denna olikhet på $x_t = (1-t)\xi + tx$

$$\langle \eta - A_\lambda x_t,\, t\xi - tx\rangle \geq 0$$
$$\langle \eta - A_\lambda x_t,\, \xi - x\rangle \geq 0, \quad x \in H.$$

Låter man $t \to 0$ så får man

$$\langle \eta - A_\lambda \xi,\, \xi - x\rangle \geq 0 \quad \text{för alla} \quad x \in H.$$

Alltså är $A_\lambda \xi = \eta$ och A_λ är maximal monoton.

Bevis av 3). Vi har $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$ och $A^0 x \in Ax$, då $x \in D(A)$. Det följer

$$\langle A^0 x - A_\lambda x,\, x - J_\lambda x\rangle \geq 0.$$

Definition av A_λ ger nu

$$\|A_\lambda x\|^2 \leq \langle A^0 x, A_\lambda x\rangle$$

vilket blir

$$\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|. \tag{16}$$

På liknande sätt erhålles

$$\|A_{\lambda+\mu} x\|^2 \leq \langle A_\lambda x, A_{\lambda+\mu} x\rangle \tag{17}$$

och

$$\|A_{\lambda+\mu} x\| \leq \|A_\lambda x\| \quad \lambda,\mu > 0.$$

Alltså $\|A_\lambda x\|$ är växande då $\lambda \downarrow 0$.

För att visa konvergens, visar vi att $\{A_\lambda x\}_{\lambda>0}$ är en Cauchysekvens då $x \in D(A)$. Av (16) och (17) följer

$$\begin{aligned}
&\|A_{\lambda+\mu} - A_\lambda x\|^2 = \\
&\|A_{\lambda+\mu} x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2\langle A_{\lambda+\mu} x, A_\lambda x\rangle \leq \\
&\leq \|A_\lambda x\|^2 - \|A_{\lambda+\mu} x\|^2
\end{aligned}$$

vilket går mot noll då $\lambda,\mu \downarrow 0$. Alltså existerar $y = \lim_{\lambda\downarrow 0} A_\lambda x$, $x \in D(A)$. Då i) $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, ii) $J_\lambda x \to x, \lambda \to 0 \quad x \in D(A)$, iii) grafen av A är sluten, och iv) $\|y\| \leq \|A^0 x\|$, är

$$y = A^0 x.$$

Bevis av 4). Av de föregående räkningarna följer mera allmänt; om $\{A_\lambda x\}_{\lambda>0}$ är begränsad så existerar $y = \lim_{\lambda\downarrow 0} A_\lambda x$. Då gäller

$$x - J_\lambda x = \lambda A_\lambda x \to 0, \quad \lambda \downarrow 0$$

och $J_\lambda x \to x$ och $y \in Ax$. Alltså $\|A_\lambda x\| \uparrow \infty, \quad \lambda \downarrow 0$ om $x \notin D(A)$.

Definition 29. En envärd operator A' kallas *principal sektion* till A om

$$\begin{aligned} G(A') &= G(A), \\ D(A') &= D(A), \end{aligned}$$

och om $[x, y] \in \overline{D(A) \times H}$,

$$\langle A'\xi - y, \xi - x\rangle \geq 0, \quad \text{för alla} \quad \xi \in D(A)$$

medför $y \in Ax$.

Proposition 30. *$A^0 = Proj_{Ax} 0$ är principal sektion till A.*

Bevis. Låt

$$M = \{[x, y] \in \overline{D(A) \times H}; \langle A^0\xi - y, \xi - x\rangle \geq 0 \quad \text{för alla} \quad \xi \in D(A)\}.$$

Man ser $A \subset M$. Vi skall visa $A = M$. Då A maximal monoton räcker det att visa M monoton. Tag $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in M$ och sätt $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Det gäller

$$\begin{aligned} \langle y_1 - A^0\xi, \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) + x - \xi\rangle &\geq 0, \\ \langle y_2 - A^0\xi, -\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) + x - \xi\rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Summera dessa olikheter,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle - 2\langle A^0\xi, x - \xi\rangle + \\ &+ \langle y_1 + y_2, x - \xi\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Sätt $\xi = J_\lambda x$. Vi vet $J_\lambda x \to x$ då $\lambda \downarrow 0$, ty $x \in \overline{D(A)}$. Nu är $x - \xi = x - J_\lambda x = \lambda A_\lambda x \in \lambda A J_\lambda x$ och

$$A^0\xi = A^0 J_\lambda x$$

är minimalt element i $AJ_\lambda x$. Alltså blir

$$\langle A^0\xi, x - \xi\rangle = \langle A^0 J_\lambda x, \lambda A_\lambda x\rangle \geq 0.$$

Låt $\lambda \to 0$ och man får

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0.$$

Korollorium 31. Om A och B är maximala monotona operatorer med

$$D(A) = D(B) \quad \text{och} \quad A^0 = B^0$$
$$\text{så är} \quad A = B.$$

Definition 32. En operator B är *lokalt begränsad i* x_0 om det finns en omgivning U_0 av x_0 så att

$$\cup_{x \in U_0 \cap D(B)} Bx$$

är begränsad. B är *lokalt begränsad* om B är lokalt begränsad i varje punkt i $\overline{D(B)}$.

Sats 33. *Låt A vara maximal monoton operator. Då är*

$$R(A) = H,$$

ekvivalent med

$$A^{-1} \quad \text{är lokalt begränsad.}$$

Anmärkning. Ett naturligt villkor som gör A^{-1} lokalt begränsad är

$$\lim_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\| \to \infty}} \frac{\|A^0 x\|}{\|x\|} = +\infty.$$

Bevis. $\Leftarrow$ Vi visar $R(A)$ öppen och sluten.

1) $R(A)$ är sluten. Tag $y_n \in R(A)$ med $y_n \to y_0$. Det finns x_n så att $[x_n, y_n] \in G(A)$. Då $\cup_{n \geq 1} A^{-1} y_n$ är begränsad finns $C > 0$ så att $\|x_n\| < C$, $n \geq 1$. Vi kan välja delsekvens x_i som konvergerar svagt mot, säg x_0. Anmärkning 28 säger att grafen är sluten i $H_\omega \times H$ och vi har $y_0 \in R(A)$.

2) $R(A)$ är öppen. Tag $y_0 \in R(A)$ och $\rho > 0$, så att

$$\cup_{\substack{|y - y_0| < \rho \\ y \in R(A)}} A^{-1} y$$

är begränsad. Värdemängden $R(\varepsilon I + A) = H$. Alltså finns x_ε så att

$$y + \varepsilon x_0 \in \varepsilon x_\varepsilon + A x_\varepsilon,$$

där $x_0 \in A^{-1} y_0$. Vi vill visa att för alla $y, \|y - y_0\| < \rho$ finns $x \in D(A)$ så att $y \in Ax$. Då grafen av A är sluten i $H_\omega \times H$ (se Anmärkning 28) räcker det att visa $\{x_\varepsilon\}_{0 \leq \varepsilon \leq 1}$ är begränsad. Sätt

$$z_\varepsilon = y + \varepsilon(x_0 - x_\varepsilon) \in A x_\varepsilon.$$

Vi har $x_\varepsilon \in A^{-1}z_\varepsilon$, och $\{x_\varepsilon\}$ är begränsad om $\{z_\varepsilon\} \subset \{y : \|y_0 - y\| < \rho\}$. Monotonisiteten ger

$$\langle y_0 - z_\varepsilon, \varepsilon(x_0 - x_\varepsilon)\rangle \geq 0.$$

Då har vi

$$\begin{aligned}\langle y_0 - z_\varepsilon, \varepsilon(x_0 - x_\varepsilon)\rangle &= \langle y_0 - z_\varepsilon, z_\varepsilon - y\rangle \\ &= \langle y_0 - z_\varepsilon, z_\varepsilon - y_0 + y_0 - y\rangle \\ &= -\|y_0 - z_\varepsilon\|^2 + \langle y_0 - z_\varepsilon, y_0 - y\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

vilket ger

$$\|y_0 - z_\varepsilon\| \leq \|y_0 - y\| < \rho.$$

$\Rightarrow$ Följer av resonemang med Baires kategorisats. Se H. Brezis Operateurs. Maximaux Monotones. s. 31.

En icke linjär maximal monoton operator A är generator till en kontraktiv halvgrupp. Konstruktionen av halvgruppen från A sker analogt med det linära fallet från Hille-Yosidas sats. Vi skall även formulera omvändningen till detta; en kontraktiv halvgrupp på ett Hilbertrum har en maximal monoton operator som generator. För flervärda operatorer så får evolutionsekvationen följande utseende

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Icke-linjariteten ställer till en del problem. För linjära operatorer var lösningen $t \to u(t)$ i C^1, då begynnelsevärdet $u_0 \in D(A)$. Det behöver ej vara fallet för icke linjära A.

Exempel 34. Tag $A : R \to R$ som

$$At = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Ekvationen

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0, \\ u(0) = r, \end{cases}$$

har lösningen

$$u(t) = \begin{cases} r, & r \leq 0 \\ (r-t)^+, & r > 0, \end{cases}$$

som ej är C^1 för positiva begynnelsevillkor.

Vi behöver alltså en svagare tolkning av att u löser evolutionsekvationen. Vi skall visa att lösningen till vår evolutionsekvation är Lipschitzkontinuerlig. Det vore bra om man kunde utnyttja följande idé från reella analysen. En funktion $f : R \to R$ som är Lipschitzkontinuerlig är absolutkontinuerlig och därför integralen av sin "derivata"

$$f = f(0) + \int_0^t f'.$$

Detta är ej sant i alla Banachrum, men i reflexiva gäller följande proposition, vilken vi lämnar som övning att bevisa.

Proposition 35. *Låt X vara reflexivt Banachrum. Om $f : [0, +\infty[\to X$ är Lipschitzkontinuerlig, så är f deriverbar och*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds.$$

Övning 8. Visa propositionen.

I c_0 har vi följande motexempel.

Exempel 36. I Banahrummet c_0,

$$c_0 = \{(\xi_n)_1^\infty ; \xi_n \in \mathbb{C}, \xi_n \to 0, \|(\xi_n)_1^\infty\| = \sup_{n\geq 1} |\xi_n|\},$$

är

$$f(t) = \left(\frac{e^{\mathrm{int}}}{n}\right)_1^\infty,$$

Lipschitz kontinuerlig, men saknar derivata.

Hilbertrum är reflexiva och för maximal monotona operatorer kan vi visa existens av lösningar till vår evolutionsekvation.

Sats 37. *För $A : D(A) \to H$, maximal monoton, finns för alla $u_0 \in D(A)$ en funktion $u : [0, \infty[\to H$, som uppfyller*

1) *$u(t) \in D(A)$, $t \geq 0$.*
2) *$t \to u(t)$ är Lipschitzkontinuerlig och $\|\frac{du}{dt}\| \leq \|A^0 u_0\|$ n.a. t.*
3) $\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0,\ t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$
4) *u är entydigt bestämd av 1), 2) och 3).*

5) *För två lösningar u och $\tilde{u}$ med begynnelsevärde u_0 och $\tilde{u}_0$ gäller*

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\| \le \|u_0-\tilde{u}_0\|,\ t \ge 0.$$

6) *$u(t)$ har högerderivata för alla $t \ge 0$, och $D^+u(t)+A^0u(t)=0$, $t \ge 0$.*

7) *$t \to A^0u(t)$ är högerkontinuerlig och $t \to \|A^0u(t)\|$ är avtagande.*

Vi visar först entydigheten och kontraktiviteten.

Bevis av 4) och 5). Då $-\dfrac{du}{dt} \in Au$, gäller

$$\langle -\frac{du}{dt}+\frac{d\tilde{u}}{dt}, u(t)-\tilde{u}(t)\rangle \ge 0$$

vilket medför

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-\tilde{u}(t)\| \le 0.$$

Detta visar 4) och 5).

För att visa existensen studerar vi approximationerna A_λ. Kom ihåg:

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda),$$

är maximal monoton och Lipschitzconitnuerlig,

$$J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1},$$

resolventen till A är kontraktiv och envärd, och

$$A_\lambda x \in AJ_\lambda x,\ x \in H.$$

Då A_λ Lipschitzkontiuerlig existerar en entydig lösning $t \to u_\lambda(t)$, $t \ge 0$ till

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt}+A_\lambda u_\lambda = 0, & t \ge 0, \\ u_\lambda(0)=u_0 & . \end{cases}$$

Vi skall visa $t \to u_\lambda(t)$ är Lipschitzkontinuerlig likformigt i λ. Då A_λ monoton följer analogt med 5)

$$\|\tilde{u}_\lambda(t)-u_\lambda(t)\| \le \|\tilde{u}_\lambda(0)-u_\lambda(0)\|.$$

Tag $\tilde{u}_\lambda(t) = u_\lambda(t+h)$, då får man

$$\|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)\| \leq \|u_\lambda(h) - u_\lambda(0)\|$$

och

$$\|A_\lambda u_\lambda(t)\| = \left\|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right\| \leq \left\|\frac{du_\lambda(0)}{dt}\right\| = \|A_\lambda u_0\| \leq \|A^0 u_0\|$$

där sista olikheten är visad i Sats 28. Alltså är $t \to u_\lambda(t)$ likformigt Lipschitzkontinuerlig. Nästa steg blir att visa $u_\lambda(t)$ är Cauchysekvens då $\lambda \to 0$. För u_λ och u_μ med begynnelsevärde u_0 gäller

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0.$$

Tag skalärprodukt med $u_\lambda - u_\mu$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 = -\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu,\, u_\lambda - u_\mu\rangle.$$

Nu skall vi uppskatta termen i högerleder. Skriv om,

$$\begin{aligned} u_\lambda - u_\mu &= u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\mu u_\mu - u_\mu + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu \\ &= \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu. \end{aligned}$$

Då $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$ och A monoton fås

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle &\geq \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\rangle \\ &= \lambda\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \mu\|A_\mu u_\mu\|^2 - (\lambda+\mu)\langle A_\lambda u_\lambda, A_\mu u_\mu\rangle \\ &\geq -(\lambda+\mu)(\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \|A_\mu u_\mu\|^2) \\ &\geq -2(\lambda+\mu)\|A^0 u_0\|. \end{aligned}$$

Alltså

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq 4(\lambda+\mu)\|A^0 u_0\|^2,$$

eller

$$\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq 4(\lambda+\mu)t\|A^0 u_0\|^2.$$

Denna olikhet ger att $u_\lambda(t)$ är Cauchy sekvens för alla $t \geq 0$.

Bevis av 2). Nu låger vi $u(t)$ vara gränsvärdet

$$u(t) = \lim_{\lambda \downarrow 0} u_\lambda(t), \quad t \geq 0.$$

Då $t \to u_\lambda(t)$ Lipschitskontinuerlig och

$$\left\|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right\| \leq \|A^0 u_0\|,$$

likformigt i λ följer 2).

Bevis av 1). $u(t) \in D(A), \quad t \geq 0.$

Det gäller

$$\|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|A^0 u_0\|, \quad t \geq 0.$$

och $A_\lambda u_\lambda(t) \in AJ_\lambda u_\lambda(t)$. Dessutom går $J_\lambda u_\lambda(t)$ mot $u(t)$ då $\lambda \downarrow 0$ ty

$$J_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda(t) = \lambda A_\lambda u_\lambda(t) \to 0, \quad \lambda \downarrow 0.$$

Nu kan vi utnyttja att $G(A)$ är sluten i $H \times H_\omega$ och

$$u(t) \in D(A), \quad t \geq 0.$$

Det vi har hittills räcker inte riktigt för att visa $u(t)$ är lösning till evolutionsekvationen. Vi har bara att

$$\frac{du_\lambda(t)}{dt} \quad \text{och} \quad A_\lambda u_\lambda(t)$$

konvergerar svagt. Man behöver följande finess.

Låt I vara begränsat intervall. För A operator på $D(A) \subset H$ definierar vi A_I på $D(A_I) \subset L^2(I, H)$, där

$$D(A_I) = \{u \in L^2(I, H); u(t) \in D(A) \quad \text{n.a.} \quad t \in I\},$$

genom

$$(A_I u)(t) = Au(t), \quad \text{n.a.} \quad t \in I.$$

Man ser

$$[u, v] \in G(A_I),$$

är ekvivalent med

$$[u(t), v(t)] \in G(A), \quad \text{n.a.} \quad t.$$

Några egenskaper hos A_I ges i följande övning.

Övning 9. 1) Visa A maximal monoton medför A_I maximal monoton.

2) Visa $(A_I)_\lambda = (A_\lambda)_I$.

Nu kan vi visa, att u är lösning till evolutionsekvationen.

Bevis av 3). $\dfrac{du}{dt} + Au \ni 0$, $t \geq 0$. Då $u_\lambda(t) \to u(t)$, $t \in I \subset [0, \infty[$ följer

$$u_\lambda \to u \text{ i } L^2(I, H).$$

Då $\|\dfrac{du_\lambda(t)}{dt}\| \leq \|A^0 u_0\|$, $\quad t \in I$ följer att $\dfrac{du_\lambda}{dt}$ har delsekvens som konvergerar svagt i $L^2(I, h)$, säg

$$\frac{du_{\lambda_j}}{dt} \to v \quad \text{svagt}, \quad L^2(I, H).$$

Dessa konvergenser medför

$$u_\lambda(t) = u_0 + \int_0^t \frac{du_x}{dt} \to u_0 + \int_0^t v$$

och

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v.$$

Utnyttja $G(A_I)$ sluten i $L^2(I, H) \times (L^2(I, H))$. Då fås

$$[u, \frac{du}{dt}] \in G(A_I)$$
$$[u(t), \frac{du}{dt}(t)] \in G(A), \quad \text{n.a.} \quad t \geq 0,$$

vilket skulle visas.

Bevis av 7). $t \to \|A^0 u(t)\|$ är avtagande ty $\|A_\lambda u_\lambda(t + h)\| \leq \|A^0 u(t)\|$, $t, h > 0$ och $A_\lambda u_\lambda(t)$ går svagt mot $y \in Au(t)$, alltså $\|A^0 u(t + h)\| \leq \|A^0 u(t)\|$. $t \to A^0 u(t)$ är högerkontinuerlig. Tag $t_n \to t$ från höger så att $A^0 u(t_n)$ konvergerar svagt mot ξ. Då u Lipschitskontinuerlig gäller $u(t_n) \to u(t)$. Utnyttja att grafen $G(A)$ är sluten i $H \times H_\omega$, detta ger $\xi \in Au(t)$. Då $\|A^0 u(t)\|$ avtagande får man $\|\xi\| \leq A^0 u(t)$, vilket ger $\xi = A^0 u(0)$.

Bevis av 6). $u(t)$ är högerderiverbar. Det gäller

$$\frac{du}{dt}(t) = -A^0 u(t) \quad \text{n.ö.},$$

ty u är deriverbar n.ö., $\dfrac{du}{dt}(t) \in Au(t)$, n.ö. och $\|\dfrac{du}{dt}(t)\| \leq \|A^0 u(t)\|$, n.ö. Man får

$$u(t) = u(0) + \int_0^t A^0 u(s) ds$$

vilket gör att u högerderiverbar, ty $A^0 u$ högerkontinuerlig.

Nu följer omvändningen till Sats 37,

Sats 38. *Låt C vara sluten konvex delmängd i Hilbertrummet H och låt $S(t), t \geq 0$, vara kontinuerlig, kontraktiv halvgrupp på C*

$$S(t) : C \to C, \quad t \geq 0.$$

Då finns en operator A som är maximal monoton med $D(A) \subset C$ och $\overline{D(A)} = C$, så att S genereras av A enligt Sats 37, d.v.s. för $x \in D(A)$ är $u(t) = S(t)x$ lösning till

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &\ni 0 \\ u(0) &= x \end{aligned}$$

För bevis se H. Brezis [1].

Som vi ser är förståelsen av evolutionsekvationer, med maximal monotona operatorer på Hilbertrum, så gott som perfekt. Tyvärr har man inte kommit lika långt med Banachrumsteorin. Detta skall vi titta på i nästa kapitlet där vi studerar ackretiva opertorer i Banachrum.

Referens till Kapitel 3.

[1] H. Brezis, Operateurs Maximaux Monotones, Math. Studies, 5, North Holland, 1973.

4 Ackretiva operatorer

Vi skall nu behandla halvgrupper på Banachrum. Vi når inte särskilt långt med den abstrakta teorin. Detta beror på att man inte har kunnat utveckla (finns inte?) någon generell användbar definition av svag lösning till evolutionsekvationer i icke reflexiva Banachrum. En anledning till detta är att Lipschitzkontinuitet ej medför deriverbarhet, se Exempel 36. En annan otrevlighet som dyker upp är att en halvgrupp på ett Banachrum ej behöver ha generator.

Exempel 39. Tag som konvex mängd

$$K = \{f \in C[0,1]; 0 \leq f(x) \leq x\},$$

i Banachrummet $C[0,1]$ med supremum norm. Låt $S(t), t \geq 0$, vara

$$S(t)f(x) = \min(x, t + f(x)), \quad x \in [0,1],\ t \geq 0.$$

Det är klart att S är kontinuerlig halvgrupp. Men $S(t)f$ är högerderiverbar i $t = 0$ endast då $f(x) = x$. Ty låt $\Omega = \{x \in [0,1], f(x) < x\}$. För $x \in \Omega$ blir derivatan till $S(t)f$ i $t = 0$,

$$g(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f(x) - f(x)}{t} = 1.$$

Medan derivatan för $x \notin \Omega$ blir

$$g(x) = 0.$$

Då 0 inte tillhör Ω för något f, blir $S(t)f$ ej deriverbar i $t = 0$, om inte $\Omega = \emptyset$, alltså $f(x) = x$, $x \in [0,1]$.

Det finns mer komplicerade och djupare exempel som visar på denna typ av svårighet med halvgrupper i Banachrum.

Från och med nu är X ett Banachrum. Om C är en delmängd av X så betecknar $Q(C)$ mängden av kontinuerliga halvgrupper på C, d.v.s.

$$\begin{aligned} S(t) : C \to C, &\quad t \geq 0, \\ S(t+s) = S(t)S(s), &\quad t, s \geq 0 \\ \lim_{t \downarrow 0} S(t)x = S(0)x = x, &\quad x \in C \end{aligned}$$

En avbildning A är som förut flervärd

$$A : D(A) \to P(X) - \{\emptyset\},$$

där $D(A) \subset X$ och $P(X)$ är klassen av alla delmängder av X.

Definition 40. En operator A är *ackretiv* om $(I + \lambda A)^{-1}$ är kontraktion för alla $\lambda > 0$. A kallas *m-ackretiv* om $(I + \lambda A)^{-1}$ är kontraktion på X.

Anmärkning. Accretive betyder klibbig.

Vi skall titta på några exempel.

Exempel 41. Låt $X = L^1(0,1)$.

Betrakta evolutionsekvationen

$$\begin{aligned} u_t + (\varphi(u))_x = 0 &\quad 0 < x < 1,\, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & \\ u(t,0) = 0 & \end{aligned}$$

Där $\varphi \in \Phi = \{\varphi : R \to R; \varphi(R) = R, \varphi(0) = 0,\ \varphi \text{ kontinuerlig, strängt växande}\}$.

Operatorn A är i detta fall

$$Au = (\varphi(u))_x$$

med

$$D(A) = \{u \in L^1(0,1) : u(0) = 0, \varphi(u) \text{ absolutontinuerlig}\}.$$

A är m-ackretiv på $L^1(0,1)$, alltså $(I + \lambda A)^{-1}$ är kontraktion på $L^1(0,1)$ för alla $\lambda > 0$. Det räcker att visa detta för $\lambda = 1$, annars kan man studera $\lambda\varphi$.

1) Kontraktivitet. Vi skall visa

$$\|f - g + Af - Ag\| \geq \|f - g\|.$$

Observera att sign $(f - g) =$ sign $(\varphi(f) - \varphi(g))$ och låt p_n,

$$p_n(u) = \begin{cases} \text{sign} u & |u| < 1/n \\ nu & |u| \leq 1/n \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

vara approximation till sign.

Låt J_n vara primitiv funktion till p_n

$$J_n(u) = \int_0^u p_n(u)dt.$$

Vi ser $J_n(0) = 0$ och $J_n(u) \geq 0$ för alla u. Nu har vi

$$\begin{aligned} &\|f - g + Af - Ag\|_{L^1(0,1)} \geq \\ &\geq \int_0^1 p_n(\varphi(f) - \varphi(g))\{f - g + (\varphi(f) - \varphi(g))_x\} = \\ &= \int_0^1 p_n(f - g)\{f - g\} + J_n(\varphi(f) - \varphi(g))|_0^1. \end{aligned}$$

Här är andra termen positiv och första termen konvergera mot $\|f - g\|_{L^1(0,1)}$ då $n \to \infty$. Detta visar $(I + \lambda A)^{-1}$ kontraktiv.

2) $(I + \lambda A)^{-1}$ är definierad på hela X. Vi visar givet $h \in L^1(0,1)$ finns $u \in D(A)$ så

$$u + (\varphi(u))_x = h.$$

Sätt $\beta = \varphi^{-1}$ observera $\beta \in \Phi$ och sätt $v = \varphi \circ U$. Vi söker v så att

$$\begin{aligned} \beta(v) + v_x &= h \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Då β strikt växande är det klart att det existerar en lösning om β är C^∞. Annars approximerar vi β med

$$\beta_k \in C^\infty(R) \cap \Phi, \quad \text{så att}$$

$\beta_k \to \beta$ likformigt på kompakter. Låt v_k vara lösningen till (18) med $\beta = \beta_k$. Om $\varphi_k = \beta_k^{-1} \in \Phi$ så är A_k, $A_k u = (\varphi_k(u))_x$ ackretiv och

$$\int_0^1 |u_k| \leq \int_0^1 |u_k + A_u u_k - 0 - A_k 0| = \int_0^1 |h|.$$

Nu får vi att v_k är likformigt begränsad

$$\begin{aligned} |v_k(x)| &\leq \int_0^x |(v_k)_x(s)|ds \leq \int_0^1 |(v_k)_x| = \int_0^1 |A_k u_k| \leq \\ &\leq \int_0^1 |h| + \int_0^1 |u_k| \leq 2\int_0^1 |h|, \quad x \in [0,1], \end{aligned}$$

för alla k. Då gäller

$$\|\beta_k \circ v_k\|_{L^\infty} \leq M, \quad \text{alla} \quad k,$$

och $\{v_k\}$ blir ekvikontinuerlig i $C[0,1]$. Vi kan nu välja delföljd v_j som konvergerar mot något v i $C[0,1]$ och genom gränsövergång i

$$v_j(x) = \int_0^x h(s)ds - \int_0^x \beta_j \circ v_j(s)ds$$

får vi att v är absolut kontinuerlig och $\beta \circ v + v_x = h$. Detta ger att $(I + \lambda A)^{-1}$ är definierad på hela $L^1[0,1]$.

Exempel 42. Låt fortfarande $X = L^1[0,1]$ men sätt evolutionsekvationen till

$$\begin{aligned} u_t - (\varphi(u))_{xx} &= 0, && x \in [0,1],\ t \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, && t \geq 0 \end{aligned}$$

med samma typ av φ som i förra exemplet, dvs

$$\begin{aligned} \Phi = \{\varphi : R \to R, \quad \varphi(R) = R, \quad \varphi(0) = 0 \\ \varphi \text{ kontinuerlig, sträng växande}\}. \end{aligned}$$

Den här typen av ekvationer dyker upp exempelvis i Stefan-problemet, där det gäller att studera formen hos en smältande kropp. I detta fall utnyttjar man $\varphi(u) = (u-1)^+$.

Operatorn A är nu

$$Au = -(\varphi(u))_{xx}$$

med

$$\begin{aligned} D(A) = \{u \in L^1[0,1]; u(0) = 0,\ u(1) = 0, \\ \varphi(u),\ (\varphi(u))_x \text{ absolut kontinuerlig på } [0,1]\}. \end{aligned}$$

Vi visar $(I + \lambda A)^{-1}$ är kontraktion. Här kan man använda samma teknik som i förra exemplet. Kom ihåt $|p_n| < 1$ och $p_n \to \operatorname{sign}$ då $n \to \infty$. Nu får vi

$$\begin{aligned} \|f - g + Af - Ag\| \geq \int p_n(\varphi(f) - \varphi(g))\{f - g\} + \\ \int p_n(\varphi(f) - \varphi(g))\{Af - Ag\}. \end{aligned}$$

Första integralen går mot $\|f - g\|$ då $n \to \infty$, och den andra är positiv, ty efter en partialintegrering får man

$$\int_0^1 (p_n)_x(\varphi(f) - \varphi(g))\{(\varphi(f) - \varphi(g))_x\}^2 \geq 0,$$

då $(p_n)_x \geq 0$.

Övning 10. Visa A, $Au = -(\varphi(u))_{xx}$ är m-ackretiv, då $\varphi \in \Phi$.

Vi har sett två exempel med m-ackretiva operatorer och denna typoperator finns med i många evolutoinsekvationer med intressanta tillämpningar. Följande sats säger att en m-ackretiv operator genererar en halvgupp. Men kom ihåg att detta inte ger någon lösning till en evolutionsekvation med en m-ackretiv operator, då man ej generellt vet att motsvarande halvgrupp är deriverbar.

Sats 43. *Om A är ackretiv operator med $R(I + \lambda A) \supseteq \overline{D(A)}$ för alla $\lambda \in (0, \lambda_0)$, något $\lambda_0 > 0$, så existerar*

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty} \big(I + \frac{tA}{n}\big)^{-n} x,$$

för alla $t > 0$ och alla $x \in \overline{D(A)}$, och S är en kontraktiv halvgrupp på $\overline{D(A)}$. Vidare är $t \to S(t)x$ Lipschitzkontinuerlig.

För att bevisa Sats 43 behöver vi några lemmor som ger uppskattningar av resolventen J_λ till A. Vi antar för enkelhets skull att A är m-ackretiv.

Lemma 44. *För $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$, $\lambda > 0$ och A ackretiv gäller med $x, y \in R(I + \lambda A)$,*

1) $\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leq \|x - y\|$.

2) $\|J_\lambda x - x\| \leq \lambda |Ax|$, *där* $|Ax| = \inf\{\|y\|; y \in Ax\}$.

3) $\|J_\lambda^n x - x\| \leq n\|J_\lambda x - x\|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4) $J_\lambda x = J_\mu\big(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\big)$.

Bevis. 1) Detta är villkoret för att A är ackretiv.

2) Sätt $p = J_\lambda x$, då finns $q \in Ap$ så att $x = p + \lambda q$. Med $y \in Ax$ gäller

$$\|J_\lambda x - x\| = \|p - x\| = \|J_\lambda(p + \lambda q) - J_\lambda(x + \lambda y)\| \leq \|p + \lambda q - x - \lambda y\| = \lambda \|y\|.$$

3) Då $J_\lambda^k, k = 1, 2, 3, \ldots$ är kontraktion får man

$$\|J^n x - x\| = \|\sum_{m=1}^{n} J_\lambda^m x - J_\lambda^{m-1} x\| \leq \sum_{m=1}^{n} \|J_\lambda x - x\| = n\|J_\lambda x - x\|.$$

4) Sätt $J_\lambda x = p$, då finns $q \in Ap$ så $x = p + \lambda q$. Detta ger

$$\begin{aligned} J_\lambda x = p = J_\mu(p + \mu q) = J_\mu(x + (\mu - \lambda)q) = J_\mu\big(x + (\mu - \lambda)\frac{x - J_\lambda x}{\lambda}\big) = \\ = J_\mu\big(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda}J_\lambda x\big). \end{aligned}$$

Viktigaste steget i beviset av konvergens hos $\big(I + \dfrac{tA}{n}\big)^{-n}x = J_{t/n}^n x$ är uppskattningar av skillnader av typen $J_\lambda^m x - J_\mu^n x$ i termer av $|n\mu - m\lambda|$, λ och μ.

Lemma 45. *Antag* $n \geq m > 1$, $\lambda \geq \mu > 0$. *Då är*

$$\begin{aligned} \|J_\mu^n x - J_\lambda^m x\| \leq \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n}{j} \|J_\lambda^{m-j} x - x\| + \\ + \sum_{j=m}^{n} \alpha^m \beta^{j-m} \binom{j-1}{m-1} \|J_\mu^{n-j} x - x\|, \end{aligned}$$

med $\alpha = \dfrac{\mu}{\lambda}$, $\beta = \dfrac{\lambda - \mu}{\lambda}$.

Bevis. Sätt

$$a_{k,j} = \|J_\mu^j x - J_\lambda^k x\|.$$

Då gäller enligt Lemma 44 4).

$$\begin{aligned} a_{k,j} &= \big\|J_\mu^j x - J_\mu\big[\frac{u}{\lambda}J_\lambda^{k-1}x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda}J_\lambda^k x\big]\big\| \leq \\ &\leq \big\|J_\mu^{j-1}x - \frac{\mu}{\lambda}J_\lambda^{k-1}x - \frac{\lambda - \mu}{\lambda}J_\lambda^k x\big\| \leq \\ &\leq \frac{\mu}{\lambda}\big\|J_\mu^{j-1}x - J_\lambda^{k-1}x\big\| + \frac{\lambda - \mu}{\lambda}\big\|J_\mu^{j-1}x - J_\lambda^k x\big\|. \end{aligned}$$

Alltså

$$a_{k,j} \le \alpha a_{k-1,j-1} + \beta a_{k,j-1}.$$

Nu ser man att det går att uppskatta $a_{k,j}$ i termer av $a_{k,0}$ och $a_{0,j}$. Vi lämnar som övning att genomföra den induktion som behövs.

Övning 11. Bevisa Lemma 45.

För att utnyttja de uppskattningar vi gjort behövs ytterligare ett lemma.

Lemma 46. *För m, n heltal $n \ge m > 0$ och $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ gäller*

1) $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j}(m-j) \le ((n\alpha - m)^2 + n\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$

2) $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m}(n-j) \le (\frac{m\beta}{\alpha^2} + (\frac{m\beta}{\alpha} + m - n)^2)^{\frac{1}{2}}.$

Bevis. Olikheterna visas på liknande sätt. Vi visar 1). Cauchys olikhet ger

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j}(m-j) \le \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j}|m-j| \le$$
$$\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j}(m-j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Utnyttjar vi

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} = (\alpha+\beta)^n = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} j\alpha^j \beta^{n-j} = n\alpha(\alpha+\beta)^{n-1} = n\alpha,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} j^2 \alpha^j \beta^{n-j} = n\alpha(\alpha+\beta)^{n-1} + n(n-1)\alpha^2(\alpha+\beta)^{n-2} =$$
$$= n\alpha + n(n-1)\alpha^2,$$

så får vi 1).

Bevis av Sats 43. Vi vill visa att

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty} J_{t/n}^n x$$

är en Lipschitzkontinuerlig halvgrupp på $\overline{D(A)}$. Kombinerar vi Lemma 44 2), 3) och Lemma 45 så får vi med $\lambda \geq \mu$, $n > m$, $x \in D(A)$

$$\|J_\mu^n x - J_\lambda^m x\| \leq |Ax|\{\lambda \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j}(m-j) + \\ + \mu \sum_{j=m}^{n} \binom{j-1}{m-1} \alpha^j \beta^{j-m}(n-j)\},$$

där $\alpha = \dfrac{\mu}{\lambda}$, $\beta = \dfrac{\lambda - \mu}{\lambda}$.

Lemma 46 ger

$$\|J_\mu^n - J_\lambda^m x\| \leq |Ax|\{((n\mu - m\lambda)^2 + n\mu(\lambda - \mu))^{\frac{1}{2}} + (m\lambda(\lambda-\mu) + (m\lambda - n\mu)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Sätt $\mu = t/n$ och $\lambda = t/m$,

$$\|J_{t/n}^n x - J_{t/m}^m x\| \leq 2t\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|^{\frac{1}{2}}|Ax|, \quad x \in D(A).$$

Alltså är $[J_{t/n}^n x]$ en Cauchysekvens och $S(t)x$ existerar då $x \in D(A)$. Då $J_{t/n}^n$ kontraktion för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$, och $R(J_\lambda) \supseteq \overline{D(A)}$ blir $S(t)$ kontraktiv och $S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$. Om vi i stället tar $n = m$, $\mu = \dfrac{t}{n}$, $\lambda = \dfrac{s}{n}$ så får vi

$$\|S(t)x - S(s)x\| \leq 2|t-s||Ax|.$$

Alltså $S(t)x$ är likformigt Lipschitzkontinuerlig. Det återstår att visa halvgrupsegenskapen hos $S(t)$, $t \geq 0$, men detta lämnas som övning.

Övning 12. Visa at $S(t); S(t)x = \lim\limits_{n\to\infty} J_{t/n}^n x$ är en halvgrupp.

Någon direkt koppling till en evolutionsekvation med operatorn A har vi inte, men om vi kräver deriverbarhet hos $S(t)x$ så har vi en lösning. Vi repeterar:

Definition 47. En *stark lösning* till evolutionsekvationen

$$\frac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = u_0 \tag{19}$$

är en funktion $u(t) : [0, \infty) \to X$ som är lokalt Lipschitzkontinuerlig i t, $u(t) \in D(A)$ n.ö. $[0, \infty)$, starkt deriverbar n.ö. $[0, \infty)$, $u(0) = u_0$ och uppfyller (19) n.ö. $[0, \infty)$.

Sats 48. *Antag A ackretiv och grafen av A är sluten i $X \times X$. Då är följande ekvivalent.*

1) u är stark lösning till $0 \in \dfrac{du}{dt} + Au, \quad u(0) = x.$

2) $u(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^{-n} x$ *och u starkt deriverbar n.ö.* $[0, \infty)$.

Här slutar vår genomgång av den abstrakta teorin. Vi har visat att evolutionsekvationen $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ är lösbar om A är maximalt monoton på ett Hilbertrum (Sats 37). Sats 48 visar att ekvationen är lösbar om A är ackretiv på ett reflexivt Banachrum. För fallet X icke-reflexivt Banachrum har vi inte kunnat ge någon allmän existens sats. I stället skall vi i nästa kapitel titta på ett exempel i $L^1(R^n)$.

Referenser till Kapitel 4

[1] V. Barbu, Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Noordhoff, 1976.

[2] M. G. Crandall, T. Liggett, Generations of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math., 93 (1971), 265-298.

5 Gasflöden i porösa medier

I det här kapitlet skall vi ingående studera ekvationen

$$\frac{du}{dt} - \Delta u^2 = 0, \qquad u \geq 0. \tag{20}$$

Denna ekvation uppträder t.ex. som modell för gasdiffusion i porösa medier. Då är $u(x,t)$ tätheten av gas i punkten x vid tiden t. För tätheten är ett naturligt val av funktionsrum L^1, och man skulle vilja visa existens av L^1-lösningar till (20). Då L^1 inte är reflexivt kan vi inte dra några avgörande slutsatser om existens av lösning från den abstrakta teorin i förra kapitlet. Trots detta går det att få en mycket bra förståelse av ovanstående ekvation, enligt vår mening en lika bra förståelse som för linjära diffusionsekvationen $\frac{du}{dt} - \Delta u = 0$. Vi presenterar här en översikt av några grundläggande egenskaper hos ekvationen och några nyligen bevisade satser om lösningar till ekvationen. För bevisen av satserna hänvisas till givna referenser.

1. Operatorn $A, Au = -\Delta u^2$ är ackretiv på $L^1(R^n)$. Idén för att visa

$$\|u - v\| \leq \|u - v + \lambda Au - \lambda Av\|, \quad \lambda > 0,$$

är densamma som i Exempel 42. Tag $p_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ approximation av sign, så att $|p_n| \leq 1, p_n$ växande och $p_n \to$ sign då $n \to \infty$. Då gäller

$$\|u - v + Au - Av\| \geq \int_{R^n} p_n(u^2 - v^2)\{u - v\} +$$
$$\int_{R^n} p_n(u^2 - v^2)\{-\Delta u^2 + \Delta v^2\},$$

där första integralen konvergerar mot $\|u-v\|$. Den andra integralen är positiv. Ty en partialintegrering ger

$$\int_{R^n} \{\nabla(u^2-v^2)\cdot\nabla(u^2-v^2)\}p_n'(u^2-v^2) \geq 0.$$

Att visa m-ackretivitet hos A är betydligt svårare. Vi nämner bara att definitionsmängden för A är

$$D(A) = \{u \in L^1(R^n) : u^2 \in W^{1,1}(R^n),\ \Delta u^2 \in L^1(R^n)\}.$$

För ett bevis av m-ackretivitet hänvisas till H. Brezis och Strauss, Semilinear elliptic equations in L^1, J. Math. Soc. Japan 25 (1973) 565-590.

Övning 13. Visa att A, $Au = -\Delta\varphi(u)$ ej ackretiv på $L^p(R^n)$, $p>1$ om inte φ är identiteten.

2. Genom att utnyttja att ekvationen (20) är parabolisk då $u>0$ får vi en maximumprincip. För två lösningar u, v till (20), som är kontinuerliga på cylindern $B_R\times[t_1,t_2] = \{x : |x|<R\}\times[t_1,t_2]$, med $u\leq v$ på $\partial_p(B_R\times[t_1,t_2])$ är $u\leq v$ i det inre av $B_R\times[t_1,t_2]$. Här är $\partial_p(B_R\times[t_1,t_2]) = (B\times\{t_1\})\cup(\partial B\times[t_1,t_2])$ den paraboliska randen.

3. På 50-talet konstruerade Barrenblatt den explicita lösningen

$$u_B(x,t) = C_n t^{-\frac{2}{n+2}}\left(1-|x|^2 t^{-\frac{2}{n+2}}\right)_+ . \tag{21}$$

Övning 14. Verifiera att (21) är en lösning till (20). Observera att för varje $t>0$ har dessa lösningar kompakt stöd i R^n, och att deras utbredningshastighet är ändlig.

4. Det går att skala om lösningar och erhålla nya lösningar. Om u är en lösning till (20) så är också $\dfrac{\beta}{\alpha^2}u(\alpha x,\beta t)$ en lösning för alla $\alpha\in R$, $\beta>0$. Detta är en ickelinjär effekt. För t.ex. värmeledningsekvationen måste α och β ha ett bestämt förhållande om omskalning skall ge en lösning.

5. Ekvationen har ändlig utbredningshastighet. Låt u vara lösnign till (20), kontinuerlig på $R^n\times[0,\infty)$, sådan att $u(x,0)$ har kompakt stöd. Då finns omskalning så att $u(x,0)\leq u_B(x,t_0)$, Barrenblatt lösningen för något t_0. Maximumprincipen ger nu att u har kompakt stöd för alla $t>0$.

Innan vi tar itu med den ickelinjära ekvationen skall vi se vad vi kan lära oss av den linjära teorin. För den linjära diffusionsekvationen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad t\geq 0,\\ u\geq 0, \end{aligned} \tag{22}$$

finns följande representationssats för dess lösningar.

Sats 49. *Låt $u(t), t \geq 0$ vara positiv lösning till (22), då finns entydigt bestämt mått $\mu \geq 0$ på R^n så att*

$$(\alpha) \qquad \int_{R^n} e^{-|x|^2/t} d\mu(x) < \infty, \quad \textit{alla} \quad t > 0.$$

$$(\beta) \qquad u(x,t) = C_n t^{-n/2} \int_{R^n} e^{-|x-y|^2/4t} d\mu(y).$$

(γ) $\qquad$ *$u \to \mu$ som mått då $t \downarrow 0$ d.v.s. för alla $\varphi \in C_0(R^n)$ gäller*

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{R^n} u(x,t)\varphi(x)dx = \int_{R^n} \varphi(x)d\mu(x).$$

Dessutom gäller

$$(\delta) \qquad u(\cdot,t) \in C^\infty(R^n), \quad t > 0.$$

Måttet μ kallas spåret av u och betecknas $\mu = \text{Trace}\ u$. För den icke-linjära ekvationen (20) finns analoga resultat.

Först definierar vi svag lösning till (20).

Definition 50. En *kontinuerlig svag lösning i* $(0,T)$ till (20) är en kontinuerlig funktion $u : R^n \times (0,T) \to R$, $u \geq 0$, sådan att för varje testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(R^n \times (0,T))$ gäller

$$\int_{R^n} \int_{t_1} (u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u^2 \Delta\varphi) dxdt =$$
$$\int_{R^n} \{u(x,t_2)\varphi(x,t_2) - u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\}dx \quad t_1 \leq t_2 < T.$$

Följande lemma är väsentligt för att visa existensen av spår till en kontinuerlig svag lösning av (20). Det är ett resultat av Aronson och Cafarelli $[A, C]$ analogt med en Harnak-olikhet i den linjära teorin.

Lemma 51. *Låt u vara en kontinuerlig svag lösning i $[0,T)$ till (20). Då finns en konstant $C = C(n)$ så att*

$$\int_{|x-y|<r} u(x,0)dx \leq C \cdot \{r^{n/2} + T^{n/2} u^{(n+2)/2}(y,T)\}.$$

Med hjälp av detta lemma kan man visa

Sats 52 ([A,C]). *För alla kontinuerliga svaga lösningar i $(0,T)$ till (20) finns entydigt mått $\mu \geq 0$ så att $u(\cdot,t) \to \mu$ som mått då $t \downarrow 0$. För μ gäller*

$$(23) \qquad \mu\{x : |x| \leq R\} = 0(R^{n+2}), \quad R \to \infty.$$

Vår huvudsats för ekvaitonen (20) är

Sats 53 ([D,K]). *För varje mått μ som uppfyller (23) finns exakt en kontinuerlig svag lösning u till (20) med Trace $u = \mu$.*

För bevis av Sats 52 och Sats 53 hänvisas till referenserna. Här skall vi endast ge en punktvis uppskattning av lösningen.

Sats 54. *Låt u vara kontinuerlig svag lösning i $t > 0$, till (20) då finns funktion $C_u : R_+ \to R$ så att*

$$u(x,t) \leq C_u(t)(1 + |x|^2)$$

och

$$C_n(t) = 0(t^{-\delta_n}), \quad t \to 0$$

där $\delta_n > 0$ är oberoende av u.

Lemma 55. *Antag att u är en klassisk lösning till (20) i*

$$\{(x,t); |x| < 2, \frac{1}{4} \leq t \leq 4\}.$$

Då gäller

$$u(0,1) \leq C \cdot \{1 + \sup_{\frac{1}{2} \leq t \leq 2} \int_{|x|<1} u(x,t)dx\}^\eta, \tag{24}$$

där C och η är oberoende av u.

Lemmat kan visas genom att uppskatta $u(0,1)$ med L^2 normen i cylindern $\{|x| < 1, \frac{1}{2} \leq t \leq 2\}$ och denna L^2 norm uppskattas med L^1 normen över skivor av cylindern. För bevis hänvisas till referenserna.

Bevis av Sats 54. Sätt

$$v(x,t) = \frac{1}{R^2} u(Rx + \xi, t)$$

med $R = |\xi| \geq 1$. Då är v en ny lösning av (20). Det gäller

$$\int_{|x|<1} v(x,t)dx = \frac{1}{R^2} \int_{|x|<1} u(Rx + \xi, t)dx = \frac{1}{R^{n+2}} \int_{|y-\xi|<R} u(y,t)dy \leq M$$

där M är oberoende av R. Av (24) följer

$$v(0,1) \leq C \cdot (1 + M)^\eta$$

och vi får

$$\frac{u(\xi,1)}{R^2} \leq C(1+M)^n$$

alltså

$$u(\xi,1) \leq C \cdot |\xi|^2, \quad |\xi| > 1.$$

Referenser kapitel 5

[A] D. G. Aronson, Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, Bull. A.M.S., Vol. 73, (1967), 890-897.

[A_2] D. G. Aronson, Non-negative solutions of linear parabolic equations: An addendum, Annali delle Scoula Normale Superwise di Pisa, Vol. 24, (1971), 221-228.

[A,C] D. G. Aronson and L. A. Caffarelli, The initial trace of a solution of the porous medium equation, preprint.

[B,C,P] P. Benilan, M. Crandall and M. Pierre, Solutions of the porous media equation in R^N, under optimal conditions on initial values, to appear Indiana U. Math. Journal.

[C] A. P. Calderon, On the behavior of harmonic functions at the bundary Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 68, (1950), 47-54.

[D,K] B. E. J. Dahlberg and C. E. Kenig, Non-negative solutions of the porous medium equation, to appear.

[S] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1971).

[W] D. Widder, Positive temperature on the infinite rod, Trans. Amer. Math. Soc., 55 (1944), 85-95.

APPENDIX 1. Bevis av sats 4

Sats 4. Låt X vara ett likformigt konvext Banachrum, $C \subset X$ en sluten, begränsad, konvex mängd och $T : C \to C$ en kontraktion. Då har T en fixpunkt, och fixpunktsmängden är sluten och konvex.

Bevis. 1) Fixpunktsmängden är konvex. Tag $x_0, x_1, \in C$ så att $Tx_0 = x_0$, $Tx_1 = x_1$, vi skall visa $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$ är fixpunkt.

$$\begin{aligned} \|x_0 - x_1\| &\leq \|x_0 - Tx_t\| + \|Tx_t - x_1\| \\ &= \|Tx_0 - Tx_t\| + \|Tx_t - Tx_1\| \\ &\leq t\|x_0 - x_1\| + (1-t)\|x_0 - x_1\| = \|x_0 - x_1\| \end{aligned}$$

Likhet i triangelolikheten medför $x_0 - Tx_t$ och $Tx_t - x_1$ parallella. Vilket ger $Tx_t = x_t$.

Vi skall visa existensen då $X = H$, HIlbertrum, för detta behöver vi följande lemma.

Lemma A.1. Värdemängden

$$R(I + \alpha(I - T)) \supset C, \quad \alpha > 0$$

och $(I + \alpha(I - T))^{-1}$ är en kontraktion.

Bevis. För $y \in C$ är avbildningen

$$x \longrightarrow \frac{y + \alpha Tx}{1 + \alpha}$$

starkt kontraktiv och in i C. Då finns fixpunkt x_0 så att

$$\begin{aligned} (1+\alpha)x_0 &= y + \alpha Tx_0 \\ x_0 + (x_0 - Tx_0) &= y \end{aligned}$$

och $R(I + \alpha(I - T)) = C$.

För $X = H$ Hilbertrum är $I + \alpha(I - T) = 1 + \alpha\big(I - \dfrac{\alpha}{1+\alpha}T\big)$ monoton och $(I + \alpha(I - T))^{-1}$ är en kontraktion enligt Sats 21.

Fort. bevis sats 4. 2) Existens av fixpunkt. Tag $x_0 \in C$ och sätt

$$x_\alpha = (I + \alpha(I - T))^{-1} x_0. \tag{A.1}$$

Idén är att låta $\alpha \to \infty$ och visa att x konvergerar mot någon punkt. Från (A.1) får man

$$x_\alpha = (1+\alpha)^{-1}(x_0 - \alpha T x_\alpha)$$

och

$$x_\alpha - T x_\alpha = (1+\alpha)^{-1}(x_0 - T x_\alpha).$$

Man ser $x_\alpha - T x_\alpha \to 0$ då $\alpha \to \infty$. Då C är begränsad gäller att $\{x_\alpha\}_{\alpha>0}$ har delsekvens som konvergerar svagt, säg

$$x_{\alpha j} \to x_\infty \quad \text{svagt, då} \quad j \to \infty.$$

Låt P vara projektionen på C. Då TP kontraktion är $I - TP$ monoton och

$$\langle x_\alpha - TPx_\alpha - u - TPu,\, x_\alpha - u\rangle \geq 0.$$

Låt $\alpha_j \to \infty$, så fås

$$\langle TPu - u,\, x_\infty - u\rangle \geq 0.$$

Välj $u = u_t = x_\infty + tv$, $t \geq 0$, och låt $t \to 0$, då får man

$$\langle Tx_\infty - x_\infty,\, v\rangle \geq 0$$

för alla $v \in H$. Alltså $Tx_\infty = x_\infty$.

För X Banachrum blir beviset mera tekniskt, se F. Browder. “Non-expansive nonlinear operators in a Banach space, “Proc. Nat. Acad. Sci. USA 54 (1965) 1041-44.

APPENDIX 2. Bevis av max-min satsen

Proposition 24. Låt $K_1 \subset R^n$ och $K_2 \subset R^m$ vara kompakta, konvexa delmängder och $f : K_1 \times K_2 \to R$ en kontinuerlig funktion sådan att

1) För varje $y \in K_2$ är $f(\cdot, y)$ konvex på K_1.

2) För varje $x \in K_1$ är $f(x, \cdot)$ konkav på K_2.

Då finns $(x_0, y_0) \in K_1 \times K_2$ så att för alla $(x, y) \in K_1 \times K_2$

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0),$$

m.a.o. (x_0, y) är en sadelpunkt till f.

Bevis. Vi kan anta $f(\cdot, y)$ strikt konvex för varje y, annars studerar vi $f(x, y) + \varepsilon|x|^2$ och låter $\varepsilon \to 0$. Fixera y och sätt

$$g(y) = \min_{x \in K_1} f(x, y) = f(E(y), y),$$

där $E(y)$ blir en funktion från K_2 till K_1. Lägg märke till, g är kontinuerlig och konkav.

Vi visar E är kontinuerlig.

Antag $y \to y_0$ och $E(y) \to Z_0$, men $E(y_0) \neq Z_0$. Av kontinuiteten hos f följer

$$f(x, y_0) \geq f(z_0, y_0), \quad x \in K_1.$$

Detta strider emot $f(\cdot, y)$ strikt konvex och minimumpunkten entydigt, alltså $E(y_0) = z_0$, och E är kontinuerlig.

Låt y^* vara den punkt i K_2 så att

$$g(y^*) = \max_{y \in K_2} g(y).$$

Vi skall visa $(x^*, y^*) = (E(y^*), y^*)$ är sadelpunkt. Vi har

$$g(y^*) = \min_{x \in K_1} f(x, y^*) = f(x^*, y^*).$$

Alltså

$$g(y^*) \leq f(x, y^*), \quad x \in K_1.$$

Det återstår att visa

$$f(x^*, y) \leq g(y^*).$$

Låt oss studera $f(x,(1-t)y^*+ty)$.

Av konkaviteten följer

$$\begin{aligned} f(x,(1-t)y^*+ty) &\geq (1-t)f(x,y^*)+tf(x,y) \\ &\geq (1-t)g(y^*)+tf(x,y). \end{aligned}$$

Tag $x=E((1-t)y^*+ty)$, då får vi

$$g(y^*) \geq (1-t)g(y^*)+tf(E((1-t)y^*+ty,y).$$

Alltså

$$g(y^*) \geq f(E((1-t)y^*+yt),y).$$

Då E kontinuerlig följer

$$f(x^*,y) \leq g(y^*).$$