Licentiatuppsats

Samspel mellan intuitiva idéer och formella bevis

En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift

Kerstin Pettersson

CHALMERS | GÖTEBORG UNIVERSITY

Matematiska Vetenskaper
Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet

Göteborg, November 2004

Samspel mellan intuitiva idéer och formella bevis – En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift
KERSTIN PETTERSSON

ISSN 0347-2809/Nr 2004:44
Matematiska Vetenskaper
Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
412 96 Göteborg
Telefon 031-772 10 00
Göteborg, 2004

Sammanfattning

Syftet med denna fallstudie är att belysa samspelet mellan intuitiva idéer och formella bevis. Med utgångspunkt i ett perspektiv där vi söker den potential individer kan uppvisa, beskrivs växelverkan mellan intuitiva idéer och formella strukturer, så som dessa strukturer kommer till uttryck i begreppsdefinitioner och formella bevis. En grupp universitetsstudenter har arbetat med en analysuppgift som berör begreppen funktion och derivata samt inkluderar ett induktionsbevis. Studenternas samtal har analyserats med hjälp av intentionell analys, en analysmetod som utgår från att individers agerande för att kunna förstås måste uppfattas som intentionella. Denna analysmetod synliggör tolkningsprocessen och gör det också möjligt att nå den matematiska innebörden i studenternas agerande.

Studien ger flera exempel på växelverkan mellan det intuitiva och det formella samt beskriver funktionen för dessa växlingar. Studenterna har rika begreppsuppfattningar och tillgång till intuitiva idéer för de begrepp uppgiften berör. I gruppens resonemang finns alla ingredienser till ett fullständigt bevis. Studenterna genomför ett bevis som kan passas in i det vanliga mönstret för ett induktionsbevis men de har själva intrycket att deras argumentation inte är i överensstämmelse med det mönster de mött i läroböcker och undervisning. De ställer stora krav på formalisering av sina idéer. Detta hämmar ibland studenterna men driver dem också vidare och leder till att de vidgar sitt sökande efter idéer för hur beviset kan fullföljas.

Abstract

The aim of this study is to illuminate the interplay between intuitive ideas and formal justification. In a perspective where we focus on the students' competences we describe the interaction between intuitive ideas and formal structures, as they appear especially in relation to concept definitions and formal proofs. A group of university students have been working on a task in calculus. The task includes the concepts function and derivative and requires of them to use a proof by induction. The discussion between the members of the group has been analyzed in accordance with the principles of intentional analysis, a method by which we regard the students' activities as intentional. This method of analysis makes the process of interpretation visible. It also makes it possible to make explicit the competences of the students' and the mathematical content of their actions.

In the study examples are given of the interplay between the intuitive ideas and the formal structures and also of the function for this interplay. The students have rich concept images and access to intuitive ideas relevant to the concepts brought to the

fore by the task. During the group discussion all components of a complete proof are included in the students' reasoning. The students create a proof by induction which matches the ordinary pattern for such a proof, but they do not themselves regard it as a proof fitting into the ordinary scheme of argumentation, as they remember it from text-books and teaching. The students put heavy demands upon the formalization of their ideas and these demands are sometimes hampering the problem solving process, but they also encourage the students to expand their search for a solution to the problem at hand.

Förord

Jag vill tacka alla dem som har bidragit till den process som har lett fram till denna uppsats.

Först och främst vill jag tacka mina handledare Mats Andersson och Inger Wistedt. Ni har varit ett stort stöd i det arbete som resulterat i denna uppsats. Utan era kommentarer och kloka råd hade studien inte blivit vad den är idag. Både Mats matematiska erfarenhet och Ingers pedagogiska och didaktiska kunskaper har varit till stor hjälp. Ert intresse för studiens frågor och ert engagemang genom hela processen har varit mycket givande. Jag ser fram mot fortsatt samarbete!

Jag vill också tacka de studenter som har gjort denna studie möjlig. Ni ställde upp med er tid och ert engagemang. Utan er hade denna studie inte kunnat genomföras. Jag hoppas att ni själva hade utbyte av arbetet med uppgiften. Lycka till i era vidare studier!

Ett stort tack riktas till Högskolan i Skövde som låtit mig forskarstudera inom ramen för min anställning vid högskolan. Jag vill också passa på att tacka mina kollegor, nuvarande och tidigare, för att Ni alltid bjuder på era erfarenheter och håller den didaktiska diskussionen levande. Detta arbetsklimat har starkt bidragit till mitt intresse för de didaktiska frågorna.

Stort tack även till Forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning som under det senaste året har delfinansierat mina studier. Genom forskarskolan har jag dessutom fått ta del av gemensamma kurser och det nätverk som doktorander och handledare inom forskarskolan utgör. Tack till er alla för inspirerande möten vid kurser och konferenser.

Ett stort tack också till Matematiska Vetenskaper vid Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet som har stått för handledningen.

Dessutom vill jag tacka Lars, för all uppmuntran och omtanke.

Skövde, oktober 2004
Kerstin Pettersson

Innehållsförteckning

Inledning

Relationen mellan det intuitiva och det formella

Det finns mycket forskning, både experimentell och deskriptiv, som visar att produktiva matematiska resonemang inte enbart kan vila på formalism (Fischbein, 1987, s. 16). Endast tillgång till formella strukturer ger inte möjlighet till den kreativitet som krävs t ex vid problemlösning.

> ”The main idea is that the same type of mental attitudes and endeavors which characterize an empirical attempt at solution intervene also at the formal level. /…/ Therefore, even when dealing with axiomatical structures, the mathematical activity resorts to the intuitive forms of acceptance and extrapolation which may assure its required behavioral firmness, its productivity, its dynamic, flexible consistency!” (*ibid*., s. 23)

De matematiska objekten har ofta av en abstrakt karaktär och kan beskrivas som mentala objekt. Dessa mentala objekt måste få en inre konsistens och en tydlighet på samma sätt som reella, materiella objekt för att de ska kunna användas i kreativa, produktiva resonemang.

> ”The mental ’objects’ (concepts, operations, statements) must get a kind of intrinsic consistency and direct evidence similar to those of real, external, material objects and events, if the reasoning process is to be a genuinely productive activity.” (*ibid*., s. 21)

Sådan inre konsistens för ett begrepp bildas i individens möten med begreppet. En begreppsuppfattning och en tolkning av begreppet utvecklas hos individen genom erfarenheter som kan skapas genom formell skolning men som också kan komma från vardagen.

När en individ har skapat en uppfattning om ett begrepp så att begreppet av individen uppfattas som något självklart kan vi tala om att individen har en intuitiv idé för begreppet. Vi vill med den här studien visa exempel på hur sådana intuitiva idéer används i kreativa resonemang.

För att skapa ett produktivt och dynamiskt matematiskt arbete krävs enligt resonemanget ovan ett samspel mellan intuitiva uppfattningar och formella strukturer. Det finns emellertid relativt få studier som fokuserat detta samspel. Med denna fallstudie vill vi med ett exempel belysa hur samspelet mellan det intuitiva och det formella kan gestalta sig i en problemlösningsprocess.

Den empiriska studien

För att studera samspelet mellan det intuitiva och det formella har vi valt att försätta en grupp universitetsstudenter i en problemlösningssituation. Uppgiften som valts är delvis öppen till sin karaktär. Men uppgiften ger också en specifik uppmaning om att problemlösningen ska innehålla ett induktionsbevis. Att vi valt en uppgift av denna typ gör att det är troligt att den växelverkan vi vill beskriva blir synlig.

Studenter möter i undervisningen inte så mycket av formalisering av logiska resonemang. Eventuellt presenteras olika bevistyper mycket kort. Induktionsbevis däremot hanteras annorlunda. Ofta ger läroböcker ett argumentationsschema för just denna bevistyp. Den formella strukturen hos ett induktionsbevis borde därför vara bekant för studenterna.

Begreppen som berörs i uppgiften är hämtade från matematisk analys, begrepp som studenterna mött redan på gymnasiet men framför allt arbetat med under de inledande matematikkurserna. Studenterna kan därför tänkas ha utvecklat intuitiva idéer för dessa begrepp. Många studier vittnar om att det vid övergången till matematik på universitetsnivå sker en stor förändring i hur matematiken presenteras. Studenterna möter på denna nivå matematik som presenteras på ett mer formellt sätt. Vid denna brytpunkt verkar det då rimligt att både intuitiva idéer och formella strukturer kan komma till utryck då studenter arbetar med ett matematiskt innehåll.

Ett kompetensperspektiv

Många didaktiska studier har genomförts för att kartlägga individers begreppsuppfattningar. I dessa studier jämförs ofta de förekommande begreppsuppfattningarna med en vetenskapligt vedertagen uppfattning (för en översikt se Duit, 2004). Studierna får genom detta en stark normativ prägel. Slutsatsen av studierna blir då ofta att det finns en mängd brister hos de undersökta individernas begreppsuppfattningar. I denna studie har vi valt ett annat perspektiv, ett perspektiv där vi försöker se den potential som kan finnas i individernas agerande. Studiens syfte är att beskriva **hur** samspelet mellan det formella och det intuitiva gestaltar sig. Det finns då anledning att leta efter en analysmetod som siktar in sig på hur studenterna resonerar. Analysmetoden som använts i studien, intentionell analys, ger en möjlighet att se den potential som kan finnas i aktörernas agerande, en potential som ofta förblir osynlig vid en ytligare analys.

Uppsatsens disposition

I denna uppsats presenteras efter inledningskapitlet en kort teoretisk bakgrund där de begrepp som används vid analysen av den empiriska studien definieras och diskuteras. Analysmetoden, intentionell analys, presenteras därefter. Den empiriska studien och datamaterialet presenteras genom en berättelse om gruppens arbete. I analyskapitlet presenteras två exempel på hur den detaljerade analysen har genomförts. Dessutom finns i detta kapitel en analys av det induktionsbevis studenterna genomför. Resultaten sammanfattas i ett kapitel och uppsatsen avslutas sedan med att resultaten diskuteras i relation till den teoretiska bakgrunden. Även analysmetoden och studiens konsekvenser för undervisning diskuteras.

Teoretisk bakgrund

Intuition

Intuition – ett mångtydigt begrepp

Intuition är ett begrepp som kan definieras på en mängd olika sätt (Fischbein, 1987). Intuition uppfattades av Descartes som en fundamental källa för en speciell typ av kunskap. Piaget beskriver intuition som en typ av kognition karaktäriserad av självklarhet och omedelbarhet. Intuition beskrivs av andra även som en elementär primitiv form av kunskap, som sensorisk kunskap ekvivalent med perceptuell kunskap eller som en a priori kunskap. Dessutom används flera relaterade termer t ex sunt förnuft, naturligt tänkande, naivt resonemang och empirisk tolkning. (Se Fischbein (1987) för en grundlig genomgång av olika definitioner av intuition.)

Fischbein (1987, 1994) använder i stort Piagets definition och beskriver intuition som omedelbar kunskap, det vill säga en form av kognition vilken av individen uppfattas som självklar.

> ”An intuitive cognition is a kind of cognition that is accepted directly without the feeling that any kind of justification is required. An intuitive cognition is then characterized, first of all, by (apparent) *self-evidence*.” (Fischbein, 1994, s. 232)

För definition av intuition väljer vi i denna studie att ansluta oss till Fischbein och definierar intuition som *en typ av kognition som för individen uppfattas som självklar*. En intuition är emellertid inte statisk, vilket definitionen kan förleda oss att tro; den produceras och reproduceras i olika sammanhang där den aktualiseras, i vardagliga sammanhang såväl som i formella. Utöver självklarhet karaktäriseras intuition av *globalitet och extrapolerbarhet.* Detta betyder att intuitiva idéer fyller ut luckor i informationsmaterialet samt eliminerar information som inte passar in i sammanhanget.

Intuitiva idéer är tvingande i den mening att de uppfattas som självklara och exkluderar andra tolkningsalternativ. Här finns därmed en potentiell problematik som kan komma till synes i en lärsituation. Intuitiva idéer utgör en integrerad del av varje intellektuellt produktiv aktivitet och blir därför kvar även när de hämmar resonemangen. Men dessa intuitiva idéer är som nämnts inte statiska. Fischbein (1987) menar att det gäller att hjälpa studenterna att analysera, kontrollera och utveckla sin intuition.

> ”The educational problem is not to eliminate intuitions – affirmatory or anticipatory. This in our view is impossible. The educational problem is to develop new, adequate, intuitive interpretations as far as possible, together with developing the formal structures of logical reasoning.” (*ibid*., s. 211)

Primär och sekundär intuition

Intuition kan klassificeras i primär respektive sekundär (Fischbein, 1987, s. 64). Med *primär intuition* menas intuition som utvecklas hos individen genom erfarenheter från vardagen i det att vi lever och lär. *Sekundär intuition* syftar på intuitiva idéer som inte har sina rötter i erfarenheter från vardagen utan är skapade genom formell skolning. Sekundär ska här tolkas som ”senare”; en sekundär intuition är inte självklart hierarkiskt överställd en primär intuition. Distinktionen mellan primär och sekundär är inte heller absolut. Vad som uppfattas som en sekundär intuition är delvis kulturellt beroende. Fischbein menar dessutom att en primär intuition kan utvecklas och en ny sekundär intuition skapas. Fischbein (1987, s. 68-69) argumenterar för att intuition kan tränas och därmed utvecklas. Han menar att det är nödvändigt att träna sin intuition t ex för att utveckla förmågan att finna matematiska bevis.

I denna studie är det i huvudsak sekundär intuition som är aktuell. De begrepp som studenterna arbetar med i studien är begrepp där intuition inte utvecklas genom erfarenheter från vardagen. Erfarenheterna kommer istället från studenternas möte med begreppen under sin matematikutbildning. Intuition för begreppen har utvecklats genom arbete med definitioner, satser, bevis och i problemlösning där dessa begrepp används, dvs. genom formell skolning. Det bör åter påpekas att en sekundär intuition inte nödvändigtvis är hierarkiskt överordnad en primär intuition. Den intuition studenterna visar i denna studie är helt enkelt av sådant slag att den inte skapas utan formell skolning. Även då en sekundär intuition utvecklas och en ny intuition uppstår behöver inte denna utvecklade intuition normativt uppfattas som ”bättre”. Önskvärt är förstås en utveckling där en ny intuition blir mer konsistent med formella krav.

Med utgångspunkt i studiens empiriska material vill vi ge exempel på hur intuitiva representationer blir viktiga i en kreativ problemlösningsprocess. Vi instämmer med Fischbein när han argumenterar för att studenterna måste tro på sin intuition samtidigt som de måste göras medvetna om sina intuitiva uppfattningar och lära sig kontrollera dem:

> ”…it is important to develop in students the conviction that: (a) one possesses also correct, useful intuitions and (b) that we may become able

> to control our intuitions by assimilating adequate formal structures." (Fischbein, 1987, s. 209)

Ett samspel krävs alltså mellan intuition och formella strukturer. Som nämnts är det hur detta samspel gestaltar sig i en problemlösningsprocess som vi avser att belysa i studien.

Det formella

Den formella sidan av matematiken refererar till axiom, definitioner, satser och bevis. Matematik är visserligen mycket mer än det formella, dock ska vi nedan något behandla de formella delar som främst berörs i denna studie; definitioner som fastlägger begrepp och bevis som utgör kedjor av slutledningar.

Begreppsdefinitioner

Ett begrepp kan ses som en *klassificering* där varje objekt kan avgöras tillhöra klassen eller inte (White, 1994). Men begrepp kan ha otydliga gränser. Objekt kan ofta klassificeras på mer än ett sätt, grupperingen kan vara kontextberoende. När en individ gör klassificeringen på ett annat sätt än det av vetenskapssamhället vedertagna brukar individen sägas ha en missuppfattning eller möjligen en alternativ uppfattning (Duit, 2004). Undervisning syftar ofta till att ändra individens uppfattning om begreppet så att klassificeringen görs enligt vetenskapliga normer (*ibid*., se även Caravita & Halldén, 1994, för en diskussion och kritik av detta synsätt).

Med ett begrepp kan också menas all den kunskap en individ har och förknippar med benämningen (White, 1994). Tall och Vinner (1981) använder beteckningen *concept image* för den kognitiva struktur som är associerad med ett begrepp. Denna kognition består av individens tolkningar och förståelse av begreppet. Den innefattar alla de egenskaper och processer som individen associerar med begreppet samt de mentala bilder t ex figurer och grafer som individen kopplar till begreppet. Även individens intuitiva idéer om begreppet ifråga innefattas i strukturen. Den kognitiva strukturen byggs upp successivt genom individens möte med begreppet.

Med den *formella definitionen* av ett begrepp avses definitionen i sitt språkliga uttryck. Den formella definitionen medierar en idé men språkliga uttryck måste alltid tolkas. För den individuella tolkningen av den formella definitionen kan termen *concept definition image* användas (Tall & Vinner, 1981). Denna tolkning av den formella definitionen utgör en del av individens hela tolkning och förståelse av begreppet, dvs. den utgör en delmängd av individens ”concept image”. Även den formella definitionen ingår i individens ”concept image” förutsatt att individen känner till definitionen. Men begrepp kan definieras på olika sätt. Olika idéer kan bilda utgångspunkt för en definition och samma idé kan också uttryckas språkligt på olika sätt. När vi här studerar relationen mellan det intuitiva och det formella så är det relationen mellan intuitiva idéer och de idéer som den formella definitionen avser att förmedla som står i fokus.

En intuitiv idé för ett begrepp utgår inte alltid från samma idé som den formella definitionen. Den formella definitionen kan grundas på en idé som är svår att använda intuitivt. För kreativ problemlösning är den formella definitionen då knappast fruktbar. Definitionen kan däremot krävas för att konstruera ett stringent bevis.

Begreppet gränsvärde kan utgöra ett exempel. Den intuitiva idén att gränsvärdet a för en talföljd $a_1, a_2, a_3, ...$ fås genom en process där vi närmar oss gränsvärdet kan inte direkt användas för ett bevis. För ett stringent bevis behövs den formella definitionens omvända ordning, starta med ett positivt tal ε, ”hur litet som helst”, och studera sedan $|a_n - a|$ (Fischbein, 1994). Ytterligare exempel på begrepp där den formella definitionen är svår att använda intuitivt är begreppen kontinuitet och tensorprodukt. Definitionen av tensorprodukt används främst för att påvisa begreppets existens och det är sedan bara begreppets egenskaper som utnyttjas vid problemlösning.

Bevis

Ett bevis är en kedja av logiska slutledningar som utgående från axiom, eller andra utsagor som uppfattas som sanna, leder fram till en utsaga, en sats, som därmed uppfattas som sann. Bevis utgör en viktig del av matematikens formella struktur. Ett bevis kan dock ha flera olika roller (se t ex de Villiers, 1990 och Hanna, 2000). Hanna (1991) påpekar att formella bevis ska ses som ett viktigt redskap för förtydligande, validering och förståelse av intuitiva tankar. Det finns emellertid enligt Hanna en fara i att vara alltför formell:

> ”The starting point for understanding is the naive mathematical idea rooted in everyday experience. To provide a basis for further progress, this naive idea must be developed and made explicit. This requires a degree of formalism. A language must be created: symbols defined, rules of manipulation specified, the scope of mathematical operations delineated. Greater precision must be taught, so that the essential can be separated from the non-essential and greater generality achieved. But this has its price. Distanced from the original intuitive context, the student may lose sight of reality and become a symbol pusher.” (*ibid.*, s 60-61)

En anledning till att studenter misslyckas med att genomföra formella bevis kan vara att de inte behärskar begreppens formella definitioner (Moore, 1994). En annan anledning, som också visas av Moore i samma studie, är att studenterna endast har en svag intuitiv uppfattning av begreppen. Fischbein (1987) behandlar det omvända problemet med starka intuitiva uppfattningar och påpekar att studenterna måste lära sig hantera samspelet mellan formellt bevisade förhållanden och intuitiva idéer.

> "One of the fundamental tasks of mathematical education – as has been frequently emphasized in the present work – is to develop in students the capacity to distinguish between intuitive feelings, intuitive beliefs and formally supported convictions. In mathematics, the formal proof is decisive and one always has to resort to it because intuitions may be misleading. This is an idea which the student has to accept theoretically but that he has also to learn to practise consistently in his mathematical reasoning." (Fischbein, 1987, s. 209)

Det är just detta samspel som vi i denna studie vill undersöka. Vi vill belysa hur studenter utnyttjar formella strukturer och intuitiva idéer samt på vilka sätt växelverkan mellan dessa sker.

Växelverkan mellan det formella och det intuitiva

Fischbein (1994) påpekar att man vid analyser av studenters matematiska beteende måste beakta tre basala aspekter av den matematiska aktiviteten: den formella, den algoritmiska och den intuitiva aspekten. Interaktionen mellan dessa tre aspekter är enligt Fischbein mycket komplex (*ibid*., s. 244). I denna studie begränsar vi oss till att belysa samspelet mellan två av dessa aspekter, den formella och den intuitiva.

En av de relativt få studier som fokuserat hur studenter rör sig mellan formella och mer intuitiva resonemang är en studie redovisad av Pinto och Tall (1999). De har följt studenter under en lång tid och studerat de strategier som studenterna använder för att tolka och skapa mening för den formella matematiken. Studien visar på två olika lärandestrategier. Vissa studenter har preferens för en strategi som Pinto och Tall benämner *giving meaning*. Dessa studenter skapar sin tolkning av den formella matematiken genom att utgå från intuitiva idéer. De reflekterar över mentala objekt och förfinar sina idéer för att skapa en tolkning som överensstämmer med den formella teorin. Andra studenter använder i första hand en strategi som benämns *extracting meaning*. Dessa studenter skapar sin tolkning utgående från den formella teorin. De extraherar mening från formella definitioner och konstruerar begreppens egenskaper genom deduktion. Studenterna visar som individer preferens för en av lärandestrategierna även om de också använder den andra strategin.

Tidigare studier och andra forskares teorier har oftast beskrivit strategier liknande ”extracting meaning” (Pinto & Tall, 2002). Som exempel kan nämnas APOS-teorin (Dubinsky, 1991) och Sfards teori om hur en matematisk process reifieras till ett matematiskt objekt (Sfard, 1991). Dessa teorier ger emellertid inte någon beskrivning som förklarar lärande-strategin ”giving meaning”. Pinto och Tall (2002) argumenterar för att teorierna därmed inte inbegriper alla lyckosamma strategier.

Studenters svårigheter att koordinera formella och intuitiva aspekter av matematiken behandlas av Raman (2002). Med exemplet kontinuerlig funktion visar Raman att studenterna inte erbjuds så många tillfällen att skapa kopplingar mellan det formella och det intuitiva. Läroböckers framställningsform och urval av uppgifter ger enligt Raman inte studenterna incitament att koppla samman formella definitioner med mer intuitiva karakteriseringar av begrepp.

Perspektiv för studien

I vår analys av studiens datamaterial använder vi ett perspektiv som främst belyser den potential som finns i studenternas agerande. Driver (1981) påvisar att elever ofta har begreppsuppfattningar som skiljer sig från de uppfattningar om begreppen som är vedertagna av vetenskapssamhället och som undervisas i skolan. I de fall där elevernas uppfattningar skiljer sig från lärarens eller lärobokens beskrivningar av begreppen talar man om missuppfattningar eller alternativa referensramar. En hel forskningstradition har följt i Drivers spår och beforskat elevers begreppsuppfattningar (Duit, 2004). Studier av elevers uppfattningar har främst gjorts inom naturvetenskapens didaktik men även inom andra ämnesområden. Forskning inom traditionen alternativa referensramar visar att förändring av begreppsuppfattning ofta möter stort motstånd hos individen (Vosniadou, 1994). Undervisningen inriktas mot att förmå individen att byta ut begreppsuppfattningar som klassificerats som missuppfattningar mot nya uppfattningar som bättre stämmer med de vetenskapligt vedertagna. Flera studier visar dock att elever trots undervisning sällan överger sina tidigare föreställningar om begreppen (se t ex Halldén, 1988, 1999).

Förändringar i begreppsuppfattning, *conceptual change*, beskrivs ofta som en övergång från en uppfattning till en annan där den senare oftast uppfattas som ”bättre” än den tidigare (se t ex Vosniadou, 1994). Det finns alltså ett normativt inslag i teoribildningen där den vedertagna vetenskapliga uppfattningen uppfattas som ”den rätta”. Halldén (1999) ifrågasätter det fruktbara i att se begreppsutveckling i termer av ”conceptual change”. Istället argumenterar Halldén för att utvecklingen bättre kan förstås som ett kontextualiseringsproblem där studenter ibland misslyckas med att infoga ett begrepp i ett relevant sammanhang

– den kontext som av läraren uppfattas som den korrekta. Lärsituationen missuppfattas och studenter ger svar kopplade till vardagserfarenheter och inte vetenskaplig teori (se även Säljö, 2000). Det kulturella sammanhanget är i undervisningssituationer ofta implicit och studenter kontextualiserar ibland uppgifter i ett annat teoretiskt ramverk än vad som avsetts. För att rätt hantera lärsituationen krävs att studenter blir inskolade i den kultur som råder i ämnet och i skolsituationen.

En individs begreppsuppfattning kan också förändras genom att en ny uppfattning läggs till utan att den gamla försvinner (Halldén, 1997; Halldén et al, 2002). De olika uppfattningarna lever sida vid sida och används i olika sammanhang. Detta kan beskrivas som en process av differentiering som resulterar i två eller fler olika sätt att uppfatta samma företeelse. För individen innebär det att repertoaren utökas. Ett sätt att förklara lärande är att se kunskapsbildning som en differentiering mellan olika kontexter för tolkning av en situation eller en uppgift. Individen måste vara medveten om och ha förmågan att differentiera mellan olika sätt att tolka och förstå ett undervisningsinnehåll. Det handlar om att finna en lämplig kontext och sedan använda en begreppsuppfattning i enlighet med denna (Wistedt, 1993). Genom att frigöra sig från den normativa uppfattningen, att en begreppsuppfattning är ”bättre” än en annan, öppnar vi upp för ett synsätt där vi kan synliggöra den potential som studenternas uppfattningar eventuellt inrymmer.

Forskningstraditionen alternativa referensramar utgår från en konstruktivistisk grundsyn. Det betyder mycket förenklat att individen själv konstruerar sin kunskap. Stark kritik mot detta synsätt har framförts från forskare inom den sociokulturella traditionen (Säljö, 2000). Inom denna tradition hävdar man lärandets starka beroende av situationen och det sociala samspelet. Kunskapen skapas i samspelet mellan individerna (Dysthe, 2001). Försök finns dock att föra samman dessa två perspektiv. Driver med flera (1994) ser vetenskaplig kunskap som socialt konstruerad. Lärande uppfattas som en socialiseringsprocess som även inkluderar individuella processer. Cobb (1994) argumenterar i artikeln ”Where is the mind?” för att konstruktivismen och det sociokulturella perspektivet ska ses som två komplementära perspektiv där fokus riktas mot olika problem. Det ena perspektivet kan utgöra bakgrund för det andra. Cobb tolkar lärande både som en socialiseringsprocess och som en process av individuell kunskapsbildning.

Vi har i denna studie valt ett annat sätt att, utan att lämna den konstruktivistiska grundsynen, förhålla oss till kritiken från det sociokulturella perspektivet. Studenternas agerande har tolkats med hjälp av intentionell analys. I den intentionella analysen sker en sammanvägning av individernas kognitiva förmåga och deras tolkning av situationen. Den intentionella analysen hjälper oss dessutom att se den potential som kan finnas i studenternas agerande. Vi lämnar ett bristperspektiv och sätter istället ljuset på de lärandes kompetens.

Studiens syfte

Med denna fallstudie vill vi belysa samspelet mellan intuitiva idéer och formella bevis. Vi är framförallt intresserade av att visa **hur** detta samspel kan gestalta sig. Med utgångspunkt i en konstruktivistisk grundsyn och i ett perspektiv där vi främst är intresserade av att söka den potential studenterna kan uppvisa vill vi beskriva växelverkan mellan intuitiva idéer och formella strukturer så som dessa kommer till uttryck främst i begreppsdefinitioner och formella bevis.

Metodiska överväganden

Intentionell analys

Som redan nämnts används i denna studie en analysmodell som syftar till att belysa och rimliggöra studenters agerande då de ställs inför en matematisk uppgift; intentionell analys. Intentionell analys har kommit att bli benämningen på en typ av kvalitativ analys som utvecklats av forskargruppen Kommunikation och kunskapsbildning vid Pedagogiska institutionen vid Stockholms universitet (Halldén, 2001). Analysmetoden bygger i huvudsak på von Wrights studier (1971) av vad som karakteriserar mänskligt handlande och vad som skiljer en historisk förklaring från en förklaring av t ex fysikaliska fenomen. Analysen syftar till att beskriva individers begreppssystem samt hur dessa används i specifika situationer.

Enligt von Wright (*ibid.*) måste man för att förstå individers agerande tillskriva mening till individernas beteende, dvs. uppfatta deras agerande som intentionella. Det finns mänskligt agerande som inte är intentionellt. Hjärtslag och peristaltiska rörelser sker icke-intentionellt men det är inte denna typ av aktiviteter som vi här är intresserade av. En ryckning i ögonlocket kan vara intentionslös men det är viktigt att kunna skilja en sådan ryckning från t ex en flört där det finns en intention, medveten eller omedveten, hos den agerande. Det är i ljuset av en intention som ett agerande blir meningsfullt och kan beskrivas som en handling, som i exemplet ’flört’.

Intentionell analys ger en modell för agerande som kan utgöra ett hjälpmedel för att förstå meningen i en individs agerande i en given situation och varför individen agerade som han gjorde. Grundtanken i den intentionella förklaringsmodellen är att ett beteende blir begripligt och meningsfullt genom att agenten förutsätts agera intentionellt (Jakobsson Öhrn, 2001).

För att kunna tolka individernas aktiviteter som meningsfulla handlingar måste därför den beskrivning vi utgår från vara så detaljerad att meningen kan bestämmas. Benämningen ”tjock beskrivning” används av Geertz (1991) för en redovisning av vad som sker där också sammanhanget för agerandet lyfts fram. Geertz påpekar att vi i våra beskrivningar av mänskligt agerande måste vara aktörsorienterade, dvs. våra tolkningar måste göras i termer av handlingar som rimligen kan tillskrivas individen.

Ett sätt att förstå den intentionella analysen är att se den som skapandet av en *modell*. Vi modellerar verkligheten för att försöka förstå vad som händer på samma sätt som en tillämpad matematiker skapar modeller för bakterietillväxt, spridning av luftföroreningar eller andra problem man önskar studera.

Verklighetens agerande och yttranden försöker vi med hjälp av den intentionella analysen modellera. I modellen kan vi genom att tillskriva individerna intentioner tolka deras agerande som handlingar och därmed öka förståelsen av den verklighet de upplever. Intentionalitet utgör alltså ett grundantagande för modellen. I modellen använder vi begreppen *handling*, *utsaga* och *determinanter*. Dessa begrepp reserveras för arbetet inom modellen och ska inte förväxlas med beskrivningar av verkligheten som görs i termer av *agerande* (beteende, aktiviteter), *yttranden* samt *kognitiva och situationella betingelser*.

Intentionell analys är en systematisering av den tolkande verksamhet som vi alla använder i vårt dagliga liv när vi försöker förstå andra människors agerande. Syftet med att tala om intentionell analys som en specifik metod är att öka medvetenheten om tolkandet och därmed öka systematiken i analysen. Dessutom blir det möjligt för läsaren att granska de tolkningar forskaren gjort.

Att tolka beteende i ett intentionellt perspektiv är alltså att försöka svara på varför individen agerade på ett givet sätt. Samma agerande, t ex en serie enskilda beteenden som ”går mot ett fönster, lyfter handen, griper i handtaget, skjuter fönstret utåt,…” kan ges flera förklaringar: individen agerar så **för att** öppna fönstret, **för att** vädra eller **för att** släppa ut en fluga. Detta för-att-motiv är avgörande för vilken beskrivning som passar in i modellen. Vi söker den handling som gör enskilda beteenden rimliga och meningsfulla i ljuset av en avsikt, ett mål som individen försöker uppnå: fönsteröppning, vädring, flugjakt.

Ett sätt att illustrera en intentionell förklaring är att konstruera en praktisk inferens (Halldén, 2001; Scheja, 2001):

Premiss 1:	P vill/önskar/avser att åstadkomma x.
Premiss 2:	P tror att han kan åstadkomma x genom att göra y.
Slutsats:	Därför; P gör y.

Som observatörer ser vi att P gör y, t ex går mot ett fönster, tar i handtaget, osv. P:s beteende blir meningsfullt om vi antar att P har ett syfte x, t ex att vädra. Relationen mellan x och y skapas av den som tolkar agerandet. I denna mening tillskriver vi som tolkare en intention för agerandet. Med intention menar vi alltså inte här nödvändigtvis en medveten mental akt hos aktören. Intentionen avgör tolkaren genom att matcha premisserna i slutledningen med konklusionen. Det är denna tillskrivna mening som kan prövas och försvaras, eller förkastas, i den intentionella analysen.

Handlingens determinanter

I en intentionell analys söker vi premisserna för en individs agerande. Det finns endast indirekta sätt att fastställa en agents intentioner: genom att titta på faktorer som kan tänkas påverka individen att agera på ett visst sätt kan vi dra slutsatser om en persons avsikter (Jakobsson Öhrn, 2001).

von Wright (1979) gör en distinktion mellan två typer av faktorer som bestämmer en individs agerande benämnda *interna determinanter* respektive *externa determinanter*. De interna determinanterna är interna genom sin association med den förmodade mentala dispositionen hos agenten. De syftar på individens emotionella, kognitiva och fysiska tillstånd. De externa determinanterna får sin externa karaktär genom att vara associerade med egenskaper utanför agentens förmodade viljekraft. De syftar på individens föreställningar om och tolkningar av den situation i vilken handlingen utförs och av den kultur i vilken situationen är inbäddad. Vi skulle också kunna benämna determinanterna psykologiska/mentala respektive sociokulturella/diskursiva (Halldén, 2001).

Med determinanter för en handling menas i den intentionella analysen inte orsakerna till handlingen utan determinanterna konstitueras av de olika typer av premisser som kan ingå i den praktiska slutledningen, inferensen. Determinanterna ska inte heller ses som psykologiska entiteter hos agenten utan snarare som en begreppsapparat för att analysera handlande (Scheja, 2001). De är inte observerbara entiteter utan de utgörs av de föreställningar eller begreppsstrukturer som vi tillskriver individen vid konstruktionen av den praktiska inferensen och de är härledda genom matchningsförfarandet mellan premisser och konklusion.

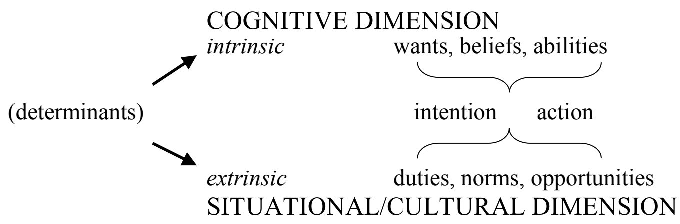

Fig. 1. Handlingens determinanter (efter Scheja, 2002, s. 58)

Att forma en intentionell förklaring betyder inte i första hand att isolerat analysera ett enstaka agerande genom att konstruera en praktisk inferens. Det innebär framförallt att leta efter ett fält av sammanlänkade fakta, en narration om agenten. Enligt Scheja (2001) är just detta sökande den intentionella analysens väsentliga kännemärke. Att göra en distinktion mellan interna och externa determinanter för handlingen öppnar dessutom upp för att ta hänsyn till både kognitiva och sociokulturella aspekter av lärandeprocesserna (se fig. 1).

Den intentionella analysens sökande efter sammanlänkade data och den noggranna tolkningsanalysen ger också en möjlighet att tränga djupt in i aktörernas beteenden. Det ger därmed en möjlighet att se potential hos aktörerna, en potential som ofta förblir osynlig vid en ytligare analys.

När vi med hjälp av intentionell analys gör en tolkning av ett samtal utgår vi från ett datamaterial som här består av dokumenterade samtal mellan studenter som löser en matematikuppgift. Genom transkribering av materialet har vi ”stannat tiden” och samtalet blir möjligt att återvända till. Vårt material består av det videobandade samtalet och de anteckningar som studenterna gjort i det att de löste en given uppgift. Men i tolkningssituationen tillför vi också bakgrundsinformation. Det är med hjälp av denna bakgrundsinformation som de externa determinanterna konstitueras. Vi som tolkar har t ex kunskap om hur matematikkurser brukar se ut och hur läroböcker vanligen framställer olika begrepp. Vi har dessutom egen erfarenhet och kunskap om matematik. Utan dessa kunskaper skulle förmodligen tolkningen ha varit svår att genomföra.

Validering av analysen

En tolkning av ett agerande innebär alltså att en intention tillskrivs en agent. Tolkningens giltighet, validitet, får mätas mot det stöd tolkningen får av det empiriska materialet som samlats t ex genom observationer samt av relevant teoribildning. Valideringen kan ses som en argumentationsprocess. Den accepterade tolkningen blir därmed alltid öppen för fortsatt argumentation. Möjligheten att mot det empiriska materialet testa forskarens tolkningar är en av styrkorna hos metoden.

Denna typ av analys kan inte valideras genom hänvisning till agentens egen syn på sitt agerande. Frågan om hur vi vet att individerna verkligen har de intentioner vi tillskriver dem är inte relevant eftersom vår tolkning utgör en modell. Det är i denna modell som agerandet blir till meningsfulla handlingar. Om man skulle fråga aktören är tolkningen som denne föreslår i samma grad en tillskriven intention. Aktören har möjligen större kännedom om sina egna bevekelsegrunder men kan också vara påverkad av andra omständigheter t ex av viljan att framställa sig i en gynnsam dager. Ett beteende kan också förklaras på mer än ett sätt givet att dessa är rimliga beskrivningar av individens agerande. Vilken av dessa vi väljer beror på syftet för vår studie. I denna studie lägger vi fokus på intentioner relevanta för den matematiska verksamheten. Aktörerna skulle, om vi frågade dem, kunna välja andra syften där matematiska handlingar inte står i fokus.

Den empiriska studien

Studiens genomförande

Studenterna som deltagit i studien läser matematik på universitetsnivå. Studien genomfördes med tre grupper av studenter som frivilligt anmält sig att medverka i undersökningen som genomfördes utanför ordinarie undervisning. Den grupp som närstuderas valdes ut då datamaterialet runt denna grupp erbjöd ett rikt underlag för studier av den här aktuella frågeställningen. Gruppen bestod av fyra studenter, två kvinnor och två män. De fyra studenterna följde alla ett matematikprogram vid ett svenskt universitet. Tre av dem var när studien genomfördes i slutet av sitt första studieår och hade under året studerat tillsammans. De hade när studien genomfördes läst ca 30 poäng matematik. En av gruppmedlemmarna gick i en högre årskurs men läste vid tillfället samma kurs i flervariabelanalys som de andra tre.

Den uppgift som valts är inspirerad av en uppgift som tidigare använts som inlämningsuppgift inom en av matematikkurserna på programmet Naturvetenskaplig problemlösning vid Göteborgs universitet. Uppgiften fick sin slutgiltiga formulering efter att ha testats på enstaka studenter och några matematiker. Studenterna i gruppen fick tillgång till uppgiften dagen innan studien genomfördes, med instruktionen att var för sig fundera igenom problemet men inte diskutera det med varandra. Valet att ge dem tillgång till uppgiften gjordes för att gruppen snabbt skulle komma igång med sitt arbete.

Uppgiften:

Låt f vara en funktion definierad på hela ***R****.*

a) *Hur många nollställen kan funktionen högst ha om för alla x gäller att* $f'(x) \neq 0$*?*

b) *Om istället* $f''(x) \neq 0$ *vad gäller då för antalet nollställen till funktionen?*

c) *Om vi har* $f^{(n)}(x) \neq 0$ *vad kan då sägas om antalet nollställen till funktionen? Använd induktion för att bevisa ert påstående.*

Gruppen fick inga tidsramar för sitt arbete utan instruerades att arbeta så länge de själva önskade. Gruppen som har valts som exempel använde totalt 115 minuter. Studien har genomförts genom videoinspelning utan närvarande observatör. De anteckningar som studenterna gjorde har samlats in och analys av dessa ingår i underlaget för tolkningen av gruppens arbete. Gruppmedlemmarna har i presentationen givits namnen Alex, Beth, Carl och Diana.

Gruppens samtal har transkriberats i sin helhet. Pauser och tvekan i studenternas tal har markerats med punkter (…). Punkter har också använts då yttranden är inflätade i varandra samt när yttranden saknar tydlig start eller lämnas oavslutade. När betoning av ord eller uttryck avviker från normal prosodi har det betonade ordet markerats med fet stil. De delar av studenternas samtal som finns återgivna i berättelsen om gruppens arbete har redigerats något för att öka läsbarheten. Matematiska uttryck har återgivits med matematiska symboler när det bedömts förenkla läsandet utan att påverka tolkningen av studenternas uttalanden. Felsägningar som direkt rättats av studenten själv har strukits och en del talspråkliga uttryck presenteras i sin skriftspråkliga form. För en diskussion om detta sätt att presentera ett datamaterial för läsaren se t ex Trankell (1973). De utdrag från samtalet som presenteras i analysavsnittet är inte redigerade på detta sätt utan är hämtade direkt från transkriptionen. Läsaren ges därmed också möjlighet att granska hur direkta citat har redigerats.

Gruppens arbete

Reflexion över uppgiften

Gruppen börjar sitt arbete med att tydliggöra uppgiften. Uppgiften är inte fullständigt specificerad men detta leder inte till några tolkningsproblem för gruppen. De konstaterar snabbt att det är c-uppgiften som är den viktiga och att a- och b-uppgifterna utgör en startsträcka. De gör en inventering av vad de kan sedan tidigare och vad de känner igen.

Diana: Vi har nog haft någon sådan här liknande, men…

Gruppen konstaterar att om derivatan inte är noll så kan derivatan inte byta tecken. Funktionen är därmed växande, eller avtagande, hela tiden. Funktionen kan därför ha högst ett nollställe. Gruppen övergår till b-uppgiften och gör en ny inventering. De konstaterar att om andraderivatan är skild från noll så är derivatan växande eller avtagande och då byter derivatan tecken högst en gång. De ritar en figur som visar en parabel och konstaterar att detta innebär att funktionen kan ha högst två nollställen.

Efter ca fyra minuter kommer gruppen fram till c-uppgiften.

Beth: Men nu har vi induktion här, det blir spännande.

Formulering av hypotes

En hypotes formuleras snabbt, utan någon diskussion alls i gruppen.

Carl: Ja just det, om nollställen, n stycken nollställen. Det är det vi tror va?

Alla håller med. Ett problem uppstår dock, vad ska man göra induktion över? Man är ganska klar över den formella gången i ett induktionsbevis, men har svårt att få in denna uppgift i en mall för sådana bevis.

Carl: Då ska man ha ett basfall först, ... Börjar vi på f prim x eller börjar man på, det finns ingen f noll x va?

Gruppen enas om att man börjar på $f'(x)$ men är inte överens om huruvida detta redan är bevisat eller inte. Man konstaterar att satsen om mellanliggande värden nog kan användas men konstaterar också att detta kanske inte är det viktigaste.

Carl: Men det kan vi göra sen, om vi vill göra ett jättefint bevis, för det är ju inte det svåra ändå känns det som, utan det svåra är väl det som man ska bevisa nu.

De söker en idé för att kunna genomföra beviset och funderar över vari svårigheten består. För att kunna formalisera krävs att man har idén. Gruppmedlemmarna skämtar också lite om vad man gör.

Carl: Enligt satsen om monoton konvergens eller någonting sådant (fniss).

Man gör ett induktionsantagande men känner sig inte trygg i detta.

Carl: *Så vi antar alltså det här för något p då. För något p så gäller att $f^{(p)}(x) \neq 0$ och då så gäller att f har p stycken nollställen. Det här känns ju livsfarligt tycker jag, men det funkar ju, det är ju så…*

Här finns inte med att det handlar om **högst** p nollställen. Man kan emellertid senare i studenternas samtal se att denna specificering tas upp igen när den behövs.

Att bevisa med induktion

Gruppen fortsätter diskussionen om vad induktion är. Diana försöker förklara. Vid denna tidpunkt när gruppen arbetat i ca 9 minuter presenterar Diana en idé som senare återkommer.

Diana: Alltså jag tänker, eller, det kanske bara är jag som inte har så där stenhård koll på induktionen. Det känns som att det kan alltid gå tillbaka ett steg och överföra det på de här två (pekar på a- och b-uppgiften i Carls lösning) *och säga att om derivatan är skild från noll, då har funktionen bara ett nollställe. Och ifall tredjederivatan är skild från noll så har andraderivatan bara ett nollställe och så fortsätter man så.*

Beth vidhåller hela tiden en formell mall för induktionsbeviset.

Beth: Man antar väl det här, men sedan så lägger man till, steget ovanför. Men då ska det ändå bli antagandet liksom. Det är väl så principen är. Men jag vet inte riktigt hur man ska…

Beth vill passa in beviset i lärobokens mall och återkommer till detta gång på gång under gruppens arbete. Dessa kommentarer stör gruppens arbete och gör att man vid flera tillfällen tappar bort goda idéer. Så t ex uppstår en diskussion om åt vilket håll induktion ska göras.

Carl: $f^{(p)}(x)$ *den kommer ju att se ut… Det är ju derivatan av en annan funktion. Alltså är det ju enklare att gå åt det hållet i och för sig. Får man göra det? Men det är väl bara bra att göra det, är det inte det? Om vi börjar med* $f^{(p+1)}$*, om den är skild från noll, då har* $f^{(p)}(x)$ *... Men det var inte det vi ville visa, precis som vi sa förut...*

Det uppstår också en dispyt mellan två av gruppmedlemmarna.

Alex: Alltså, jag tänker att om man börjar med det här som antagandet och går bakåt, alltså om man går från p+1 till p och visar det.
Beth: Induktionen är väl att man går steget uppåt och sedan visar att det är det samma som steget under.
Diana: Ja för du måste ju, du kan ju inte, alltså…
Beth: Och då gäller det hela vägen liksom…
Alex: Ja.
Diana: Poängen är ju att du ska börja på p så ska du ta p+1, ...
Alex: Ja, jag tar nog det (tyst och med miner) *bla, bla, bla ...*
Diana: ... så du räknar uppåt…
Alex: Ja.
Diana: ... och inte nedåt för då kan du välja ett p och så kan du gå neråt från det här, för vi vet inte…
Alex: Mm.
Diana: Annars får du ju börja med världens största…
Alex: Ja. Oändligheten.

Diana: Ja…

Carl: … känns som det skulle vara okej med ett ospecificerat p som skulle kunna vara godtyckligt stort… Det är konstigt att det inte fungerar, men…

Efter denna ordväxling tar speciellt två av gruppmedlemmarna, Carl och Diana, tag i arbetet och försöker komma vidare. Diana kommer med en viktig idé:

Diana: Vi kan derivera den där liksom (pekar i Carls lösning på $f^{(p)}$)*, så får vi den där* (pekar i Carls lösning på $f^{(p+1)}$).

Ett induktionsbevis innebär att senare fall återförs på ett tidigare. Vet man hur detta går till så är beviset i princip klart. Carl verkar nu se att kanske den avgörande idén finns här.

Carl: Och så, antingen är det färdigt eller så är det jättesvårt (skratt).

En inventeringsfas

Efter detta konstaterande sker ett brott i gruppens arbete. De övergår till en inventering om vad de vet om derivator och funktioner.

Diana: Om den är skild från noll, vad innebär det då för derivatan? Och om ***funktionen*** *är skild från noll, vad innebär det då? ... om derivatan?* (ritar) *Det säger ju ingenting, eller, det säger ju…*

Beth: Nej, det säger ju inte, det kunde högst vara ett nollställe, men den kanske inte har något nollställe.

Diana: Nej.

Alex: Men, men...

Alex: Det säger väl visst någonting, om en funktion är…

Diana: Nej.

Alex: … skild från noll då säger det att, då korsar den inte…

Beth: Nej den korsar inte.

Alex: Den korsar inte. Och då måste den vara antingen växande eller avtagande.

Diana: Den kan väl gå så här? (ritar, se fig. 2) *x-axeln kan ju alltid ligga under. Det säger ju ingenting. Funktionen kan ju hoppa och ha sig lite hur som helst här.*

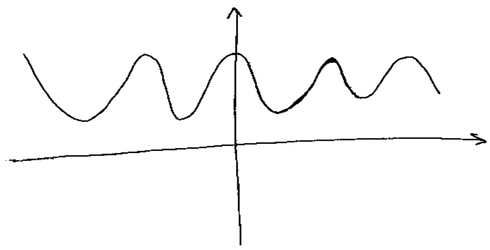

Fig. 2. Dianas bild av funktionen.

Diana visar här att hon har sådana kunskaper, en begreppsuppfattning, om derivata att hon enkelt kan konstruera ett exempel.

En strategi för lösningen

Efter en kort diskussion om huruvida det är **alla** derivator som ska vara skilda från noll enas man om att det bara är högsta derivatan som ska vara skild från noll. De fortsätter diskussionen.

Diana: Men kan man inte använda sig av att $\left(f^{(p)}\right)' = f^{(p+1)}$*? Det är jättesvårt att prata om vad den p:te derivatan gör för funktionen, man måste prata om vad den gör för p-1 derivatan typ, eller vad man ska säga.*

Carl: Jaa… men om... nu lyssnade jag inte på dig, för nu tänkte jag...

Diana: Ja, vad tänkte du?

Carl: Jag tänkte bara att det känns ju som vi redan har sagt att f…, om den är skild från noll, då kan den max ha ett nollställe.

Diana: Mm.

Carl: Och det känns som att vi för vilket p som helst här uppe kan säga att om den är skild från noll, då har den tidigare…

Diana: Ja.

Carl: ... ***högst*** *ett mer nollställe än den innan, eller?*

Beth: Ja eller… ja…

Alex: Mm.

Carl: Fast det är en sak att säga, en annan sak att skriva det.

Diana: Jo, men då gör man väl…

Beth: Det är vårt påstående i alla fall, att det är så.

Carl: Men då kommer man ju från p till p-1, och inte från p till p+1, och det känns som man kan göra det ändå.

Att dela upp i intervall

Här har gruppen hittat en möjlig strategi till lösning men de ser inte hur denna ska kunna genomföras. Dessutom tycker de inte att idén passar in i mallen för ett induktionsbevis. Idén här är att överföra från ett högre fall till ett lägre. Det enkla går här till synes från *p* till *p-1* och inte som de önskar från *p* till *p+1*. Efter en stunds funderande och resonerande kommer en ny idé upp.

Carl: *Fast vad händer om vi tänker oss att vi har den här funktionen här, och den har högst ett nollställe. Kan man inte dela upp den då? Då så har vi ett område här, där vi har ett nollställe. Sedan har vi…* (tyst) *det spelar ingen roll… jag tänker på, när vi får en massa nollställen, då kan man tänka att man har områden…*
Diana: *Man kan dela…*
Carl: *… liksom där man har …*
Diana: *Ja, just det då delar du upp...*
Carl: *… så att man har ett nollställe i varje område, och då kan man...*
Diana: *Ja… just det.*
Carl: *Fast då har man kanske inte …*
Diana: *Jo, för då har du ju så här: på den har du två separata delar… där funktionen… eller den här, är skild från noll.*
Carl: *Men det jag tänker är att det kanske blir en massa problem, det ska helst vara definierat på hela **R** liksom för att det ska gå…*
Diana: *Ja, fast det blir… ja, just det, du får ta bort den punkten där, där den **är** noll.*

Idén att dela upp i intervall är mycket naturlig men fungerar inte för denna uppgift på det sätt gruppen föreslår. Att dela i intervall på detta sätt ger inte tillräcklig information för att kunna slutföra ett bevis för den hypotes som uttalats. Diana greppar idén med intervalldelning men gruppen tappar bort den. Hela gruppen störs dessutom av att deras idé verkar ha en annan riktning än de är vana vid. De vill formalisera sina idéer i mallen för induktionsbevis men klarar inte detta.

Omformulering ger ett lemma

Efter ytterligare funderande, gruppen har nu totalt arbetat ca 40 min, kommer Diana med en omformulering av en tidigare idé.

Diana: *Men alltså om* $f^{(p)}(x)\neq 0$, *om det implicerar att f har högst p nollställen, … om då* $f^{(p)}$ *har högst ett nollställe, vad implicerar då det?*
Carl: *En gång till. Om en funktion har…*
Diana: *Alltså, vi vet ju att* $f^{(p)}(x)\neq 0$, *implicerar högst p nollställen. Det är vårt antagande liksom. Om vi **med** det antagandet, liksom lägger till att vi låter*

$f^{(p)}$ ha högst ett nollställe. Vad kan vi då säga om antal nollställen för f? Kan vi säga någonting?

Carl Om $f^{(p)}$ har ett nollställe, då borde f kunna ha p+1 känns det som, eller?

Detta omformuleras ytterligare till ett påstående som kan uppfattas som ett lemma:

Diana: ...alltså det som man ska visa tror jag är att om f' har max så många nollställen…

Carl: Mm.

Diana: ... då kan f ha max så många plus ett nollställen, va?

Carl: Mm, och det känns ju som om det skulle vara antagandet…

Diana: ... den grejen, fast…

Carl: Javisst. Och då känns det väl inte så svårt att visa. Det är liksom det som vi har gjort från början, eller?

Gruppen har nu alla de ingredienser som behövs för att få ihop ett bevis men de vill formalisera detta och stöter då på svårigheter. De ställer formella krav på sitt resonemang som de inte klarar att nå upp till. De störs av att inte kunna passa in beviset i den mall för induktionsbevis som de jobbat med under sina kurser. De går återigen in i en inventeringsfas. Efter en stund görs en reduktion av problemet på så sätt att man bestämmer sig för att anta att man har funktioner så att funktionen har det maximala antalet nollställen.

Kanske inte det snyggaste induktionsbeviset

Gruppen har nu jobbat i över 60 min och börjar tycka att arbetet är ganska rörigt. Men de tar nya tag och kommer med nya idéer och omformuleringar av tidigare idéer.

Diana: Fast kan man inte säga då, att $f(x)$ har p nollställen, och det är det maximala antalet, då vet vi att då måste det vara så att den p:te derivatan har inga nollställen.

Carl: Det har du kommit fram till med induktion där på nåt sätt eller?

Diana: Ja det innebär liksom samma sak, så att säga.

Carl: Ja, mm.

Diana: Och om istället då den p:te derivatan har ett nollställe så blir det p+1 som är det maximala antalet, och… då har du att ... för att det ska bli max ett där…

Carl: Mm.

Diana: ... på p:te derivatan så måste det vara p+1 nollställen från början. Så har man ju det maximala antalet som är det fixa talet som du alltid måste ha. Det blir fel för man börjar i fel ända, men okej, det är så här…

Carl: *Men vi är ense om att det går att resonera på det hållet?*
Diana: *Ja, men det är ett godtyckligt p i alla fall, och* ***då*** *kan du använda att, om du, enligt ditt antagande att $f^{(p)}(x) \neq 0$ implicerar att f har högst p nollställen, säga att $f^{(p+1)} \neq 0$, vilket då implicerar att $f^{(p)}$ har högst ett nollställe, vilket då implicerar att det finns p+1 nollställen, max.*
Carl: *Mm.*
Diana: *Kanske inte det snyggaste induktionsbeviset jag har sett men…* (fniss)

Här formulerar Diana ett bevis som passar i mallen men beviset har ett fel som studenterna inte ser i detta läge. Att *f* har *p+1* nollställen kan med studenternas antagande inte fås av att $f^{(p)}$ har högst ett nollställe.

Formaliseringskrav

Studenterna kunde kanske ha brutit här men återigen är det de formella krav de ställer på sin lösning som gör att de går vidare.

Carl: *Är du så fräsch i huvudet så du kan skriva upp det så här tydligt på ett papper.*
Diana: *Nej, jag vet inte. Alltså är det så här? Kan man resonera så här och tänka att, 'jo men då är det nog så', eller 'då vet vi att det är så'.*
Carl: *Det är det här max ett som frågan gäller först och främst egentligen, eller?*
Diana: *Ja…*
Diana: *Fast det säger ju liksom ingenting…*
Alex: *Men alltså, i antagandet här, det här säger ju också att $f^{(p)}$, om den är skild från noll, så säger det också att f av p inte har några nollställen, …*
Diana: *Mm.*
Alex: *… och då har f högst p nollställen…*
Diana: *Alltså, det jag vill få fram är ju att om $f^{(p)}$ har ett nollställe, …*
Alex: *Mm, jo jag vet, jag…*
Diana: *… då har den liksom den, ja… eller vad säger, ja…*

Här upptäcker Diana felet i sitt tidigare bevis och formulerar om sitt resonemang. Studenterna gör åter igen en inventering av begreppens innebörd.

Diana: *Fast behöver man verkligen det här? Kan man inte bara… Man vet ju att det är så liksom… Det är ju ändå att derivatan har en egenskap, som implicerar att funktionen har en viss egenskap, det är ju det vi vill visa liksom…*
Carl: *Mm.*
Diana: *… och inte så här, inte tvärt om egentligen, alltså…*
Carl: *Nej, det är ju väldigt sant …*

Diana: Mm.
Carl: ... så på så sätt känns det ju som det vettiga hållet och gå till är, att vi börjar egentligen i det $f^{(n)}(x)$ vi vill ha. Och sedan så vill vi ifrån den induktionera oss fram till den här, som vi inte vet hur långt bort den gäller, men…
Diana: Men om man har en liksom…
Carl: ... n:te primitiven, eller p:te primitiven.
Diana: Mm, om den har n, och det implicerar då att den har n+1, ...
Carl För det är ju faktiskt det som är frågan, vad kan sägas…
Diana: Och vad är det som har bestämt att det är den som har det? Jo det är ju någonting här som har sagt att den är den. Jo det är ju att den hade n-1, vilket gav den max, ...
Carl: Mm.
Diana: ... n, vilket som i sin tur liksom är bestämt av nånting.
Carl: Jag tycker att det får räcka. (fniss) ... *Men, om man läser frågan alltså, så är det ju verkligen åt det hållet pilen går i alla fall.*
Diana: Ja.
Carl (läser uppgiftstexten)*: **Om** vi har $f^{(n)}(x) \neq 0$, vad kan sägas om antalet nollställen till f.*

Ett mer generellt påstående

Carl formulerar nu ett allmännare påstående som gör att den slutsats som tidigare dragits på för svaga grunder kommer att vara en korrekt slutsats. Detta påstående formuleras mer exakt när Carl efter ett tag förklarar för Beth.

*Carl: Men där, det känns lite som ditt induktionsantagande, du har rätt där på nåt sätt, att man inte antar att man har **noll**, att den är skild från noll för alla x, utan att man har ett ändligt antal nollställen. Om man har p stycken nollställen, vad händer med derivatan…*
Diana: Ja…
Carl ... eller vad händer med den primitiva funktionen.

Alla funderar några minuter under tystnad. Carl och Diana skriver och jämför sedan sina lösningsskisser.

Carl: Det är ju med hjälp av det vi gjort, man får på nåt sätt utgå ifrån det här också eller hur? (pekar i sina anteckningar: $f^{(p)}$ har n nollställen $\Rightarrow f^{(p-1)}$ har $n+1$ nollställen) *Fast det blir ju max…*
Diana: Ja…
Carl: Om $f^{(p)}$ har n nollställen och, den primitiva funktionen till den har max n+1 nollställen, om vi skulle veta det, ...

Beth: *Mm.*
Carl: *... och vi vet att n:te, eller p:te, derivatan den har inga nollställen, då vet vi i så fall att nästa ...*
Diana: *... har max ett.*
Carl: *... har max ett nollställe, och så måste vi med induktion kunna fortsätta och säga att om* ***den*** *har max en då har* ***den*** *max två,* ***den*** *max… och faktiskt säga någonting. Det måste vara en riktig induktion…*
Diana: *Ja, man vet att den implicerar den som i sin tur implicerar den som implicerar den och så.*
Carl: *Mm. Och sen så tycker jag att om man säger att det här är en funktion* (ritar, fig. 3), *så om vi har nollställen på derivatan…*
Beth: *Mm.*
Carl: *... ja, dom där är inte så bra att ta med egentligen, dom skulle bara gå ner så där egentligen* (ändrar i det han har ritat, se fig. 3). *Om vi har tre nollställen för derivatan då kan vi* ***högst*** *ha fyra stycken. Även om det här kanske inte var ett bra formellt bevis, så känns det som att jag blir väldigt övertygad om att det* ***är*** *så, ...*
Diana: *Ja.*
Beth: *Jo det är sant.*
Carl: *... och då så stämmer det och då så stämmer det alltihop.*

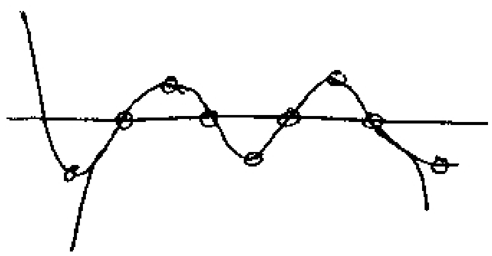

Fig. 3 Carls bild av en funktion.

Ytterligare formaliseringskrav

Här finns nu alla ingredienser för beviset men återigen är det studenternas krav på formalisering som gör att de fortsätter.

Carl: *Och om man skulle göra det här formellt, ...*

Studenterna gör återigen en inventering av vad som kan behövas, den här gången i form av formella verifieringar. De hänvisar till satsen om mellanliggande värden och ger argument för sin hypotes: *f' har n nollställen $\Rightarrow$ f har n+1 nollställen.* De diskuterar också återigen huruvida induktionen går åt rätt håll eller inte. Hur bunden måste man vara av det formella?

Carl: När vi hade det på baskursen så var det ju väldigt viktigt vilket håll man gick åt. Men det känns ju som att det egentligen inte ska spela någon roll, om man vet att man landar någonstans.

Efter nästan 90 minuter arbete känner sig studenterna nu ganska klara med uppgiften.

Diana: Det tycker jag är skitbra bevis det här.
Carl: Jag känner mig jättenöjd.
Diana: Jag är jätteimponerad. (fniss)

Avslutning

Det återstår 25 minuter av gruppens totala arbete. Denna tid ägnas framförallt åt att diskutera hur kommunikativt deras bevis måste vara. Alex har starka invändningar mot att det bevis som gruppen presterat duger. Invändningar är framförallt av kommunikativt slag. Alex kräver att förstå. Diana åtar sig lärarrollen, delvis med hjälp av Carl. Till sist lämnar ändå gruppen uppgiften utan att egentligen vara på det klara med om de har löst uppgiften eller ej.

Diana: Vad är klockan nu?
Carl: Den är 15.04.
Diana: Oj, då har vi suttit här i två timmar typ.
Alex: Ska vi inte ge upp nu? (fniss)
Diana: Nej, men jag tycker inte vi ska ge upp, det här är vårt bevis.
Carl skrattar.
Diana: Man kan säga att i kombination med det här så är det ju ganska… eller så säger vi att vi vet inte hur vi ska göra, (sänker rösten) *vi kan inte, det här är för svårt för oss.*
…
Carl: Då ger vi oss. (skratt)
Diana: Ja. Vi är nöjda ändå.

Analys

I detta avsnitt ges två exempel på hur gruppens samtal analyserats. Därefter följer en beskrivning av hur studenterna i stora drag löser uppgiften, vilket innebär att vi främst ser på hur studenterna genomför induktionsbeviset.

Växelverkan mellan det intuitiva och det formella

I denna text finns inte möjlighet att presentera en fullständig analys av hela datamaterialet. Här redovisas två korta utdrag från gruppens samtal och några figurer från studenternas anteckningar samt hur detta kan analyseras med hjälp av intentionell analys. I det första fallet lyfter vi särskilt fram växelverkan inom en begreppsuppfattning. I det andra exemplet fokuserar vi särskilt växelverkan mellan intuitiva och formella resonemang. Resultat från hela analysarbetet har sedan samlats i nästa avsnitt.

Växelverkan mellan formell och intuitiv begreppsuppfattning

Det första utdraget är valt för att visa hur man genom analysen kan synliggöra växelverkan mellan formella och intuitiva delar av begreppsuppfattningar. De begrepp som explicit används i utdraget är funktion och derivata. Gruppen har innan utdraget arbetat ca 15 minuter och under denna tid löst a- och b-uppgifterna. De har diskuterat hur man i c-uppgiften rätt ska använda induktion. De har en idé men är osäkra på hur den kan formaliseras. De övergår därför till en inventering av vad deras uppfattningar om begreppen derivator och funktioner kan tillföra problemlösningen.

---

[1] Diana:	Men fortfarande, hur, hur, ja hur kan vi visa det? Vi kan, vi kan derivera den där liksom, så får vi den där *(pekar i C:s anteckningar på* $f^{(n)}(x) \neq 0$ *respektive* $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ *)*
[2] Carl:	Mm.
[3] Diana:	Ja.
[4] Carl:	Ja, precis.
[5] Carl:	Och så, antingen är det färdigt eller så är det jättesvårt *(skratt)*
[6] Beth:	Ja, vi har väl principen hur det liksom ska fungera, men sen är det väl om man ska ta derivatans eh, hur är det liksom, hur det fungerar. Att gå på den liksom, och...
[7] Diana:	Om den är skild från noll, vad innebär det då för derivatan? Och om **funktionen** är skild från noll, vad innebär det då? ... om derivatan? *(ritar)*

[8] Carl: Nä, just det…
[9] Diana: Det säger ju ingenting, eller liksom, det säger ju…
[10] Carl: Nä det säger ju inte nånting…
[11] Beth: Nä, liksom, det säger ju inte, det kunde högst va ett nollställe, men den kanske inte har något nollställe liksom, och derivatan ändå…
[12] Diana: Nä.
[13] Alex: Men, men...
[14] Alex: Det säger väl visst någonting om, om en, om en funktion är…
[15] Diana: Nä.
[16] Alex: … skild från noll då säger det att, då korsar den inte…
[17] Beth: Nä den korsar inte.
[18] Alex: Den korsar inte. Och då kan den, då måste den vara antingen växande eller avtagande.
[19] Diana: Den kan väl gå så här? *(ritar, se fig. 4)* x-axeln kan ju alltid ligga under, säger ju ingenting, funktionen kan ju hoppa och ha sig lite hur som helst här.

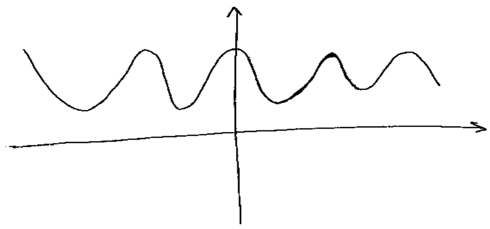

Fig. 4. Dianas bild av funktionen.

I yttrande [7] försöker Diana relatera begreppen funktion och derivata. Hon frågar vad det innebär att funktionen är skild från noll. Ett problem vid analysen av yttrandena är de obestämda referenserna. ”*Om den är skild från noll*”, vad syftar *den* på? I formuleringen av uppgiften studenterna arbetar med anges $f^{(n)}(x) \neq 0$ så det verkar rimligt att anta att det är n:te derivatan som åsyftas. Vi kan också se att Diana i yttrande [1] talar om $f^{(n)}(x)$. När hon sedan frågar vad detta innebär för derivatan är det rimligt att anta att det är derivatan av $f^{(n)}(x)$ som avses. Detta stöds av yttrande [1] eftersom derivatan av $f^{(n)}(x)$ är $f^{(n+1)}(x)$. Om så är fallet varför övergår Diana då till att fundera över vad avsaknad av nollställen hos funktionen har för effekt? Kanske är det så att hon tror att det hjälper att undersöka ett specialfall. Även n:te derivatan är ju en funktion. Tolkningen skulle i så fall kunna ges med följande inferens:

Premiss 1: Diana vill undersöka hur $f^{(n)}(x) \neq 0$ påverkar $f^{(n+1)}(x)$.
Premiss 2: Diana tror att hon genom att undersöka specialfallet $g(x) \neq 0$ kan få reda på något användbart.
Slutsats: Diana undersöker hur derivatan påverkas av att funktionen saknar nollställen.

Det kan också ses som rimligt att Diana döper om $f^{(n)}(x)$ och istället benämner detta *funktionen*. För tolkning av "*...om derivatan?*" blir det viktigt med intonationen. Transkriberingen är här inte tillräckligt tydlig, men en återgång till videofilmen gör att tolkningen blir att Diana menar "*för derivatan*". Det är inte fundering över ett nytt fall utan en fortsättning på frågeställningen om funktionens påverkan på derivatan. Med tolkningen att Diana har döpt om $f^{(n)}(x)$ till funktionen blir då "*derivatan*" liktydig med $f^{(n+1)}(x)$. Tolkningen skulle då kunna ges av följande:

Premiss 1: Diana vill undersöka hur $f^{(n)}(x) \neq 0$ påverkar $f^{(n+1)}(x)$.
Premiss 2: Diana kallar $f^{(n)}(x)$ för *funktionen*.
Slutsats: Diana undersöker hur förhållandet att funktionen saknar nollställen påverkar derivatan.

Tekniken att döpa om objekt för att reducera komplexiteten i ett problem är effektiv. Det är ett vanligt arbetssätt för matematiker men brukar anses svårt att hantera för nybörjare. Om det är riktigt att detta är något som är svårt för nybörjare kan Dianas arbetssätt ses som en indikation på att hon har en så god begreppsuppfattning om funktion och derivata att hon klarar att hålla isär dessa begrepp trots nya benämningar. Det kan också ses som en indikation på att hon är väl inskolad i den matematiska kulturen och medveten om att detta är ett effektivt arbetssätt samt att hon har ett handlag och en erfarenhet så att hon klarar att genomföra detta.

Dianas slutsats av undersökningen blir att ingen information kan fås på detta sätt. Carl och Beth håller med men Alex har invändningar. I yttrande [14] och [16] säger Alex "*om en funktion är skild från noll då säger det att, då korsar den inte...*". Här är referenserna mycket oklara. Det verkar rimligt att anta att *den* syftar på funktionen. Vad funktionen i så fall skulle korsa finns inget stöd för i Alex uttalande. Här behövs kunskap om den matematiska kontexten för att göra rimligt att det Alex åsyftar är hur funktionens graf beter sig i ett koordinatsystem. En funktion utan nollställen korsar inte *x*-axeln. Att det är korsning med *x*-axeln som åsyftas stöds också av yttrande [19]. Men med denna tolkning blir yttrande [18] svårt att rimliggöra. "*Och då kan den, då måste den vara antingen växande* *eller avtagande.*" Om *den* fortfarande syftar på funktionen drar Alex en felaktig slutsats. En annan möjlig tolkning skulle vara att *den* syftar på derivatan. Men att funktionen saknar nollställen leder inte till att derivatan är växande eller avtagande. Däremot gäller att om derivatan saknar nollställen så är funktionen antingen växande eller avtagande. En rimlig tolkning blir att Alex inte just här uppvisar begreppsuppfattningar för funktion och derivata som räcker i denna problemlösningssituation. För att validera tolkningen krävs dock mer data än vad som finns i det här redovisade utdraget.

Växelverkan mellan intuitiva och formella resonemang

Som ytterligare ett exempel på hur materialet har analyserats presenteras också ett utdrag från senare delen av studenternas samtal. Utdraget är valt för att visa exempel på hur studenterna växelvis använder intuitiva och formella resonemang.

Gruppen har innan utdraget arbetat ca 80 minuter. Efter att ha löst a- och b-uppgifterna formulerade gruppen snabbt en hypotes för c-uppgiften: Funktionen f har högst n nollställen. Gruppen har sedan gjort flera försök att bevisa sitt påstående. Ett förslag till arbetssätt för att komma vidare i problemlösningen har varit att dela upp x-axeln i intervall begränsade av funktionens eller derivatans nollställen. Här diskuterar studenterna ett delproblem, ett lemma, som en del av hela beviset för den hypotes som de ställt upp.

---

[1] Carl:	Om p:te derivatan har n nollställen och, den primitiva funktionen till den har max n plus ett nollställen, om vi skulle veta det, …
[2] Beth:	Mm.
[3] Carl:	… och vi vet att, att n:te, eller p:te derivatan, den har inga nollställen, då vet vi i så fall att, nästa …
[4] Diana:	… har max ett.
[5] Carl:	… har max ett nollställe, och så måste vi med induktion kunna fortsätta och säga att om **den** har max en då har **den** max två, **den** max… och faktiskt säga nånting. Det måste vara en riktig induktion…
[6] Diana:	Ja ja, men att man, att man faktiskt, ja, man vet att den implicerar ju den som i sin tur implicerar den som implicerar den och så.
[7] Carl:	Mm. Och sen så tycker jag att om man säger att, det här är, en funktion, *(ritar, fig. 5)* så om, om vi har nollställen på derivatan…
[8] Beth:	Mm.
[9] Carl:	… ja, dom där är inte så bra att ta med egentligen, dom skulle bara gå, gå ner så där egentligen *(ändrar i den figur han ritat, se fig. 5)*. Om vi har tre nollställen för derivatan då kan vi **högst** ha fyra stycken. Även

om det här kanske inte var ett bra formellt bevis så känns det som att jag blir väldigt övertygad om att det **är** så, …

[10] Diana: Ja.

[11] Beth: Jo det är sant.

[12] Carl: … och då så stämmer det och då så stämmer det alltihop.

[13] Diana: Mm.

[14] Carl: Å om man skulle göra det här formellt, …

[15] Diana: Det där går ju att bevisa, liksom **den**…

[16] Carl: … det är ju egentligen det där som är för ett nollställe i, i intervall måste det ju vara, …

[17] Diana: Mm.

[18] Carl: … och att om en funktion är strängt växande eller strängt avtagande i ett intervall så, så måste, och den börjar på ena sidan...

[19] Diana: Mm.

[20] Carl: … så där *(ritar, se fig. 6)*. Den måste ha ett nollställe då, om…

[21] Diana: Ja, ja men det är ju liksom så här enligt så här…

[22] Carl: … alfa till beta och medelvärdessatsen.

[23] Diana: Ja…

[24] Carl: … och sånt. Och att den måste…

[25] Diana: Ja och mellanliggande värde.

[26] Carl: Ja, mellanliggande värde också, ja just det.

[27] Diana: Ja, och enligt så här om den är positiv så är den växande, om derivatan är positiv så är den växande, och det vet vi och så det behöver vi inte, krångla med, tror jag. Men, ja…

[28] Beth: Jag sitter helt tyst, för jag tycker det liksom, de här grundgrejorna de förstår man ju så då va, men just liksom man ska liksom bevisa med induktionen nånting liksom, det känns som man bara bollar med samma saker och jag förstår liksom inte hur man ska få det på rätt sätt då.

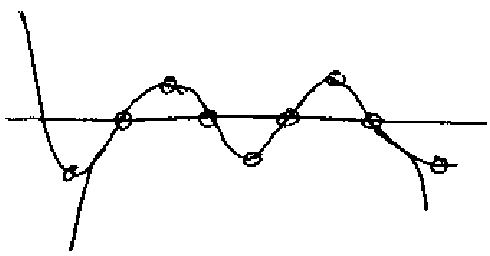

Fig. 5. Carls bild av en funktion.

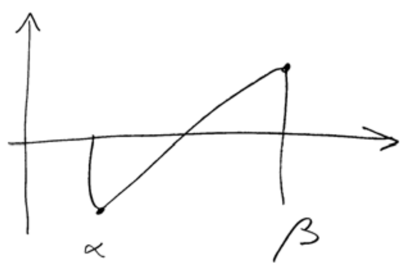

Fig. 6. Carl illustrerar satsen om mellanliggande värden.

Carl uttalar i [1] en hypotes: Om $f^{(p)}$ har n nollställen så har $f^{(p-1)}$ maximalt $n+1$ nollställen. Yttrande [3] lägger till att i detta fall skulle $n=0$. Härav skulle då, enligt Carls yttrande [5], en slutsats kunna dras om antal nollställen för funktionen *f*. Slutsatsen formuleras inte men en rimlig tolkning är att slutsatsen är samma som den hypotes gruppen tidigt i sitt arbete slog fast: Funktionen *f* kan ha högst *n* nollställen. Carl säger i [5] att ”*det måste vara en riktig induktion*”. Varför går han ändå vidare? En möjlig tolkning skulle kunna var att han inte tror på sin egen slutsats. Kan detta bero på att Carl inte uppfattar resonemanget som tillräckligt formaliserat? Eller kanske att Carl inte känner stöd i någon intuitiv idé?

I yttrande [9] ritar Carl en figur över en funktion (se fig. 5). Denna figur kan tolkas som ett generiskt exempel där en intuitiv idé kommer till uttryck. Exemplet kan generaliseras till godtyckligt antal nollställen. Funktionen är också vald så att möjliga fall täcks in. Det kan därför ses som en rimlig tolkning att Carl här inte bara prövar ett enda exempel utan ser det generella i exemplet. Carl säger sig bli väldigt övertygad om att hypotesen stämmer. En tänkbar tolkning av agerandet kan då vara att Carl försöker övertyga sig själv om sanningshalten i hypotesen. Tolkningen skulle kunna ges med följande inferens:

Premiss 1:	Carl vill övertyga sig om hypotesens riktighet.
Premiss 2:	Carl anser att ett generiskt exempel övertygar.
Slutsats:	Carl visar ett generiskt exempel.

Carl är medveten om att detta exempel ändå inte duger som ett formellt bevis och söker därför ett sätt att formalisera den intuitiva idén. Vid försöken att formalisera gör Carl i [16] ett uttalande där han påstår att nollställena måste ligga i intervall. Yttrandena [18] – [25] innehåller kopplingar mellan exemplets funktion uppdelad i intervall och formella satser som behandlar kontinuerliga funktioner på intervall. Möjlig tolkning är att studenterna här letar efter en koppling mellan sina intuitiva idéer och formella uttryck som satser och formella definitioner där de inblandade objekten finns representerade. I yttrande [20] och [22] extraherar Carl ut väsentliga delar i det han kallar medelvärdessatsen. Tolkningen kan presenteras med följande inferens:

Premiss 1:	Carl vill formalisera sina intuitiva idéer.
Premiss 2:	Carl anser att en formalisering måste kopplas till en sats.
Slutsats:	Carl letar sats där intervall, funktion och nollställe finns med.

Carl hittar medelvärdessatsen och Diana fyller i yttrande [25] på med satsen om mellanliggande värden. Med kopplingen till dessa satser verkar de nöja sig. I Dianas yttrande [27] säger hon att ”*om derivatan är positiv så är den växande*” och ”*det behöver vi inte krångla med*”. En tolkning av detta kan vara att hon anser att denna intuitiva idé är så övertygande att det inte krävs ett formellt bevis.

Premiss 1:	Diana har en intuitiv idé om vad positiv derivata innebär.
Premiss 2:	Diana anser att den intuitiva idén är så övertygande att inget formellt bevis krävs.
Slutsats:	Diana genomför inget formellt bevis.

En annan möjlig tolkning är att hon menar att i denna kontext anses sambandet mellan positiv derivata och en växande funktion vara en del av den gemensamma matematiska kunskapen och så grundläggande att bevis inte krävs. Denna tolkning kan uttryckas med följande inferens:

Premiss 1:	Diana vet att positiv derivata innebär att funktionen är växande.
Premiss 2:	Diana anser att detta är en del av gemensam grundläggande kunskap.
Slutsats:	Diana genomför inget formellt bevis.

Att kunna avgöra vad som i respektive kontext är gemensam grundläggande kunskap, och som därmed inte behöver bevisas, är något som brukar anses svårt för nybörjare. Om detta är en korrekt tolkning kan Dianas handlande ses som en indikation på att hon är väl inskolad i den kultur i vilken studenterna befinner sig.

Beth uttrycker i [28] en osäkerhet i den formella hanteringen av induktionsbeviset. Hon har tidigare under diskussionen vid ett flertal tillfällen påpekat att induktionen bör göras på ett visst sätt, på det sätt som induktionsbevis brukar presenteras i läroböcker. Hennes kommentar gör i detta fall, precis som i ett flertal andra fall, att de andra studenterna blir osäkra. De övergår då i en inventeringsfas och försöker befästa sina intuitiva idéer med hjälp av formella definitioner och satser.

Tolkning av studenternas bevis

Studenternas bevis

Studenterna formulerar tidigt i sin diskussion en hypotes:

***Hypotes**:* *Om* $f^{(n)} \neq 0$ *så har f högst n nollställen.*

Denna hypotes ska enligt uppgiften bevisas med induktion. En stor del av studenternas diskussion berör formalia runt det induktionsbevis de föresätter sig att genomföra. När Carl uttalar frågan ”*Får man göra det?*” antyder det att Carl refererar till regler och normer som tillåter eller inte tillåter vissa sätt att resonera. Minnen av krav på formella bevis presenterade i läroböcker och undervisning aktualiseras i gruppens diskussioner. Studenternas arbete med beviset består i stora delar av att de försöker befria sig från dessa krav och normer, så som de tolkat dem. På samma gång är det dessa krav som tvingar studenterna vidare.

Studenterna utnyttjar efter ett tag idén att studera vad som gäller då derivatan f' har m nollställen. De övertygar sig om att funktionen då kan ha högst $m+1$ nollställen. Detta kan ses som ett lemma:

> ***Lemma***: *Om f' har m nollställen så har f högst m+1 nollställen.*

Studenterna använder argument från en figur samt hänvisar till satsen om mellanliggande värden men genomför inte fullt ut något bevis för lemmat.

Studenterna använder dessutom ett påstående som följer av lemmat. Vi kan se det som en följdsats även om studenterna inte själva använder den benämningen:

> ***Följdsats***: *Om $f^{(p)}$ har (högst) m nollställen så har $f^{(p-1)}$ högst m+1 nollställen.*

Studenternas slutliga bevis för hypotesen kan beskrivas som följer:

> Studenterna antar att $f^{(p)} \neq 0$ dvs. att $f^{(p)}$ inte har några nollställen alls. Av detta, och med hjälp av det vi kallat följdsats, drar de slutsatsen att $f^{(p-1)}$ har högst 1 nollställe. Samma resonemang upprepat ger att $f^{(p-2)}$ har högst 2 nollställen. Upprepning på detta sätt ger till sist att f har högst p nollställen.

Det sätt på vilket studenterna genomför beviset är mycket naturligt och uppfattas troligen av de flesta matematiker som ett induktionsbevis. Studenterna ser emellertid inte att deras bevis passar in i den mall för induktionsbevis som de mött tidigare i undervisning och läroböcker.

Ett induktionsbevis

Låt oss kort rekapitulera den huvudsakliga idén för induktionsbevis:

> Låt P_n vara ett påstående för varje naturligt tal n, dvs. för $n = 1,2,3...$. Påståendet *"P_n gäller för alla (positiva) naturliga tal"* sägs vara bevisat med induktion om påståendet P_n på något sätt härleds från de föregående, dvs. från $P_1, P_2, ..., P_{n-1}$.

I många fall, troligen i alla de fall studenterna mött tidigare, kan P_n härledas från P_{n-1} och beviset kan då genomföras på följande sätt: Verifiera först P_1 och visa sedan att P_{n-1} medför P_n. Detta ger tillsammans ett fullständigt bevis. För studenterna verkar detta ge känslan av en process som går från lägre till högre, eller ”uppåt”. Ibland är det mer naturligt att tänka sig att P_n reduceras till, förs tillbaka på, föregående påstående (eller påståenden). Detta gäller särskilt när flera av de föregående påståendena behövs för att härleda P_n, eller, som är fallet i uppgiften i denna studie, när P_n är av formen $A_n \Rightarrow B_n$.

För att möjliggöra induktionsprocessen måste det finnas någon form av relation mellan de olika påståendena P_n. I många fall är den avgörande punkten att komma underfund med hur denna relation kan utnyttjas praktiskt i härledningen av P_n från P_{n-1} (eller eventuellt från $P_1, P_2, ..., P_{n-1}$). I detta fall är nyckeln att $f^{(n)}$ är derivatan av $f^{(n-1)}$. Så snart denna nyckel har hittats gäller i de flesta, sannolikt i alla, fall studenterna mött att bevisen inte kräver några nya idéer utan endast viss teknisk färdighet för att genomföra de beräkningar som återstår. För denna uppgift krävs däremot ytterligare idéer för att beviset ska kunna genomföras, lemmat och följdsatsen är de idéer studenterna utnyttjar.

Ett bevis som passar in i mallen

Att föra tillbaka på föregående påstående är precis vad studenterna gör när de genomför sitt bevis. Det verkar som att detta att reducera till föregående ger dem känslan av att gå från högre till lägre, eller ”neråt” (”bakåt”). Detta gör dem konfunderade eftersom de får intrycket av att beviset inte passar in i det mönster för induktionsbevis som de är vana vid.

Förutom att studenterna upplever en skillnad mellan att ett påstående P_{p-1} medför P_p och att påståendet P_p reduceras till P_{p-1} finns det också ett mer fundamentalt problem. Vi låter P_n beteckna hypotesen:

P_n : *Om* $f^{(n)} \neq 0$ *så har f högst n nollställen.*

Då ska, enligt det mönster studenterna är vana vid, P_p härledas från P_{p-1}. Studenterna lyckas inte med detta och söker därför nya vägar. För att härleda P_p från P_{p-1} behövs, för $n = p-1$, påståendet:

”*Om* $f^{(n)}$ *har* 1 *nollställe så har f högst* $n+1$ *nollställen.*”

Dessutom krävs för $n = p - 2$, $n = p - 3$, osv. påståendena:

> ”*Om* $f^{(n)}$ *har* 2 *nollställen så har f högst* $n + 2$ *nollställen.*”,
> ”*Om* $f^{(n)}$ *har* 3 *nollställen så har f högst* $n + 3$ *nollställen.*”,
> osv.

För att formalisera studenternas resonemang i enlighet med det vanliga mönstret måste vi därför formulera ett mer generellt påstående, P_n', där vi låter *m* beteckna ett godtyckligt naturligt tal:

> P_n' : *Om* $f^{(n)}$ *har högst m nollställen så har f högst* $n + m$ *nollställen.*

Med detta mer generella påstående kan vi nu uttrycka resonemanget i enlighet med det vanliga mönstret:

> Att P_1' är sann följer direkt ur lemmat. Antag sedan att P_k' gäller för alla $k < p$. För att härleda P_p', antag att $f^{(p)}$ har *m* nollställen. Följdsatsen ger då att $f^{(p-1)}$ har $m+1$ nollställen. Med P_{p-1}' fås sedan att *f* har högst $(p-1)+(m+1) = p+m$ nollställen. Eftersom *m* är godtyckligt är därmed P_p' bevisad och beviset för ”P_n' *gäller för alla n*” är klart. Med $m = 0$ får vi P_n och den ursprungliga hypotesen är bevisad.

Även om gruppen inte använder de av oss införda benämningarna finns dessa idéer i gruppens resonemang. Gruppen producerar inte någon nedskriven lösning, vilket de ger intryck av att ha en vilja till, men i deras resonemang finns alla ingredienser till ett fullständigt bevis för den korrekta hypotes de ställde upp i början av arbetet. De genomför ett induktionsbevis och beviset kan passas in i det vanliga mönstret för ett sådant bevis. De ser inte hur beviset kan passas in i mönstret, vilket inte är anmärkningsvärt eftersom det i detta fall, som framgår av ovan, krävs ett mer generellt antagande som ett mellansteg. Studenterna har själva intrycket att deras argumentation inte är i överensstämmelse med det argumentationsschema för induktionsbevis som de mött i läroböcker och undervisning. Gruppen har trots detta arbetat fram ett korrekt formellt bevis om än uttryckt i ett muntligt resonemang.

Alternativt bevis

Studenterna utnyttjar i sitt bevis att $f^{(p)}$ är derivatan av $f^{(p-1)}$. Det gäller dessutom att $f^{(p)}$ är $(p-1)$:te derivatan av f'. Som en anmärkning kan nämnas att om detta samband används kan ”P_n *gäller för alla n*” bevisas utan att det mer generella påståendet P_n' behöver utnyttjas. För att härleda P_p från P_{p-1} antar vi då att $f^{(p)} \neq 0$. Då gäller att $(p-1)$:te derivatan av f' saknar nollställen. Från P_{p-1} kan vi då dra slutsatsen att f' har högst $p-1$ nollställen. Lemmat ger då att f har högst p nollställen.

Resultat

Intuitiva idéer och formaliseringskrav

Intuitiva idéer

Vid analysen av studenternas arbete med uppgiften har vi funnit att studenterna har intuitiva idéer om de begrepp som uppgiften behandlar, idéer som de också använder i den kreativa delen av problemlösningen. Deras intuitiva idéer behövs för att de ska kunna vara kreativa och hitta vägar till en lösning (Fischbein, 1987; Hanna, 1991). Studenterna säger sig t ex bli mycket övertygade om att deras hypoteser är korrekta när de tar stöd i dessa idéer. Moore (1994) visar, i en studie vi tidigare refererat till, att en orsak till att studenter inte klarar av att genomföra formella bevis är att de saknar tillgång till intuitiva uppfattningar för de inblandade begreppen. Våra studenter visar att de har tillgång till sådana uppfattningar.

Formaliseringskrav

Studenternas arbete handlar till stor del om hur de ska ta sig från sina intuitiva idéer till ett formellt bevis. Men trots att studenterna säger sig vara övertygade av de intuitiva idéerna ställer de ändå stora krav på formalisering av sina idéer. De arbetar för att kunna presentera ett bevis formaliserat på det sätt som de anser vara korrekt. De vill passa in beviset i den mall de mött i undervisningen. Hanna (1991) påpekar att det är viktigt för studenterna att inte bli alltför formella så att de endast blir symbolhanterare. Hanna tar också upp problematiken med att finna en lämplig nivå för kraven på exakthet och stringens. Hon menar att studenterna måste bli medvetna om var och när de kan tillåta sig att vara mindre strikta i definitioner och tolkningar.

> "Ironically for a discipline touted as precise, the student of mathematics has to develop a tolerance for ambiguity. Pedantry can be the enemy of insight. Sometimes an explanation is better given pictorially, loosely, by example or by analogy. Sometimes distinctions are better left blurred (e.g., the various roles of the minus sign and the use of "f(x)" as both the function and the value of the function at x). Sometimes the role of a symbol in the discussion should be allowed to vary (e.g., the parameter which is sometimes held constant, sometimes allowed to vary). At the same time, when there is a danger that genuine confusion might develop, the student must learn to become conscious of looseness and to apply the necessary amount of rigour. It is this judgmental aspect of reasoning, so essential in mathematics education, that must be communicated to students." (Hanna, 1991)

Induktionsbevis presenteras i inledande universitetskurser ofta på ett mycket formaliserat sätt. Studenterna arbetar i denna studie hårt för att skapa ett bevis men de blir inte riktigt nöjda eftersom de inte tycker att deras bevis passar in i den mall de tidigare mött. Men de presterar ett bevis och detta är ett induktionsbevis som är korrekt och som även stämmer med den mall för induktionsbevis som brukar presenteras i läroböcker och undervisning. Studenternas oförmåga att se att deras formalisering passar in i denna mall oroar dem dock i deras arbete med uppgiften. Detta fenomen har också andra studier påvisat (se t ex Wistedt, Brattström & Martinsson, 1996).

Formalisering i samband med induktionsbevis

Ett induktionsbevis innebär att senare fall återförs på tidigare. Vet man hur detta återförande går till så är beviset i princip klart. Carls yttrande ”*Och så, antingen är det färdigt eller så är det jättesvårt*” kan vi tolka som ett uttryck för att han känner att han kan ha hittat denna avgörande idé för hur återförandet ska genomföras. Carl visar med detta att han behärskar den bärande idén för induktion. Emellertid gör studenternas krav på formalisering att de inte vågar sätta sin tillit till denna bärande idé när de inte känner igen sig från tidigare genomförda induktionsbevis.

Studenterna är väl förtrogna med den mall för induktionsbevis som de mött i undervisning och läroböcker. De visar ett basfall och går vidare för att genomföra induktionssteget. Studenterna gör ett induktionsantagande men känner sig inte trygga med detta antagande: ”*Det här känns ju livsfarligt tycker jag, men det funkar ju, det är ju så…*”. Denna osäkerhet studenter känner i att induktionsantagandet kan göras, trots dess likhet med det som ska visas, har påtalats även i andra studier (Wistedt & Brattström, in press; Wistedt, Brattström & Martinsson, 1996, s. 90).

Studenterna diskuterar vid ett flertal tillfällen om de gör beviset ”åt rätt håll”. De är vana vid att i induktionssteget arbeta från n till $n+1$. De upplever inte att de försök till lösning som de presenterar innehåller en rörelse i denna riktning. Studenterna vidhåller vid lösandet av uppgiften mycket kraftigt det argumentationsschema för induktionsbevis de mött i undervisning och läroböcker. Detta stör och hämmar i flera fall problemlösningsprocessen. Precis som Hanna (1991) påpekar, vilket vi redan nämnt, finns en fara i att vara alltför formell.

Kontroll av intuitiva idéer

Det är emellertid studenternas egna krav på formalisering som vid flera tillfällen driver dem vidare trots att de uttalar att problemet är löst. Vid något tillfälle räddar det dem från att presentera ett felaktigt bevis för sin hypotes. Vid flera tillfällen gör studenternas formaliseringskrav att de tränger djupare in i uppgiften och letar efter nya vägar i bevisprocessen och därmed hittar nya idéer. Studenternas starka krav på formalisering, och det att de vid flera tillfällen inte lyckas formalisera sina idéer på det sätt de själva önskar, leder också till att de vid flera tillfällen vidgar sitt sökande och vill stämma av sina intuitiva idéer. Mycket tydligt övergår studenterna då i en inventeringsfas och försöker befästa sina intuitiva idéer med hjälp av formella definitioner och satser. Precis som Fischbein (1987) skriver (se teoriavsnitt ovan), är det viktigt att studenterna lär sig kontrollera sin intuition. Det är de formella bevisen som de måste luta sig mot eftersom intuition kan vara missledande. Studenterna söker också nya infallsvinklar för sitt intuitiva tänkande genom att gå tillbaka till formella definitioner och satser. De inventerar sitt förråd av relaterade begrepp och tolkningar, sitt ”concept image”.

Växlingar mellan det intuitiva och det formella

Strategier

Pinto och Tall (1999) talar som nämnts om två strategier som studenter utnyttjar när de tolkar och skapar mening för den formella matematiken. Författarna använder benämningarna *giving meaning* och *extracting meaning* för dessa strategier och diskuterar hur studenter visar preferens för någon av dessa. I vår studie finner vi stöd för att de båda strategierna är tillgängliga för studenterna i problemlösningssituationen. Vi kan se att gruppen inte uteslutande håller sig till en strategi. Studenterna använder de båda strategierna växelvis. Emellertid blir dessa kategorier svåra att tillämpa vid analysen av materialet som presenteras i vår studie. Pinto och Tall har studerat ett antal individer under en lång tid. I denna studie har vi bara tillgång till en grupps samtal under en jämförelsevis mycket begränsad tid. Detta betyder att vi har svårt att uttala oss om hur studenterna i denna studie som individer förhåller sig till dessa strategier. Vi kan däremot ge exempel på hur gruppen som helhet utnyttjar en växelverkan mellan det intuitiva och det formella.

Växling från formell till intuitiv

I analysavsnittets första exempel har vi sett hur Diana övergår från att tala om $f^{(n)}$ till att bara tala om ”funktionen”. En rimlig tolkning av detta är, som vi argumenterat för i analysavsnittet, att hon döper om $f^{(n)}$. Att byta benämningar på de matematiska objekten är en formell åtgärd som i detta fall ger möjlighet att utnyttja intuitiva idéer om derivatan. Diana reducerar komplexiteten i problemet genom att skära bort överflödig information. Hon skaffar sig dessutom en ny intuitiv utgångspunkt som kan vara fruktbar i det fortsatta arbetet med att finna ett bevis för den uppställda hypotesen.

I samma analysexempel förekommer också en diskussion mellan Diana och Alex. Alex har invändningar mot Dianas slutsats att ingen information om derivatan kan fås ur kunskapen att funktionen är skild från noll. Alex lämnar i diskussionen uttrycket ”funktionen är skild från noll” och övergår till att tala om att funktionen ”inte korsar” x-axeln. Att något är skilt från noll är ett formellt påstående medan ”korsar” hör till den intuitiva sfären. Nollställen har ingen tydlig intuitiv motsvarighet vilket det mer geometriska uttrycket ”korsar” har. Alex lämnar alltså den formella sfären och övergår till en mer intuitiv uppfattning. Detta öppnar upp för geometriska, eller figurativa, resonemang.

Växling från intuitiv till formell

En beskrivning av den omvända växlingen, en övergång från det intuitiva till det formella, kan hämtas från det andra analysexemplet. Carl har genom ett generiskt exempel övertygat sig om den uppställda hypotesens korrekthet. Men han vill formalisera sina idéer. Han söker då kopplingar mellan idéerna och formella definitioner och satser, detta för att säkerställa de intuitiva idéerna och befästa hypotesens korrekthet med formella argument.

Ytterligare exempel på växlingar där studenterna går från det intuitiva till det formella är då studenterna övergår i en inventeringsfas. Vid ett flertal tillfällen kör studenterna fast i försöken att formalisera sina intuitiva idéer. De försöker då, som vi redan nämnt, befästa sina idéer genom att gå tillbaka till formella definitioner och satser, eller, som Fischbein (1987) uttrycker det, att kontrollera sin intuition.

Samspelets funktioner

Vi ser alltså flera exempel på växlingar mellan det intuitiva och det formella. Men i ett intentionellt perspektiv är det inte bara intressant att belysa **hur** studenter resonerar kring en given uppgift utan också **varför** de resonerar som de gör, vilken mening deras agerande kan sägas ha. Med ett ”för att”-perspektiv kan vi inte bara ge exempel på växlingar, vi kan också beskriva växlingarnas funktion.

Ekonomisering av resonemang

När Diana övergår från att tala om $f^{(n)}$ till att bara tala om ”funktionen” ser vi ett exempel på hur studenterna ekonomiserar sina resonemang genom att byta beteckningar för begrepp. Det finns i materialet fler exempel där studenterna försöker minska den kognitiva belastningen i resonemangen. När studenterna arbetar med uppgiften kan vi se att de vid ett flertal tillfällen utelämnar specifikationer som t ex att funktionen har *högst* n nollställen. Studenternas sätt att uttrycka sig kan vid första anblicken synas slarvigt och ofullständigt. Man kan dock senare i studenternas samtal se att denna specificering återkommer när den verkligen behövs. Detaljer som för tillfället inte behövs reduceras bort men återtas senare. För att kunna hantera ett komplext problem krävs att man sorterar bort detaljer som för tillfället inte är viktiga. Detta sätt att reducera komplexitet bör alltså varken tolkas som missförstånd eller ses som uttryck för att studenterna inte kan hantera det matematiska språket.

Etablering av en ny intuitiv utgångspunkt

Vi har också gett exempel på växlingar mellan det formella och det intuitiva där dessa ger upphov till nya intuitiva utgångspunkter. Genom att byta benämningar för matematiska objekt får Diana tillgång till fler intuitiva idéer. Alex skaffar sig ett utgångsläge för ett geometriskt, eller figurativt, resonemang genom att övergå till att tala om att funktionen ”korsar” x-axeln.

Kontroll av intuitiva idéer

Vi har också sett exempel på övergång från det intuitiva till det formella. I de exempel vi diskuterat kan funktionen beskrivas som försök att säkerställa de intuitiva idéernas korrekthet. Det är i de formella definitionerna och de formella bevisen studenterna måste ta stöd. Precis som Fischbein (1987) påpekar måste studenterna lära sig hantera samspelet mellan intuitiva idéer och formellt bevisade förhållanden. Vi har i denna studie sett många exempel på hur studenterna hanterar detta samspel.

Diskussion

Slutsatser i relation till teoribakgrunden

”Concept image” som teoretiskt begrepp

Vi har i denna studie använt oss av benämningen ”concept image” (Tall & Vinner, 1981) för en individs tolkningar och förståelse av ett begrepp, dvs. för den kognitiva struktur som är associerad med begreppet. Vid analysen av studenternas samtal har vi sett spår av sådana kognitiva strukturer. Vi har sett studenterna ge uttryck för tolkningar av begreppen, aktualisera relaterade begrepp och processer samt använda exempel som de troligen mött tidigare. Trots att det är omöjligt att direkt utforska studenternas rika repertoar och associationer knutna till de aktuella begreppen har ”concept image” ändå varit användbar som en grov ram för analysen.

Tall och Vinner (1981) har definierat ”concept image” som en kognitiv struktur. Att studera hur studenterna i växelverkan mellan intuitiva idéer och formella strukturer hanterar begrepp är att komma närmare att beskriva den struktur som ”concept image” utgör. Som nämnts är ett sätt att uppfatta begreppsutveckling att tolka denna utveckling som en differentieringsprocess där individen lär sig skilja mellan olika innebörder i ord och uttryck genom att hänföra dessa till skilda sammanhang, kontexter (Halldén, 1997; Halldén et al, 2002). Detta antyder att en global uppfattning av ett begrepp kan struktureras i delområden. Vi kan tala om differentiering **mellan** kontexter, t ex mellan formella respektive mer vardagliga sammanhang för tolkning av en uppgift. Vi kan också tala om differentiering **inom** en kontext som här inom ett matematiskt begreppssammanhang. Växlingar mellan det intuitiva och det formella utgör exempel på hur studenter strukturerar sitt vetande om de begrepp som uppgiften aktualiserar och hur dessa är relaterade till varandra. Att ytterligare utforska strukturen hos individers ”concept image” är något som kan vara en kommande forskningsuppgift.

”Giving meaning” och ”extracting meaning” som beskrivningskategorier

Resultat från studien visar hur studenterna rör sig mellan intuitiva idéer och formella strukturer i en växelverkan där både det intuitiva och det formella är till hjälp, men också i flera fall belastande. Studenternas krav på formalisering av sina idéer hämmar ibland problemlösningsprocessen, men driver också processen vidare. Pinto och Tall (1999) talar om två strategier som studenterna uppvisar preferens för. Vi har emellertid funnit denna kategorisering av studenters resonemang svår att tillämpa. Studenterna i vårt exempel använder, om än i en gruppdiskussion, de båda strategierna omväxlande. Vi har också sett exempel på variation i uttryck för det Pinto och Tall kallar ”giving meaning”; användande av generiska exempel, figurativa resonemang och omformuleringar; en variation som också kan knytas till den funktion som stödet i intuitiva idéer kan ha. En sådan variation blir knappast synlig om vi nöjer oss med en grövre karakteristik i termer av resonemangstyper.

Analysmetoden

När en tolkning av ett samtal ska göras med hjälp av intentionell analys utgår vi från ett datamaterial som här består av dokumenterade samtal mellan studenter som löser en uppgift i grupp. Genom transkriberingen har vi ”stannat tiden” och samtalet blir möjligt att återvända till. Samtidigt är det viktigt att vi verkligen har en ”tjock beskrivning” dvs. ett material som inte bara beskriver individernas agerande utan ur vilket också agerandets mening kan utläsas så att vi kan tolka det som handlingar. I denna studie betyder det t ex att vi behöver tillgång till nyanser i yttranden. Här har vi utnyttjat möjligheten att kunna gå tillbaka till det bandade samtalet.

Vårt material är det videobandade samtalet och de anteckningar som studenterna gjort, men i tolkningssituationen tillför vi också viss bakgrundsinformation. Som nämnts använder vi vid tolkningen kunskap om t ex hur matematikkurser brukar se ut och hur läroböcker vanligen framställer olika begrepp. Vi har dessutom egen erfarenhet och kunskap om matematik. Utan en matematisk kunskap som är relativt omfattande blir förmodligen tolkningen svår att genomföra. När ett av syftena med att använda intentionell analys är att synliggöra tolkningsproceduren och göra tolkningen tillgänglig för läsarens kritiska granskning kan det uppfattas bekymmersamt att tolkningen också är beroende av material som ligger utanför det dokumenterade samtalet mellan studenterna. Vi har emellertid i denna studie försökt att redovisa även sådant underlag genom att t ex hänvisa till vår erfarenhet av kurser och läroböcker och hur dessa vanligtvis framställer begrepp. Även detta underlag kan på så sätt kritiskt granskas genom att läsaren prövar det mot egen erfarenhet och andra källor.

I denna studie har den intentionella analysen varit ett användbart verktyg för att ur en samtalssituation göra tolkningar av studenternas agerande. Analysmetoden har sin utgångspunkt i ett perspektiv där vi söker den potential som studenternas agerande kan inrymma. Ett exempel som belyser detta är när Diana uttalar sig om funktionen istället för att tala om p:te derivatan. Vi kan tolka detta som att hon blandar ihop begrepp, att hon inte klarar att hålla isär funktion och derivata, men vi kan också tolka hennes yttranden som uttryck för en förtrogenhet med begrepp där hon klarar att byta benämning och på det sättet underlätta arbetet med problemet, ett arbetssätt som är effektivt och vanligt bland matematiker. Med den intentionella analysen har vi givits möjlighet att nå den matematiska innebörden i studenternas yttranden, den innebörd som kan ge information om deras intuitiva idéer och tolkningar av formella strukturer som t ex bevis.

Generaliserbarhet

Denna studie är genomförd som en fallstudie. Med den typ av noggrann analys som använts, med syftet att verkligen tränga in i detaljer, blir det inte möjligt att använda en stor undersökningspopulation. Det är naturligtvis inte möjligt att från studien av en grupp av studenter generalisera och dra slutsatser gällande alla studenter. Det är emellertid inte heller syftet. Vad studien åstadkommer är att den påvisar existensen av ett samspel mellan intuitiva idéer och formella strukturer. Studien ger också exempel på hur detta samspel gestaltar sig. Dessutom påvisar studien funktioner som detta samspel kan ha.

Konsekvenser för undervisning

Studenters svårigheter att koordinera formella och intuitiva aspekter av matematiken behandlas som nämnts av Raman (2002). Enligt Raman erbjuds studenter inte så många tillfällen att skapa kopplingar mellan det formella och det intuitiva. Vi har i vår studie sett att studenterna har svårt att se likheten mellan deras egna formaliseringar och de formaliseringar de mött i läroböcker. Studenterna ser inte att deras formaliseringar stämmer överens med de givna när de uttrycks på olika sätt. För induktionsbevis ger ofta läroböcker ett argumentationsschema och de uppgifter studenterna arbetar med är ganska lika varandra, t ex uppgifter innehållande algebraiska uttryck. Ett sätt att hjälpa studenter att bearbeta och skapa tolkningar av de formella strukturerna kan vara att använda ett urval av uppgifter så att dessa visar en större variation än vad som är brukligt i läroböcker i samband med induktionsbevis.

Vi har i denna studie fokuserat studenternas kunskaper och hur dessa kommer till uttryck i en problemlösningssituation. Med en sådan fokusering på studenternas sätt att uttrycka sig och hur detta kan tolkas får vi möjlighet att se den potential som kan rymmas i deras agerande. Ett sådant perspektiv, ett kompetensperspektiv snarare än ett bristperspektiv, kan också ge en lärare goda möjligheter att möta studenter i utvecklande lärsituationer.

Referenser

Caravita, S. & Halldén, O. (1994). Re-framing the problem of conceptual change. *Learning and Instruction*, **4**, 89-112.

Cobb, P. (1994). Where Is the Mind? Constructivist and Sociocultural perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher*, Vol. 23, No. 7, pp. 13-20.

Driver, R. (1981). Pupils' alternative frameworks in science. *European Journal of Science Education*, **3**, 93-101.

Driver, R. et. al. (1994). Constructing Scientific Knowledge in the Classroom. *Educational Researcher*, Vol. 23, No. 7, pp. 5-12.

Dubinsky, E. (1991). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duit, R. (2004) *Biography -STCSE. Students' and Teachers' Conceptions and Science Education.* Leibniz Institute for Science Education at the University of Kiel. http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/stcse/stcse.html

Dysthe, O. (2001). Sociokulturella teoriperspektiv på kunskap och lärande. I Dysthe, O. (red.), *Dialog, samspel och lärande* (sid. 31-74). Lund: Studentlitteratur.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In Biehler, Scholz, Strässer and Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 231-245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Geertz, C. (1991). Tjock beskrivning. För en tolkande kulturteori. *Häften för kritiska studier, (3) 24,* 13-33.

Halldén, O. (1988). Alternative frameworks and the concept of task. Cognitive constraints in pupils' interpretations of teachers' assignments. *Scandinavian Journal of Educational Research*, **32**, 123-140.

Halldén, O. (1997). Conceptual change and the learning of history. In Voss, J. F. (Ed.), Explanation and understanding in learning history [Special Issue]. *International Journal of Educational Research*, **27**, 201-210.

Halldén, O. (1999). Conceptual change and contextualization. In Schnotz, S., Vosniadou, S. & Carretero, M. (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 53-65). Amsterdam: Pergamon Elsevier.

Halldén, O. (2001). Social konstruktionism, konstruktivism och intentionell analys som heuristiskt verktyg i kvalitativ analys. I Halldén, O., Scheja, M. & Jakobsson Öhrn, H., *Intentionell analys.* Forskningsrapporter från Pedagogiska institutionen, nr 65, Stockholms universitet.

Halldén, O., Petersson, G., Scheja, M., Haglund, L., Österlind, K. & Stenlund, A. (2002). Situating the question of conceptual change. In Limón, M. & Mason, L. (Eds.), *Reconsidering conceptual change. Issues in theory and practice* (pp. 137-148). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1991). Mathematical Proof. In Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics,* **44**, 5-23.

Jakobsson Öhrn, H. (2001). Intentionell handlingsanalys. I Halldén, O., Scheja, M. & Jakobsson Öhrn, H., *Intentionell analys.* Forskningsrapporter från Pedagogiska institutionen, nr 65, Stockholms universitet.

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics,* **27**, 249-266.

Pinto, M. & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. *Proceedings of the 23rd Conference of PME,* 3, 281-288.

Pinto, M. & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. *For the Learning of Mathematics,* **22**(1), 2–10.

Raman, M. (2002) Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages. *Journal of Mathematical Behavior*, **21**, 135-150.

Scheja, M. (2001). Determinants of action as conceptual devices for analysing learning activities in formal educational settings. In Halldén, O., Scheja, M. & Jakobsson Öhrn, H., *Intentionell analys.* Forskningsrapporter från Pedagogiska institutionen, nr 65, Stockholms universitet.

Scheja, M. (2002). *Contextualising studies in higher education.* PhD thesis, Department of Education, Stockholm University.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1-36.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken – ett sociokulturellt perspektiv.* Stockholm: Prisma.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169.

Trankell, A. (1973). *Kvarteret Flisan.* Stockholm: P. A. Norstedt & Söners förlag.

White, R. (1994). Conceptual and conceptional change. *Learning and Instruction*, **4**, 117-121.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras,* **23**, 17-24.

Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *Nordisk matematikdidaktikk,* **1**, 38-52.

Wistedt, I. & Brattström, G. (in press). Understanding mathematical induction in a co-operative setting: Merits and limitations of classroom communication among peers. In Caronaki, A. & Christiansen, I. M. (Eds.), *Challenging Ways of Viewing Classroom Communication*. Elsevier Science.

Wistedt, I., Brattström, G. & Martinsson, M. (1996). *Vägar till matematisk förståelse i universitetsutbildning som syftar till att utjämna könsskillnader.* Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet.

von Wright, G. H. (1971). *Explanation and understanding*. Ithaca, NY: Cornell University Press.

von Wright, G. H. (1979). The determinants of action. In Kohlenberger, H. (Ed.), *Reason, action and experience. Essays in honour of Raymond Klibanshy* (pp. 107-119). Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and Instruction,* **4***,* 45-70.