AKADEMISK AVHANDLING FÖR FILOSOFIE DOKTORSEXAMEN

Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel

En studie av hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar
inom matematisk analys

Kerstin Pettersson

Matematiska vetenskaper
Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet

Göteborg 2008

Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken
i dynamiskt samspel
En studie av hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar
inom matematisk analys
KERSTIN PETTERSSON

ISBN 978-91-628-7379-0

Matematiska vetenskaper
Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
412 96 Göteborg
Telefon 031-772 10 00

Tryck: Matematiska vetenskaper, Göteborg 2008

Abstract

Algorithmic, intuitive and formal aspects of mathematics in dynamic interplay: A study of students' use of their conceptions in calculus

Focusing on the potentiality of students' ways of treating a mathematical material this thesis aims to investigate how students use their conceptual understanding when working with mathematical tasks in calculus. Two case studies were carried out to explore students' understanding of threshold concepts. The first study, an interview study, explored engineering students' understanding of limit and integral. The second study, a problem solving study, involved students within a mathematics programme, working on a challenging task including the concepts function and derivative, requiring proof by induction. Drawing on a theory of contextualisation data were analysed within a constructivist research framework following the principles of intentional analysis. The results reveal that the students in the mathematics programme expressed their understanding in a formal context in which also intuitive ideas played an important role. They used intuitive ideas and formal reasoning in a dynamic interplay with several functions: to control intuitive ideas, to offer a new basis of reasoning, to reduce the complexity of the problem and to push the problem solving process forward. The engineering students expressed their conceptions in an algorithmic context, in which procedural knowledge was predominant and the operations of the concepts were seen as defining features and a basis for understanding. However, faced with probing questions, the students appeared to shift to a contextualisation foregrounding ideas relating to conceptual dimensions of calculus. These contextual shifts display the transformative aspect of threshold concepts allowing the development of conceptions and students' awareness of ways of thinking and practising in mathematics.

Keywords: Algorithmic context; Calculus; Conceptual understanding; Contextualisation; Higher education; Intentional analysis; Learning potentiality; Procedural knowledge.

Förteckning över artiklar

Denna avhandling baseras på studier presenterade i följande artiklar:

Artikel 1
Pettersson, K., & Scheja, M. (2007). Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of calculus. *Manuscript submitted for publication.*

Artikel 2
Scheja, M., & Pettersson, K. (2007). Transformation and contextualisation: Exploring students' conceptual understandings of threshold concepts in calculus. *Manuscript submitted for publication.*

Artikel 3
Pettersson, K. (under tryckning). Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang - En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift. *Nordisk Matematikdidaktik (NOMAD).*

Förord

Efter några spännande och innehållsrika år med kurser i matematik och pedagogik, artikelläsning och andra litteraturstudier, praktiskt arbete med empiriska studier, möten med internationella forskare inom matematikdidaktik, konferenser, diskussioner och många egna funderingar kan en avhandling nu gå i tryck. Jag vill med detta förord tacka alla dem som bidragit till den process som lett fram till denna avhandling.

Först och främst vill jag tacka mina handledare Mats Andersson och Inger Wistedt. Utan era kommentarer hade avhandlingen inte blivit vad den är idag. Mats matematiska kunskaper och Ingers stora erfarenhet av pedagogisk och didaktisk forskning har varit ovärderliga. Arbetet med avhandlingen har verkligen krävt båda dessa kompetenser.

Jag vill också tacka de studenter som gjort denna avhandling möjlig. Ni ställde upp med er tid och ert engagemang. Utan er hade studien inte kunnat genomföras. Jag hoppas ni själva hade utbyte av ert deltagande. Lycka till med vidare studier!

Ett stort tack riktas till Högskolan i Skövde som låtit mig forskarstudera inom ramen för min anställning. Högskolan i Skövde har dessutom finansierat resor till Göteborg och Stockholm så att jag regelbundet kunnat träffa mina handledare.

Ett stort tack riktas även till Forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning. Forskarskolan, som har finansierats genom medel från Riksbankens jubileumsfond och Vetenskapsrådets utbildningsvetenskapliga kommitté, har genom medel åren 2004, 2005 och 2007 delfinansierat min forskarutbildning. Genom forskarskolan har jag dessutom fått ta del av kurser och det nätverk som doktorander och handledare inom forskarskolan utgör. Tack till er alla för många inspirerande möten vid kurser och andra sammankomster.

Ett stort tack också till Matematiska Vetenskaper vid Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet som har stått för handledningen. Ett tack även till Pedagogiska institutionen vid Stockholms universitet för den gästfrihet som möjliggjorde några månaders intensivt slutarbete med avhandlingen. Jag vill särskilt rikta ett tack till Max Scheja för ett givande forskningssamarbete. Din positiva attityd och dina glada tillrop har varit mycket värdefulla.

Jag vill också tacka dem som läst och kommenterat det jag skrivit. Det gäller särskilt Andreas Ryve och övriga i nätverket Lärande i matematik, naturvetenskap och teknik som givit värdefulla synpunkter på utkast till kappa och artiklar. Även kollegor både i Skövde, Göteborg och Stockholm har under åren kommenterat forskningsrapporter och artikelmanus.

Till sist, tack Lars, Fredrik, Johanna och Andreas för att ni finns! Jag behöver er!

Skövde, december 2007
Kerstin Pettersson

Innehållsförteckning

1 Inledning

1.1 Studier av begreppsuppfattningar

I denna avhandling studeras hur universitets- och högskolestudenter använder sina begreppsuppfattningar när de arbetar med ett matematiskt material. Många forskare har genomfört studier för att kartlägga elevers begreppsuppfattningar (se t.ex. Duit, 2006; Harel & Dubinsky, 1992; Tall, 1991). I svensk matematikdidaktisk forskning har sådana studier oftast handlat om yngre barns eller grundskoleelevers uppfattningar (t.ex. Ahlberg, 1992; Kilborn, 1979; Löwing, 2004; Neuman, 1987; Pramling Samuelsson, 1983; Runesson, 1999; Wyndhamn, 1993). Det har till stor del också gällt i ett internationellt perspektiv (för översikter se Lester, 2007, kap. 12-15; Mulligan & Vergnaud, 2006) men omfattningen av forskning relaterade till matematikstudier inom högre utbildning har vuxit under de senaste decennierna (för en översikt, se Holton, 2001). En stor del av denna forskning har behandlat teorier om begreppsutveckling och studenters uppfattningar av begrepp som de möter på denna nivå (Artigue, Batanero, & Kent, 2007; Tall, 1991). Ett flertal av dessa begrepp, exempelvis gränsvärde, är kopplade till området matematisk analys.

I studier av studenters begreppsuppfattningar har ofta missuppfattningar och kognitiva svårigheter fokuserats (t.ex. Cornu, 1991; Przenioslo, 2004; Williams, 1991). Ett flertal studier (t.ex. Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Tall, 1992a; Williams, 1991) har visat att studenternas konceptuella kunskaper ofta är separerade från deras procedurella kunskaper. Uppfattningar och slutsatser i konflikt med varandra är vanligt förekommande under utvecklingen av studenternas begreppsuppfattningar och verkar inte störa de lärande. De motstridiga elementen hanteras genom att de inte tillåts att samtidigt uppmärksammas. I många fall finns en sådan konflikt mellan den av studenterna kända formella definitionen och den tolkning av definitionen som studenterna gör och använder i praktiken som ”definition”.

När en formaliserad gränsvärdesdefinition introducerades på 1800-talet var dess styrka främst att generalisera och formalisera begreppet (Artigue, 2001; Sjöberg, 2001, s. 179). Weierstrass epsilon-delta-definition har ingen potential för problemlösning och hade svårt att få fotfäste bland dåtidens matematiker (Artigue, 2001; Sjöberg, 2001, s. 188). För dagens studenter uppstår en liknande situation. Undervisning på inledande analyskurser separerar ofta den formella behandlingen av begrepp från arbete med problemlösning där begreppen inkluderas (Tall, 1992a). För exemplet gränsvärde visar Tall att de uppgifter studenterna arbetar med sällan involverar *begreppet* gränsvärde, det är istället *operationer* som hamnar i fokus. Uppgifterna är oftast av två typer, antingen behandlas formaliteter i själva definitionen som absolutbelopp, olikheter, tillräckliga och nödvändiga villkor eller så fokuseras helt på rutinmässiga beräkningar utgående från räkneregler för gränsvärden. Att uppgifterna är mer relaterade till räknerutiner än till tolkning av begreppet leder enligt Tall (1992a) till att studenterna ofta skapar egna implicita uppfattningar om hur de förväntas behandla begreppen. Studenter uppfattar ofta de praktiska beräkningarna som viktigare än den formella behandlingen av matematiken (Williams, 1991). De behöver inte heller den formella definitionen för att lösa de uppgifter de möter i inledande analyskurser (Raman, 2004).

Det är alltså en ganska dyster bild av studenters förmåga som målas upp i dessa studier. Undervisningen förmår inte hjälpa eleverna att skapa begreppsuppfattningar i paritet med kursmålen (Dahlgren, 1997). Men andra tolkningar presenteras också. Williams (1991) argumenterar för att en uppfattning som kan ses som en missuppfattning av gränsvärdesbegreppet kan vara ett första steg till förståelse av den formella definitionen. Andra forskare visar att svårigheter och missförstånd verkar oundvikliga och kanske till och med nödvändiga i begreppsutvecklingsprocessen (Davis & Vinner, 1986; Tall, 1992a). Sådana uppfattningar kan ses som försteg till en utvecklad uppfattning ("fore-conceptions", Sierpinska, 1992) och bör därmed uppfattas som en aspekt av utvecklingsprocessen snarare än som ett fel som bör undvikas (Berger, 2004).

Det finns dessutom ett annat problem med studier av begreppsuppfattningar som görs med syfte att kategorisera de missuppfattningar studenter har. Sådana studier förutsätter att det finns en korrekt uppfattning och att studenterna vid undersökningen tolkar situationen så att de försöker visa upp denna uppfattning. Hur studenter beskriver sina begreppsuppfattningar varierar beroende på hur studenterna tolkar situationen (Säljö, 1997).

Även i denna avhandling är syftet alltså att studera studenters begreppsuppfattningar men jag har valt ett perspektiv som syftar till att lyfta fram hur studenter använder de begreppsuppfattningar de har och hur de, trots begränsningar i sin begreppsrepertoar, förmår utnyttja dessa i ett matematiskt arbete. Jag har valt att studera universitets- och högskolestudenters begreppsuppfattningar inom området matematisk analys. Som framgått ovan och som ytterligare kommer att bekräftas i forskningsöversikten i nästa kapitel har en omfattande del av forskningen om studenters begreppsuppfattningar ägnats åt att kartlägga studenters missuppfattningar av begrepp. Jag har valt att förhålla mig till studenters matematiska verksamhet på ett annat sätt. Jag vill försöka lyfta fram den potential som finns i studenternas agerande när de möter ett matematiskt material. Avhandlingens syfte är att studera hur studenters begreppsuppfattningar kommer till uttryck i deras arbete med ett matematiskt material. Genom att studera det kognitiva sammanhang i vilket studenterna tolkar det matematiska materialet kan jag visa på en dynamik mellan olika aspekter av en begreppsuppfattning som aktualiseras under ett matematiskt arbete. Avhandlingens resultat ger empirisk evidens för att studenter, trots brister i sina begreppsuppfattningar, ändå förmår att på ett mångdimensionellt sätt utnyttja ett samspel mellan olika aspekter av matematiken på ett sätt som har stora likheter med en matematikers arbetssätt (Burton, 1999a, 1999b).

1.2 Avhandlingens disposition

Denna avhandling består av tre artiklar och en sammanbindande text, en kappa. Kappan sammanfogar de tre artiklarna till en helhet men presenterar och analyserar också det sammantagna resultatet av artiklarna. Efter kappans inledning följer en forskningsöversikt över områden i anslutning till avhandlingen: forskning om högre utbildning och forskning om studenters begreppsuppfattningar inom matematiska analys. Ett kapitel presenterar därefter de teoretiska utgångspunkter som utgör avhandlingens grund. Här förklaras och fastställs också den terminologi som används i avhandlingen. Som avslutning på teorikapitlet preciseras dessutom avhandlingens syfte och forskningsfrågor. Efter ett kapitel med metodologiska ställningstaganden presenteras de fallstudier som ingår i avhandlingen med inriktning på de metoder som använts. Resultaten av studierna presenteras främst i artiklarna men kappan innefattar också kortare sammanfattningar av artiklarna inkluderande studiernas resultat. Avhandlingens slutsatser presenteras i det därpå följande kapitlet. I kappans avslutande kapitel diskuteras avhandlingens bidrag till forskningsfältet och dess relation till tidigare forskning. Dessutom diskuteras den använda analysmetoden, frågor för vidare forskning samt avhandlingens implikationer för undervisning. Efter diskussionen ges också en sammanfattning på engelska.

De tre artiklarna är bifogade i sin helhet sist i denna avhandling. Artikel 1 (Pettersson & Scheja, 2007) och artikel 2 (Scheja & Pettersson, 2007b) har skrivits tillsammans med Max Scheja, biträdande lektor i pedagogik vid Stockholms universitet. I detta samarbete har jag ensam haft de matematiska kunskaper som krävts för datainsamling, analys och diskussion av det matematiska innehållet. En intervjustudie utgör det empiriska materialet för båda dessa artiklar. En kortare presentation av denna intervjustudie är review-granskad och har accepterats för presentation vid *12th European Conference for Research on Learning and Instruction (EARLI) 2007* (Scheja & Pettersson, 2007a). Artikel 1 är under granskning för publikation i en internationell vetenskaplig tidskrift. Artikel 2 är nyligen insänd till en internationell vetenskaplig tidskrift. Artikel 3 (Pettersson, under tryckning) redovisar en problemlösningsstudie. Artikeln utgår från samma datamaterial som har presenterats i min licentiatuppsats (Pettersson, 2004) men teorier och analys har vidareutvecklats. Artikel 3 är accepterad för publicering i tidskriften *Nordisk Matematikdidaktik (NOMAD)*.

2 Forskningsöversikt

I detta kapitel redovisas en översikt över tidigare forskning relevant för denna avhandling. Det gäller både forskning om högre utbildning allmänt och forskning om lärande i matematik inom högre utbildning. Speciellt redovisas forskning med inriktning mot studenters begreppsuppfattningar inom matematisk analys. Dessutom refereras forskning som berör hur studenter förhåller sig till de algoritmiska, intuitiva och formella aspekterna av matematiken.

2.1 Matematididaktisk forskning och forskning om högre utbildning

Kopplingen mellan forskning om lärande och undervisning i matematik och forskning om högre utbildning har inte varit så stark. Matematikdidaktisk forskning relaterad till högre utbildning har dock internationellt utvecklats under senaste decennierna och är nu relativt omfattande. Två forskningsöversikter har presenterats i bokform: *Advanced mathematical thinking* (Tall, 1991) och *The teaching and learning of mathematics at university level, an ICMI study* (Holton, 2001). Forskningen som redovisas i dessa böcker innefattar ett flertal områden till exempel studenters begreppsuppfattningar, teorier för begreppsutveckling, matematiskt tänkande, kreativitet, bevisföring, problemlösning, bedömning och användning av räknare och datorer. En dominerande del av forskningen har behandlat de kognitiva processerna vid matematiskt tänkande och begreppsutveckling på den avancerade nivån samt studenters förståelse av och svårigheter i mötet med de matematiska begreppen i den högre utbildningen (Artigue, Batanero, & Kent, 2007). I nästa avsnitt presenteras forskning som behandlar studenters begreppsuppfattningar inom området matematisk analys.

Relevant för denna avhandling är även allmändidaktisk forskning om högre utbildning. Denna forskning har starka rötter i studier från 1970-talet (Biggs & Collis, 1982; Entwistle & Ramsden, 1983; Hounsell, 1979; Marton & Säljö, 1976a, 1976b; Miller & Parlett, 1974). För att försöka förklara skillnader i lärande inom högre utbildning genomförde Marton och Säljö en undersökning där de lät studenter läsa en tidningsartikel (Marton &

Säljö, 1976a, 1976b). Studenterna fick frågor på texten och intervjuades om hur de läst texten. De skillnader i vad studenterna kom ihåg från texten förklarades av Marton och Säljö med att studenterna läst med *ytinriktning* eller *djupinriktning* (Marton & Säljö, 1997). Uppmärksamheten riktades i det första fallet mot texten i sig medan studenternas uppmärksamhet i det andra fallet riktades mot vad texten handlade om, författarens avsikt och textens huvudpoänger. Ytterligare studier av studenters sätt att hantera studiematerial visar att dessa inriktningar inte är kopplade till personlighet utan varierar med sammanhang (*ibid.*). Yt- respektive djupinriktningens karaktär varierar också mellan olika ämnen. Forskning visar att olika ämnesdiscipliner har olika normer, språk och praktiker (Wenger, 1998). En beskrivning av vad som menas med en djupinriktning måste därför vara relaterad till ett ämnesområde. Med termen W*ays of thinking and practising* (*WTP*) *i ett ämne* avses *ämnets normer, språk och praktiker* (McCune & Hounsell, 2005). Detta kan inkludera till exempel en viss typ av förståelse, ett visst sätt att agera och kunskaper om värderingar inom ämnet. McCune och Hounsell (2005) visar att en grupp biologistudenter främst förändrar sitt sätt att förstå ämnets WTP genom sitt utövande av ämnet: ”the biosciences students' ways of *thinking* about what was known and understood within the field appeared to be tightly interwoven with their *practising* of the subject” (McCune & Hounsell, 2005, s. 284, kursivering i original).

När studenter arbetar för att nå förståelse av ett ämne kan vissa begrepp vara mer avgörande. Meyer och Land (2003) har introducerat benämningen *tröskelbegrepp* (threshold concept) för *begrepp som kan fungera som en portal till ett tidigare onåbart och i början problematiskt sätt att tänka om någonting*. Tröskelbegrepp karaktäriseras dessutom av att de är transformativa, irreversibla och integrerande (Meyer & Land, 2005). Detta innebär att en förståelse av tröskelbegreppen ger ett förändrat synsätt och när detta förändrade synsätt antagits är det svårt att återta det ursprungliga. Förståelse av tröskelbegreppen kan dessutom exponera tidigare dolda samband mellan begrepp inom området.

Gränsvärde är ett av de begrepp som Meyer och Land (2005) ger som exempel på tröskelbegrepp med referenser till Cornu (1991) och Schwartzenberger och Tall (1978). Gränsvärdesbegreppet uppfattas ofta som svårt att lära men är grunden för hela differentialkalkylen och utgör därmed en portal till ett helt nytt fält. Forskning som refereras i nästa avsnitt visar att även övriga begrepp som tas upp i denna avhandling, funktion, derivata och integral, har en sådan karaktär av tröskelbegrepp. Funktionsbegreppet med dess många aspekter är inledningsvis svårt att lära men ger tillgång till ett mycket kraftfullt verktyg (Harel & Dubinsky, 1992). Definitionen av derivata inkluderar en för studenter svårgripbar gränsprocess men begreppet ger studenterna tillgång till differentialkalkylens möjligheter att studera förändring (Tall, 1992a). Att förstå en integral som ett gränsvärde av en följd av summor är svårt även för duktiga studenter men integraler, definierade på flera olika sätt, är utgångspunkt för flera matematiska delområden (Artigue, 1991; Orton, 1983b).

Tröskelbegrepp har en potential att förändra studenters förståelse av ett ämnesinnehåll (Meyer & Land, 2006). Tröskelbegreppen inom ett område är ofta kopplade till varandra och till många av områdets övriga begrepp. Genom att studera hur studenter uppfattar och använder tröskelbegrepp inom ett område som matematisk analys kan vi få kunskaper om hur studenterna förstår områdets begreppsliga innehåll.

2.2 Studenters begreppsuppfattningar inom matematisk analys

Matematisk analys är ett omfattande matematiskt delområde. I denna avhandling behandlas den del av matematisk analys som på engelska benämns ”calculus” och som främst omfattar differentialkalkyl och elementär integralkalkyl. Inom detta område är gränsvärde ett centralt begrepp: dels behandlas gränsvärdesbegreppet som sådant, dels utgör gränsvärdesbegreppet grunden för definitionerna av derivata och integral. Differentialkalkyl och elementär integralkalkyl behandlar funktioner definierade på de reella talen eller på $\mathbf{R}^n$ (eller på delmängder av dessa). De reella talens existens tas här oftast för given. Gränsvärdesbegreppet utgör grunden även för de reella talen men definitionen av reella tal som gränsvärden av talföljder diskuteras först i mer teoretiska kurser inom matematisk analys.

I dagens svenska skolsystem möter endast de gymnasister som väljer att läsa de högre kurserna i matematik begrepp som gränsvärde, derivata och integral. Dessa begrepp presenteras då på ett relativt informellt sätt. Det är först vid matematikstudier på högskola eller universitet som begreppen behandlas mer ingående. De begrepp studenterna möter inom matematisk analys uppfattas av många studenter som svåra. Forskning om studenters uppfattningar av dessa begrepp utgör en av inriktningarna för matematikdidaktisk forskning relaterad till högre utbildning (för forskningsöversikter se t.ex. Artigue, 1991, 2001; Artigue, Batanero, & Kent, 2007; Robert & Speer, 2001; Tall, 1992a, 1996). I denna avhandling är det främst begreppen funktion, gränsvärde, derivata och integral som kommer att beröras och därför presenteras här kortfattat relevant forskning om studenters uppfattningar av dessa begrepp.

2.2.1 Funktion

Funktionsbegreppet är fundamentalt i matematik. En funktion kan definieras som en regel som till varje element i en mängd A (definitionsmängden) ordnar precis ett element i en mängd B (målmängden). Om A och B är talmängder kan denna regel för vissa funktioner ges genom ett algebraiskt uttryck. Mer formellt kan en funktion definieras som en delmängd av produktmängden $A \times B$, en delmängd av ordnade par sådan att varje element i A finns med i precis ett ordnat par. Genom denna definition identifieras alltså funktionen med sin graf. För funktioner används även andra benämningar till exempel avbildning, operator och transformation. De olika benämningarna utnyttjas i olika sammanhang och beroende på vilka associationer man vill väcka. Funktionsbegreppet rymmer alltså flera olika abstraktioner och tolkningar. För ett kreativt matematiskt arbete är det viktigt att kunna utnyttja flera aspekter av begreppet och kunna växla mellan dem.

Studenters uppfattningar av vad en funktion är har undersökts i ett flertal studier (se t.ex. Harel & Dubinsky, 1992). En studie av Vinner och Dreyfus (1989) visar att studenter uppvisar en stor variation i hur de uppfattar funktionsbegreppet. Studenter anger att det är en korrespondens mellan två variabler, att det är en operation som från ett tal ger ett annat tal, att det är en formel, att det är ett algebraiskt uttryck eller att det är en graf. Ferrini-Mundy och Graham (1994) visar att studenter för att uppfatta något som en funktion ofta kräver att funktionen ska vara given genom en formel och att formeln måste inkludera en variabel.

Flera forskare har försökt att hitta en ultimat metod för att introducera funktionsbegreppet och skapa en djup förståelse som sedan kan transfereras till andra tolkningar (för en översikt se t.ex. Eisenberg, 1991). Resultaten visar att transfereringen är svår att åstadkomma. Studenter har svårt att överföra förståelse från en tolkning in i en annan om dessa inte ligger mycket nära varandra. Forskning visar också att studenter föredrar att hantera funktioner analytiskt (*ibid.*). De utnyttjar inte heller i så hög grad visualiseringar, till exempel genom grafer av reellvärda funktioner definierade på de reella talen.

Funktioner introduceras ofta som processer, som en funktionsmaskin som omvandlar ett variabelvärde till ett funktionsvärde. Men för att kunna utnyttja funktioner som vidare byggstenar krävs att funktionsprocessen objektifieras, funktionen måste också kunna uppfattas som ett objekt (Sfard, 1991). Denna övergång utgör ofta en stor svårighet för studenter. Hansson (2006) visar att även blivande matematiklärare ofta saknar tillgång till en sådan objektifierad uppfattning av funktionsbegreppet.

Forskningen visar alltså på en stor komplexitet i funktionsbegreppet som ger många svårigheter som måste överbryggas för att funktionsbegreppet fruktbart ska kunna utnyttjas som redskap och utgångspunkt för andra begrepp till exempel gränsvärdesbegreppet (Tall, 1992b).

2.2.2 Gränsvärde

Gränsvärdesbegreppet är fundamentet för matematisk analys. Det finns många studier som behandlar studenters uppfattningar av gränsvärdesbegreppet (t.ex. Artigue, 2001; Cornu, 1991; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Juter, 2006; Williams, 1991). De flesta av dessa studier behandlar gränsvärden av funktioner och några studier tar upp gränsvärden av talföljder (vilket även kan ses som gränsvärden av funktioner definierade på de naturliga talen). Gränsvärdesbegreppet utnyttjas i definitionen av både derivata och integral. Derivata definieras som ett gränsvärde av en differenskvot medan integral definieras som ett gränsvärde av en följd av summor. Gränsvärde används också i definitionen av kontinuitet. Som nämnts ovan utnyttjas dessutom gränsvärdesbegreppet i den formella definitionen av de reella talen.

Studenters uppfattningar om gränsvärdesbegreppet är ofta starkt kopplade till en språklig tolkning (Ferrini-Mundy & Graham, 1994). Den vardagliga meningen av ordet gräns skapar uppfattningar där gränsvärde ses som en barriär eller som en sista term i en process. Dessa processinriktade uppfattningar fokuserar på rörelsen mot gränsvärdet. Ett gränsvärde uppfattas även som en idealiserad form av beräkning av ett funktionsvärde genom en process där funktionsvärden beräknas i en serie av punkter som successivt närmar sig ett givet värde (Williams, 1991). Gränsvärdesbegreppet kopplas av studenterna dessutom starkt till diskontinuitetspunkter. Att beräkna gränsvärden uppfattas som relevant endast för icke-kontinuerliga funktioner (Williams, 1991). Forskningen visar dessutom att det är ett stort och svårt steg att från en uppfattning om gränsvärde som en process också se gränsvärdet som ett objekt i sig (se t.ex. Artigue, 2001; Cornu, 1991; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Juter, 2006; Przenioslo, 2004; Williams, 1991).

Trots gränsvärdets centrala roll i den matematiska analysen finns studier som visar att studenter inte uppfattar gränsvärdesbegreppet som användbart (Hähkiöniemi, 2006; Zandieh, 1999). Studenterna är medvetna om att gränsvärdet används till exempel för att definiera derivata men ser inte gränsvärdets roll i derivataberäkningarna. De övningsuppgifter studenter möter i arbetet med gränsvärden är, som nämnts i inledningen, ofta rutinmässiga beräkningar (Tall, 1992a). De procedurella färdigheterna tränas ofta i koppling till algebraiska beräkningar vilket leder till att studenter uppfattar gränsvärdesberäkningar som algebraiska manipulationer. Studenter ser också ofta det praktiska handhavandet av gränsvärden som viktigare än den formella behandlingen (Williams, 1991).

Gränsvärdesbegreppet är alltså ett begrepp där forskningen visar att studenterna möter en mängd svårigheter. Dessa svårigheter består både av kopplingar till vardagligt språkbruk och av den filosofiska frågan om oändligheten. Trots att gränsvärdesbegreppet är så centralt inom matematisk analys verkar dessutom studenter ha svårt att se behovet av begreppet.

2.2.3 Derivata

Derivatan definieras som redan nämnts som gränsvärdet av en differenskvot. Om detta gränsvärde existerar sägs funktionen vara deriverbar i den undersökta punkten. Derivatan beskriver en funktions förändringshastighet. Om en funktion beskriver till exempel en bils läge vid en viss tidpunkt så är derivatan av funktionen bilens hastighet i den givna tidpunkten.

Den vanligaste förklaringsmodellen som studenter använder för derivatabegreppet är att derivata ses som tangenten till en funktion i en given punkt. Derivatan utgör därmed en linjär approximation (Artigue, 1991). Studenter förväxlar ibland tangentens ekvation med derivatan av en funktion i den givna punkten (Amit & Vinner, 1990). Studenter blandar också ihop derivatan i en punkt med funktionens värde i tangeringspunkten (Orton, 1983a).

Studenters begreppsuppfattningar om derivata domineras ofta av procedurella kunskaper (Artigue, 1991; Orton, 1983a; Tall, 1992a). De procedurella kunskaperna utgörs främst av algebraiska metoder för att bestämma en funktions derivata. Dessa procedurella kunskaper är viktiga för det matematiska arbetet men studenter har svårt att relatera de algebraiska metoderna till en grafisk tolkning (Ferrini-Mundy & Graham, 1994). Flera studier rapporterar om undervisningsförsök där grafritande räknare eller datorprogram använts för att introducera och bearbeta derivatabegreppet genom visualiseringar (t.ex. Asiala, Cotrill, Dubinsky, & Schwingendorf, 1997; Habre & Abboud, 2006; Tall, 1996). Dessa försök visar att studenternas konceptuella kunskaper kan förbättras genom sådana metoder men att det för studenterna är arbetsamt och tidskrävande. Det kan också minska studenternas kunskaper om den formella definitionen (Habre & Abboud, 2006).

Många studier har visat att studenter har svårigheter att förstå gränsprocessen i derivatabegreppet (t.ex. Orton, 1983a; Tall, 1992a; Tall & Vinner, 1981). Studenter har dessutom svårt att se nyttan av definitionens gränsvärde. När de uppfattar derivatan som en algebraisk manipulation blir gränsvärdet överflödigt. Zandieh (1999) påpekar att studenter kan lösa många uppgifter utan att koppla in den formella definitionen:

> ”Although knowledge of these processes and the formal definition are certainly needed for a robust understanding of the concept of derivative […] the pseudostructural knowledge of derivative as the steepness of a function at a point or the speed at an instant in time […] allow students to solve many problems without the complications of the formal derivative […].” (Zandieh, 1999, p. 140)

Även Hähkiöniemi (2006) rapporterar om studenters svårighet att sammankoppla gränsvärdet i derivatans definition med en gränsprocess. Studenter har svårt att göra kopplingar mellan den formella definitionen och de representationer för gränsprocessen som används till exempel derivatan som ett gränsvärde av sekanternas lutning.

Det finns alltså flera konceptuella svårigheter kopplade till derivatabegreppet. Ett sätt för studenter att förhålla sig till dessa svårigheter verkar vara att undvika dem genom att fokusera på de procedurella delarna av begreppet.

2.2.4 Integral

Som nämnts ovan har många undersökningar studerat studenters begreppsuppfattningar vad gäller gränsvärde och derivata. Integralbegreppet är däremot inte lika väl studerat. En integral kan ses som en areaberäkning. Genom integralkalkylens huvudsats kopplas areabegreppet till primitiva funktioner. En primitiv funktion kan ses som en omvänd derivata. Integralen av en funktion som beskriver hastighet ger den tillryggalagda sträckan.

Arean under en funktions graf kan approximeras genom att summera rektangelareor. En Riemannsumma består av en summa av produkter av delintervalls längd och något funktionsvärde i delintervallet. En integral kan definieras som gränsvärdet av en följd av sådana Riemannsummor där rektangelbredderna går mot noll. Definitionen kräver förstås att gränsvärdet existerar och är entydigt. Man kan visa att detta gäller för alla elementära funktioner (och en hel del till). I den mer formella definitionen av Riemannintegralen utnyttjas rektangelsummor som säkert är större än arean (översummor) respektive mindre än arean (undersummor). De funktioner för vilken översummor och undersummor kommer godtyckligt nära varandra kallas Riemann-integrerbara funktioner. Klassen av integrerbara funktioner kan utvidgas ytterligare genom att istället utnyttja en mer allmän integraldefinition, till exempel Lebesgueintegralen.

I Sverige, som i många andra länder (Artigue, 2001), introduceras integralbegreppet i matematikkurser på gymnasienivå. Integraler kopplas via ett intuitivt areabegrepp genom integralkalkylens huvudsats till primitiva funktioner. Teorier för hur integralbegreppet kan definieras behandlas i ett senare skede och då först för Riemannintegraler. Övergången från ett intuitivt integralbegrepp till en teoretisk behandling av integraler kräver successiva rekonstruktioner av studenternas uppfattningar. Internationell forskning visar med stor samstämmighet att de undervisningsstrategier som brukar användas inte till fullo leder till denna önskade utvecklingsprocess (Artigue, 2001). Studenterna blir relativt duktiga på att lösa standardproblem men inte så mycket mer. Många studenter tenderar att bara lära sig ett arbetssätt och inte att försöka förstå. I likhet med Artigue finner Orton (1983b) att studenterna trots minimal konceptuell kunskap för integralbegreppet uppvisar stora räknetekniska färdigheter. Ortons studie visar också att studenterna tolkar integraltecknet som en signal att göra någonting, att integralen uppfattas som en procedur där indata via en process transformeras till utdata. Studenterna har en tendens att utnyttja algebraiska lösningsmetoder när så är möjligt och använder endast motvilligt geometriska tolkningar som stöd för den algebraiska processen. Thompson (1994) rapporterar resultat från ett undervisningsexperiment där universitetsstudenter undersökte relationen mellan derivata och integral med syfte att de själva skulle fastställa sambandet dem emellan, det vill säga integralkalkylens huvudsats. Resultaten i denna studie indikerar att det krävs att studenterna har skapat uppfattningar om förändringshastighet och speciellt förändringshastighet för areatillväxten ("rate of accumulation") för att de ska kunna syntetisera sina kunskaper till huvudsatsens innehåll.

Många studenter har problem att förstå sambandet mellan bestämd integral och area under en kurva (Orton, 1983b). Ofta ses integration bara som en regel, som en omvändning till derivata. Att förstå integration som ett gränsvärde av summor är svårt även för duktiga studenter (Artigue, 1991; Orton, 1983b). Studenterna förstår att en följd av Riemannsummor består av bättre och bättre approximationer och att det är möjligt att fortsätta och få än bättre approximationer men påpekar att en sådan procedur aldrig tar slut. De har inte uppfattat gränsövergången i denna process och att integralens värde utgörs av gränsvärdet av följden av approximationer.

Som för övriga här redovisade begrepp visar alltså studier av studenters uppfattningar av integralbegreppet på brister i studenternas konceptuella kunskaper om begreppet. Procedurell kunskap dominerar över konceptuell. Övergången från ett intuitivt areabegrepp till en formell hantering av integralbegreppet är dessutom problematisk för studenterna.

2.3 Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken

Avhandlingens syfte är, som nämnts, att studera hur studenter använder sina begreppsuppfattningar när de möter ett matematiskt material. Forskningsöversikten visar att ett sätt att klassificera studenters uppfattningar är att tala om procedurella och konceptuella kunskaper. Men matematiska aktiviteter kan studeras ur många perspektiv. Fischbein (1994) påpekar att man vid analyser av studenters matematiska beteende måste beakta tre basala aspekter av den matematiska aktiviteten: den formella, den algoritmiska och den intuitiva aspekten. Interaktionen mellan dessa tre aspekter är enligt Fischbein mycket komplex. För att studera denna komplexa interaktion kontrasterar Fischbein de tre aspekterna parvis mot varandra.

Flera forskare har studerat hur studenter förhåller sig till dessa tre aspekter av matematiken. Pinto och Tall (1999, 2002) klassificerar studenters lärandestrategier som tillhörande en av två kategorier: studenter skapar mening antingen genom att främst utgå från intuitiva idéer (*giving meaning*) eller utgående främst från formella definitioner och satser (*extracting meaning*). Studien visar att studenter har preferens för en av strategierna.

Moore (1994) visar att en anledning till att studenter misslyckas med att genomföra formella bevis är att de inte behärskar begreppens formella definitioner. En annan anledning är att studenterna saknar eller har för svaga intuitiva uppfattningar om begreppen. Hanna (1991) påpekar att det finns en fara i att studenter arbetar för formellt. Det finns då en risk att de bara manipulerar symboler. Fischbein (1987) behandlar det omvända problemet med för starka intuitiva uppfattningar och påpekar att studenterna måste lära sig hantera samspelet mellan formellt bevisade förhållanden och intuitiva idéer. Dessa studier indikerar alltså att studenters preferenser för att utgå från intuitiva idéer eller från formella kunskaper kan förklaras av var studenterna har sin styrka, i en intuitiv förståelse eller i formella kunskaper.

Studenters preferenser för olika strategier kan eventuellt också förklaras av vilka lärsituationer studenterna mött under sin studietid. Studier av läroböcker (Lithner, 2004; Raman, 2004) visar att studenter genom dessa böcker inte erbjuds så många tillfällen att utveckla intuitiva uppfattningar om begreppen. En mycket stor del av uppgifterna i läroböcker är av algoritmisk karaktär och kan lösas genom imitation av typexempel. Detta gäller även uppgifter som ges i prov och tentamina (Bergqvist, 2006; Boesen, 2006). Framställningsform och urval av uppgifter i läroböcker och prov ger inte studenterna incitament att koppla samman formella definitioner med mer intuitiva karakteriseringar av begrepp (Raman, 2002).

Relationen mellan intuitiv och formell kunskap diskuteras ofta i termer av att en klyfta finns dem emellan (t.ex. Bergsten, 2004; Sirotic & Zazkis, 2007). Mamona-Downs (2001) och Farmaki och Paschos (2007) diskuterar hur ett lämpligt didaktiskt angreppssätt kan överbrygga denna klyfta och stödja studenter i en övergång från intuitiva antaganden till ett formellt resonemang. Bergsten (2004) menar att ”the didactical choice is not between exploiting the gap between intuitive/informal and formal knowledge by building on the one side for the profit of the other, but to engage in a kind of ping-pong procedure of reconstruction and refinement”.

En ständig diskussion om balansen mellan algoritmräkning eller mer konceptuella kunskaper har lett till att undervisning i olika perioder har lagt olika tonvikt på basfärdigheter respektive förståelse. Ofta har pendeln slagit från ena ytterligheten till den andra. Denna diskussion har inte bara gällt grundskolans sätt att hantera de fyra räknesätten utan har också i högsta grad diskuterats inom högskolan. Thunberg & Filipsson (2005) beskriver en diskrepans mellan gymnasiets och högskolans förväntningar på räknefärdigheter. Högskoleverkets rapport *Nybörjarstudenter och matematik* (Helenius & Tengstrand, 2005) diskuterar också studenters algoritmiska kunskaper. Rapporten visar att studenter ofta har stora brister i att räkna med allmänna bråk, lösa ekvationer och hantera algebraiska uttryck.

De tre aspekterna av matematiken, den algoritmiska, den intuitiva och den formella aspekten, utgör ett grovt raster för studier av matematisk verksamhet. Det finns som framgår av ovanstående både en spänning mellan dessa tre aspekter och en viktig samverkan dem emellan. En intressant fråga blir då hur studenter i ett matematiskt arbete förhåller sig till dessa olika aspekter av matematiken.

2.4 Vägval för avhandlingen

Som framgår både av inledningen och ovanstående forskningsöversikt har många studier om studenters begreppsuppfattningar lagt tonvikt på missuppfattningar. Studierna har ofta en starkt normativ prägel i det att studenternas uppfattningar kartläggs och kategoriseras som rätt eller fel. Mitt syfte är inte att kartlägga eller kategorisera på detta sätt. Jag vill med denna avhandling istället bidra till att öka kunskapen om hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar. Med en dynamisk syn på det matematiska arbetet och ett perspektiv där jag söker den potential som kan finnas i studenternas agerande, vill jag studera hur studenter använder sina begreppsuppfattningar, även bristfälliga sådana, i sin matematiska verksamhet.

3 Teoretiska utgångspunkter

I detta avsnitt beskrivs teorier som använts som utgångspunkt för avhandlingen. Syftet är inte att innefatta alla aspekter av de presenterade teoretiska ramverken. Texten ska ses som en presentation av de delar som är väsentliga för denna avhandlings teoretiska grund. Presentationen av de teoretiska ramverken kompletteras dessutom med mina vägval. Detta innebär också att använd terminologi förklaras och fastställs.

3.1 Intuitiva idéer, formella resonemang och algoritmisk kunskap

Som har redovisats i forskningsöversikten utnyttjar Fischbein (1987) tre aspekter av matematiken, den algoritmiska, den intuitiva och den formella, som ett raster för att studera matematisk verksamhet. Jag har i denna avhandling valt att fokusera på dynamiken mellan dessa tre aspekter. Med utgångspunkt i tidigare forskning redogör jag i detta avsnitt för hur jag valt att definiera intuitiva idéer, formella resonemang och algoritmisk kunskap.

3.1.1 Intuitiva idéer

Intuition är ett begrepp som kan definieras på en mängd olika sätt. Intuition beskrivs ibland som en elementär primitiv form av kunskap, som sensorisk kunskap ekvivalent med perceptuell kunskap eller som en a priori kunskap (Fischbein, 1987). Dessutom används flera relaterade termer till exempel sunt förnuft, naturligt tänkande, naivt resonemang och empirisk tolkning. Intuition uppfattades av Descartes som en fundamental källa för en speciell typ av kunskap. Piaget beskriver intuition som en typ av kognition karaktäriserad av självklarhet och omedelbarhet. (Se Fischbein (1987) för en grundlig genomgång av olika definitioner av intuition.)

Fischbein (1987, 1994, 1999) använder i stort Piagets definition och beskriver intuition som omedelbar kunskap, det vill säga en form av kognition vilken av individen uppfattas som självklar:

> ”An intuitive cognition is a kind of cognition that is accepted directly without the feeling that any kind of justification is required. An intuitive cognition is

> then characterized, first of all, by (apparent) *self-evidence*.” (Fischbein, 1994, s. 232)

Fischbein ger dessutom ytterligare karaktäriserande egenskaper för intuitiv kunskap:

> ”intrinsic certainty, perseverance, coerciveness, theory status, extrapolativeness, globality, implicitness” (Fischbein, 1987, s. 43)

Intuition är enligt Fischbein (1987) något som skapas och utvecklas genom möten med till exempel matematiska objekt. En inre föreställning skapas där matematiska begrepp uppfattas på ett sådant sätt att det blir möjligt att omedelbart och utan medveten tillgång till alla detaljer tolka och använda begreppen. Resonemang kan göras utan att man behöver vila på de formella definitionerna. I denna avhandling ansluter jag mig till Fischbein och definierar intuition som *en slags kognition som ger möjlighet till en omedelbar uppfattning där alla delar uppfattas direkt och tillåter resonemang utan att man behöver vila på det formella*.

En intuition är inte statisk, vilket definitionen kan förleda oss att tro; den produceras och reproduceras i olika sammanhang där den aktualiseras, i vardagliga sammanhang såväl som i formella. Denna kognition skapas genom erfarenheter av objekten. De mentala representationerna av kognitionen kan ses som inre föreställningar. Ibland kan dessa inre föreställningar också ges en yttre presentation i exempelvis en skiss av en graf för en funktion som i någon mening utgör ett generiskt exempel. I dessa fall ligger den geometriska tolkningen eller den visuella representationen väldigt nära, och kanske till och med utgör, den intuitiva idén.

Utöver självklarhet karaktäriseras intuition av globalitet och extrapolerbarhet. Detta betyder att intuitiva idéer fyller ut luckor i informationsmaterialet samt eliminerar information som inte passar in i sammanhanget. Intuitiva idéer kan ibland upplevas som tvingande i den mening att de uppfattas som självklara och undertrycker andra tolkningsalternativ. Här finns därmed en potentiell problematik som kan komma till synes i en lärsituation. Intuitiva idéer utgör en integrerad del av varje intellektuellt produktiv aktivitet och blir därför kvar även när de hämmar resonemangen. Men dessa intuitiva idéer är som nämnts inte statiska. Fischbein (1987) menar att det gäller att hjälpa studenterna att analysera, kontrollera och utveckla sin intuition.

> ”The educational problem is not to eliminate intuitions – affirmatory or anticipatory. This in our view is impossible. The educational problem is to develop new, adequate, intuitive interpretations as far as possible, together with developing the formal structures of logical reasoning.” (Fischbein, 1987, s. 211)

Intuition kan klassificeras i primär respektive sekundär (Fischbein, 1987, s. 64). Med *primär intuition* menas intuition som utvecklas hos individen genom erfarenheter från vardagen i det att vi lever och lär. *Sekundär intuition* syftar på intuitiva idéer som inte har sina rötter i erfarenheter från vardagen utan är skapade genom formell skolning. Sekundär ska här tolkas som ”senare”; en sekundär intuition är inte självklart överställd en primär intuition. Distinktionen mellan primär och sekundär är inte heller absolut. Vad som uppfattas som en sekundär intuition är delvis kulturellt beroende. Fischbein (1987, s. 68-69) argumenterar för att intuition kan tränas och därmed utvecklas. En primär intuition kan utvecklas och en ny sekundär intuition skapas. Fischbein menar att det är nödvändigt att träna sin intuition till exempel för att utveckla förmågan att finna matematiska bevis.

I denna avhandling är det i huvudsak sekundär intuition som är aktuell. Begrepp inom matematisk analys är begrepp där intuition inte utvecklas genom erfarenheter från vardagen även om sådana erfarenheter (till exempel av hastighet) kan påverka utvecklingen av ett matematiskt begrepp som derivata. Erfarenheterna av det matematiska begreppet kommer istället främst från studenternas möte med begreppen under sina matematikstudier. Intuition för begreppen har utvecklats genom arbete med definitioner, satser, bevis och problemlösning där dessa begrepp används, det vill säga genom formell skolning. När en sekundär intuition utvecklas och en ny intuition uppstår är det inte nödvändigtvis så att denna utvecklade intuition är ”bättre” men önskvärt är förstås en utveckling där en ny intuition blir mer konsistent med begreppets innehåll och formella struktur. Fischbein argumenterar för att studenterna måste tro på sin intuition samtidigt som de måste göras medvetna om sina intuitiva uppfattningar och lära sig kontrollera dem. Ett samspel krävs mellan intuitiva idéer och formella strukturer:

> ”…it is important to develop in students the conviction that: (a) one possesses also correct, useful intuitions and (b) that we may become able to control our intuitions by assimilating adequate formal structures.” (Fischbein, 1987, s. 209)

3.1.2 Formella resonemang

En annan aspekt av matematiken är dess formella del. Matematiken har en axiomatisk grund. Till matematikens formella del hör också de formella definitionerna, den logiska slutledningen och satser och deras formella bevis. Med kedjor av logiska slutledningar byggs den formella delen av matematiken upp utgående från definitioner och axiom. Genom logisk slutledning kan ytterligare egenskaper hos de matematiska objekten härledas och samband mellan de matematiska objekten undersökas. Formella resonemang utgör en fundamental del av matematikens struktur för att fastlägga och förtydliga resultat.

Med formella resonemang avses i denna text *logiska slutledningar som vilar på formella definitioner och satser*. Formella resonemang utgör en grundläggande del av matematikens formella struktur och har inte bara rollen av att fastlägga resultat. De är också viktiga redskap för förtydligande, för validering och för förståelse av intuitiva tankar (de Villiers, 1990; Hanna, 1991, 2000). Ett bevis fastställer att något är sant men beviset kan också förklara hur olika begrepp och egenskaper hänger ihop och hur de är kopplade till andra begrepp och egenskaper. Korrekta logiska slutledningar blir för individen verkligt övertygande om de också leder till förståelse och intuitiva idéer (Hanna, 2000). Bevis som inte har denna förklarande kraft riskerar att uppfattas av studenter som onaturliga eftersom de saknar koppling till mentala strukturer (Simpson, 1995). Sådana bevis tenderar att läras utantill och att hanteras med ett algoritmiskt beteende.

3.1.3 Algoritmisk kunskap

Den tredje aspekten av matematiken är den algoritmiska. En algoritm är en procedur som i ändligt många steg löser ett problem. Algoritmisk kunskap är väsentligen procedurell till sin karaktär. Den består av *räkneregler och procedurer och inkluderar studenters förmåga att beskriva och använda dessa regler och procedurer* (Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1998). När man i diskussioner om grundskolans matematik diskuterar algoritmräknings för- och nackdelar avses oftast vissa specifika algoritmer för beräkningar med de fyra räknesätten, ”att ställa upp”. Men även andra metoder som ”skriftlig huvudräkning” och ”kort division” består av procedurer som i ett antal steg löser ett problem. Även dessa metoder är alltså algoritmiska. I denna avhandling avses algoritmer i denna vidare mening.

I avhandlingen visar jag att studenter i vissa sammanhang tolkar det matematiska materialet på ett algoritmiskt sätt men också att studenter använder formella och intuitiva aspekter av matematiken som tolkningsram. De tre aspekterna av matematisk kunskap, den intuitiva, den formella och den algoritmiska, är inte helt disjunkta, de överlappar varandra (Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1998). Det flesta matematiska aktiviteter kräver i själva verket alla tre aspekterna. För att studera studenters matematiska verksamhet är det dock av analytiska skäl lämpligt att initialt fokusera på dem var för sig och jag har valt att använda dessa tre aspekter som ett raster vid studiet av studenters begreppsuppfattningar.

3.2 Begrepp och begreppsuppfattningar

Vad är egentligen ett begrepp? Enligt White (1994) kan ett begrepp ses som en klassificering av objekt där varje objekt kan avgöras tillhöra klassen eller inte. Objekt kan dock ofta klassificeras på mer än ett sätt, grupperingen är kontextberoende. När en individ gör klassificeringen på ett annat sätt än det vedertagna uttrycks ofta att individen har en *missuppfattning* av begreppet. Många studier påvisar att elever ofta har begreppsuppfattningar som skiljer sig från de uppfattningar om begreppen som är vedertagna av vetenskapssamhället och som undervisas i skolan (t.ex. Driver, 1981). I de fall där elevernas uppfattningar skiljer sig från lärarens eller lärobokens beskrivningar av begreppen talar man i dessa studier ibland om *alternativa referensramar*. En hel forskningstradition har följt i Drivers spår och beforskat elevers begreppsuppfattningar. Studier av elevers uppfattningar har främst gjorts inom naturvetenskapens didaktik (för en översikt, se Duit, 2006) men denna typ av kartläggningar har också gjorts inom andra områden till exempel matematikdidaktik (t.ex. Cornu, 1991; Orton, 1983a, 1983b). Forskning inom traditionen alternativa referensramar visar, som redan nämnts, att förändring av begreppsuppfattning ofta möter stort motstånd hos individen (Vosniadou, 1994). Undervisningen inriktas mot att förmå individen att byta ut begreppsuppfattningar som klassificerats som missuppfattningar mot nya uppfattningar som bättre stämmer med de vetenskapligt vedertagna. Flera studier visar dock, som beskrivits ovan, att elever trots undervisning sällan överger sina tidigare föreställningar om begreppen (se t.ex. Caravita & Halldén, 1994; Dahlgren, 1997; Halldén, 1988, 1999). Undervisningen ger ytterligare uppfattningar om begreppen som läggs till de gamla uppfattningarna.

Med ett begrepp kan också menas all den kunskap en individ har och förknippar med benämningen (White, 1994). Tall och Vinner (1981) använder beteckningen *concept image* för den kognitiva struktur som är associerad med ett begrepp. Denna kognition består av individens tolkningar och förståelse av begreppet. Den innefattar alla de egenskaper och processer som individen associerar med begreppet samt de mentala bilder till exempel figurer och grafer som individen kopplar till begreppet. Även individens intuitiva idéer om begreppet ifråga innefattas i strukturen. Den kognitiva strukturen byggs upp successivt genom individens möte med begreppet.

Matematiska begrepp vilar alltid på en definition. Med en *formell definition* av ett begrepp avses definitionen i sitt språkliga uttryck. Detta språkliga uttryck måste emellertid tolkas av individen. För den individuella tolkningen av den formella definitionen kan termen *concept definition image* användas (Tall & Vinner, 1981). Denna tolkning av den formella definitionen utgör en del av individens hela tolkning och förståelse av begreppet, det vill säga den utgör en delmängd av individens ”concept image”. Även den formella definitionen ingår i individens ”concept image” förutsatt att individen känner till definitionen. En formell definition kan uttryckas på flera olika sätt. Definitionen kan språkligt uttryckas på olika sätt men även olika idéer kan bilda utgångspunkt för definitionen av begreppet. Ett exempel där olika idéer bildar utgångspunkt för definitioner är funktionsbegreppet. Som nämnts tidigare kan en funktion både definieras som en regel och som en mängd av ordnade par.

En intuitiv idé för ett begrepp utgår inte alltid från samma idé som den formella definitionen. Den formella definitionen kan grundas på en idé som är svår att använda intuitivt. För kreativ problemlösning är den formella definitionen då knappast fruktbar. Definitionen kan däremot krävas för att konstruera ett stringent bevis. Begreppet gränsvärde kan här utgöra ett exempel. Den intuitiva idén att gränsvärdet a för en talföljd $a_1, a_2, a_3, \ldots$ fås genom en process där vi närmar oss gränsvärdet kan inte direkt användas för ett bevis. För ett stringent bevis behövs den formella definitionens omvända ordning: starta med ett positivt tal ε, ”hur litet som helst”, och studera sedan $|a_n - a|$ (Fischbein, 1994).

Flera matematiska begrepp till exempel funktionsbegreppet och gränsvärdesbegreppet kan, som nämnts, uppfattas som processer. Men det är också viktigt att kunna hantera en funktion och ett gränsvärde som ett objekt. För kreativt matematiskt arbete krävs, som vi sett, dessutom ofta att begreppet kan hanteras både som process och objekt. Flera teorier om begreppsutveckling behandlar problematiken att övergå från en processinriktad begreppsuppfattning till en objektifierad begreppsuppfattning. Dreyfus (1991) beskriver utvecklingen som en sekvens i termer av generalisering, syntetisering och abstraktion. APOS-teorin (Dubinsky, 1991) beskriver begreppsutveckling i fyra faser: aktion, process, objekt och schema. Övergången från process till objekt benämns *encapsulation* (*ibid*., s. 101). Sfard (1991) beskriver i sin modell en sekvens bestående av *interiorization*, *condensation* och *reification*. Reifikation refererar till övergången från process till objekt. Efter reifikationen kan båda dessa tillstånd utnyttjas, de beskrivs som ”två sidor av samma mynt”. Gray and Tall (1994) introducerade termen *procept* för ett matematiskt begrepp som uppstår på detta sätt. Deras hypotes är att framgångsrika matematiker tänker ”proceptuellt” det vill säga de använder begreppen både som processer och som objekt och rör sig bekvämt däremellan.

Dessa modeller av begreppsutveckling är naturligtvis förenklingar av lärandeprocessen. Ett begrepp består ibland av flera olika processer och kan dessutom uppfattas som flera olika objekt. Modellerna har skapats för att försöka beskriva och modellera väsentliga aspekter av lärprocessen, en process som visar stora skillnader från individ till individ. I denna avhandling är syftet att studera hur studenterna nyttjar sina begreppsuppfattningar. Syftet är inte att klassificera begreppsuppfattningarna men för att analysera studenternas arbete behövs ett ramverk av teorier. I nästa avsnitt beskrivs ett kompletterande ramverk för tolkning av studenters begreppsuppfattningar, en distinktion mellan procedurell och konceptuell kunskap.

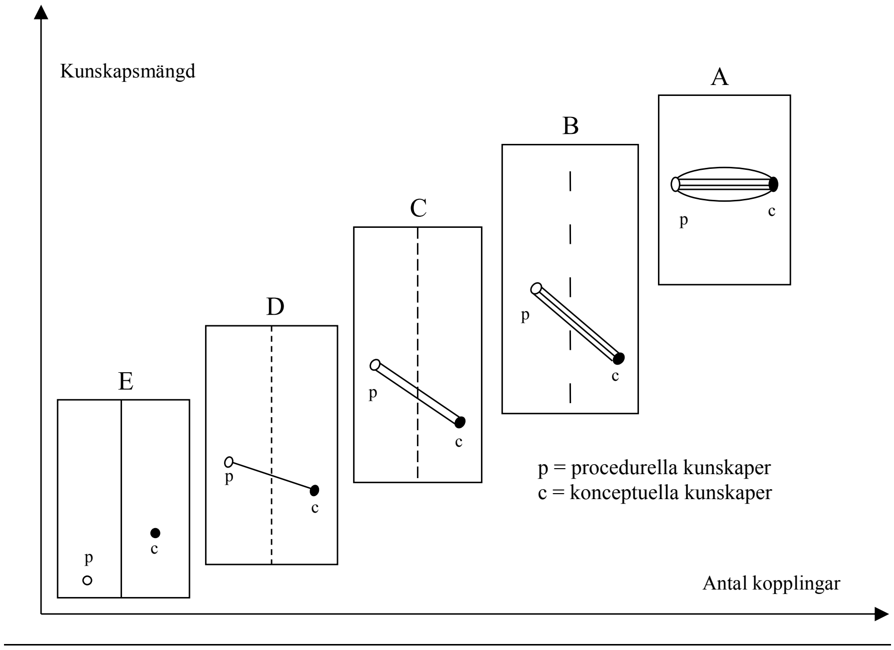
3.3 Procedurell och konceptuell kunskap

Hiebert (1986) skiljer på två typer av kunskap: konceptuell kunskap och procedurell kunskap. Den konceptuella kunskapen beskrivs av Hiebert som kunskap rik på kopplingar, den utgör en sammanhängande väv av kunskap. Procedurell kunskap definieras som kunskap om regler och procedurer för att lösa matematiska problem. Skemps (1976) terminologi för olika typer av förståelse, relationell och instrumentell, kan relateras till denna distinktion mellan konceptuell och procedurell kunskap. Med Skemps terminologi betyder instrumentell förståelse att individen endast besitter procedurell kunskap (att veta hur något ska göras) medan relationell förståelse innefattar konceptuell kunskap (att veta både vad som ska göras och varför). Dessa klassificeringar har diskuterats av Star (2005). Star menar att Hieberts definition av konceptuell kunskap inte är lämplig eftersom den utgår från hur sammanhängande kunskapen är. Hieberts definition handlar mer om kunskapens kvalitet än om kunskapstyp. Den alternativa definition för konceptuell kunskap som Star förespråkar är *kunskap om begrepp och principer*. Procedurell kunskap definieras som tidigare som *kunskap om regler och procedurer*. Med dessa definitioner blir det möjligt att också tala om ”djup” procedurell kunskap, med innebörden rik och väl sammanhängande kunskap om procedurer. Det blir också möjligt att tala om konceptuell kunskap även om denna är ytlig och osammanhängande. Jag väljer därför att ansluta mig till Stars definition av konceptuell och procedurell kunskap.

Baroody, Feil och Johnson (2007) bygger på och vidareutvecklar Stars idéer. De beskriver utveckling av kunskap och förståelse som en process med start i osammanhängande och ytlig procedurell kunskap samt i stort sett obefintlig konceptuell kunskap. Genom ökad procedurell och även konceptuell kunskap samt sammanfogande av kunskap har utvecklingsprocessen ett slutmål där både den procedurella och den konceptuella kunskapen är rik och väl sammanhängande samt även rik på kopplingar mellan dessa kunskapstyper, se figur 1. Modellen innebär att procedurell och konceptuell kunskap stöder varandra i lärprocessen.

Diskussioner om förståelse kontra färdigheter, som också var en del i “the math war” (Schoenfeld, 2004), handlar ofta om vad som ska komma först, procedurella eller konceptuella kunskaper. Modellen av Baroody, Feil och Johnson (2007) beskriver lärprocessen så att den procedurella förståelsen i varje fas är lite mer utvecklad än den konceptuella men främst att de två kunskapstyperna utvecklas i samspel med varandra. Andra forskare (t.ex. Pesek & Kirshner, 2000; Skemp, 1976) hävdar att om studenter först får procedurell kunskap påverkar detta inlärningsprocessen av konceptuell kunskap negativt.

A. Djupa procedurella och konceptuella kunskaper som är fullt integrerade.
B. Djupa procedurella och relativt djupa konceptuella kunskaper som är kopplade till varandra.
C. Relativt djup procedurell kunskap och relativt svag konceptuell kunskap med viss koppling dem emellan.
D. Viss procedurell kunskap och svag konceptuell kunskap med få och svaga kopplingar dem emellan.
E. Svaga procedurella och konceptuella kunskaper utan kopplingar dem emellan.



Figur 1. Modell för utveckling av procedurell och konceptuell kunskap (efter Baroody, Johnson & Feil, 2007, s. 124)

Procedurell kunskap om ett begrepp ska inte förväxlas med en uppfattning av begreppet som en process men det kan ändå vara intressant att relatera Baroody, Feil och Johnsons modell till de ovan beskrivna modellerna för objektifierng av processer. Sfard (1991) beskriver processer och objekt som två sidor av samma mynt. Efter reifikationen kan studenterna utnyttja begreppet både som en process och som ett objekt. Baroodys modell stämmer väl med hur Sfard beskriver utvecklingen fram till reifikationen. Studenten måste arbeta med processen för att skapa tillräcklig förståelse för att reifikationen ska komma till stånd. Baroody ser utvecklingen som att fler och fler kopplingar görs mellan procedurell och konceptuell kunskap med målet att skapa ett rikt och väl sammanhängande nät av kunskaper både begreppsliga kunskaper och kunskaper om processer relaterade till begreppet. APOS-teorin (Dubinsky, 1991) beskriver samma utveckling från process till objekt men något mer uppdelat i fasta faser. Genom benämningen ”procept” väver Gray och Tall (1994) ihop process och objekt på samma sätt som Sfard.

Jag har i mitt arbete valt att använda mig av Baroody, Feil och Johnsons (2007) modell. Förståelse definieras i linje med denna modell som innefattande både procedurell och konceptuell kunskap, det vill säga kunskap om hur något ska göras och även om vad som ska göras och varför, där graden av förståelse beror på hur rika och väl sammanhängande dessa kunskaper är.

3.4 Kontextualisering

Den konstruktivistiska forskningstraditionen fokuserar på individers mentala processer som tänkande och minne (eller snarare minnande). Piagets teorier har starkt påverkat denna forskningstradition. Enligt Piaget konstrueras kunskap aktivt av den lärande: ”…knowledge does not result from mere recording of observations without a structuring activity on the part of the subject” (Piaget, 1980, s. 23). De två fundamentala processerna vid kunskapsbildningen är *assimilation* och *ackommodation*. Assimilation är den process genom vilken nya erfarenheter infogas i redan etablerade mentala strukturer. När de nya erfarenheterna infogas i etablerade mentala strukturer krävs en mer eller mindre radikal omstrukturering av dessa strukturer, en ackommodation.

Forskning inom den konstruktivistiska traditionen har varit huvudfåran inom den del av matematikdidaktisk forskning där elevers och studenters begreppsuppfattningar studerats. Cobb, Wood och Yackel (1991) påpekar att denna forskning mest undersökt processer där individer konstruerar dessa uppfattningar och resultatet av dessa processer: ”Constructivism, at least as it has been applied to mathematics education, has focused almost exclusively on the process by which individual students actively construct their own mathematical realities” (s. 162).

Stark kritik mot konstruktivismens fokus på individen har framförts från forskare inom den sociokulturella traditionen (t.ex. Säljö, 1999). Inom den sociokulturella traditionen hävdar man lärandets starka beroende av situationen och det sociala samspelet (Säljö, 2000, 2005). Kunskap uppfattas i detta perspektiv som skapad i samspelet mellan individerna (Dysthe, 2001). Lärande sker i det sociala samspelet, som socialisation eller kulturell anpassning till den kommunikativa praktiken (Bereiter, 1994; Cobb, 1994; Wenger, 1998). Kritiken mot konstruktivismens individcentrering bottnar i studier som visar att studenters uppfattningar varierar beroende på i vilket sammanhang uppfattningarna studeras. Ett exempel som kan nämnas är en studie gjord av Säljö och Wyndhamn (1993) där de visar att elever använder en portotabell på helt olika sätt under lektioner i matematik respektive samhällskunskap.

Det har gjorts flera försök att föra samman dessa båda forskningsperspektiv, det konstruktivistiska och det sociokulturella. Driver med kollegor (Driver, Asoko, Leach, Mortimer, & Scott, 1994) beskriver lärande som en socialiseringsprocess som även inkluderar individuella processer och de ser vetenskaplig kunskap som socialt konstruerad. Cobb (1994) argumenterar i artikeln ”Where is the mind?” för att konstruktivismen och det sociokulturella perspektivet ska ses som två komplementära perspektiv där fokus riktas mot olika frågeställningar. Det ena perspektivet utgör bakgrund för det andra. Cobb tolkar lärande både som en socialiseringsprocess och som en process av individuell kunskapsbildning.

Jag har i denna studie valt ett annat sätt att, utan att lämna den konstruktivistiska grundsynen, förhålla mig till kritiken från det sociokulturella perspektivet. Med en grundsyn förankrad i den konstruktivistiska teorin vill jag i denna avhandling sätta fokus på individernas kontextualiseringar i lärandeprocessen. Genom att beskriva lärande som en kontextualiseringsprocess blir det möjligt att väga samman individernas kognitiva förmåga och deras tolkning av situationen. Inom den sociokulturella forskningstraditionen refererar begreppet kontext till den fysiska och sociokulturella situation där lärandet studeras (Säljö, 2000). När man utgår från ett konstruktivistiskt perspektiv kommer kontext att få en delvis annan betydelse. Med kontext avses då individens tolkning av situationen (Scheja, 2002). Om vi definierar termen *kontext* som *den kognitiva struktur som aktualiseras hos individen i den uppkomna situationen* kan en individs lärprocess ses som en process där det handlar om att utveckla kontexter och att lära sig välja rätt kontext för tolkning av aktuella materialet i den specifika situationen. Ett flertal studier (t.ex. Halldén, 1999; Wistedt, 1994a, 1994b) har visat att när studenter har svårigheter att förstå undervisningsmaterial så är dessa svårigheter ofta relaterade till att studenterna tolkar uppgifterna på ett sätt som inte var avsett. Med dessa studier som utgångspunkt har en teori om studenters *kontextualisering* utvecklats (Halldén, 1999). Kontextualiseringsteorin kan ses som ett svar på den kritik mot konstruktivismen som riktats från det sociokulturella perspektivet (Nilsson, 2006; Ryve, 2006). Genom att vidhålla att kunskapen finns hos individen men också hävda att individens uppfattningar delvis beror på individens tolkning av situationen kan man utan att lämna det konstruktivistiska perspektivet ta hänsyn till att de uppfattningar individerna utnyttjar skiljer sig åt mellan olika situationer.

Kontextualiseringsteorin kan också ses som en vidareutveckling av en begreppsutvecklingsteori (Ryve, 2006). Förändringar i begreppsuppfattning har inom konstruktivismen ofta beskrivits som en övergång från en uppfattning till en annan, *conceptual change* (se t.ex. Vosniadou, 1994). Begreppsutveckling sker enligt denna teori genom att individen byter ut en uppfattning mot en ny där den senare oftast uppfattas som ”bättre” än den tidigare. Det finns alltså ett normativt inslag i denna teoribildning där den vedertagna vetenskapliga uppfattningen uppfattas som ”den rätta”. Många studier visar dock att det finns ett stort motstånd hos individer mot att byta begreppsuppfattning. Halldén (1999) ifrågasätter det fruktbara i att se begreppsutveckling på detta sätt. Halldén argumenterar istället för att utvecklingen bättre kan förstås som ett kontextualiseringsproblem där studenter ibland misslyckas med att tolka ett begrepp i ett relevant sammanhang – den kontext som av läraren uppfattas som den korrekta. Lärsituationen missuppfattas och studenter ger svar kopplade till vardagserfarenheter och inte vetenskaplig teori (se även Säljö, 2000). Det kulturella sammanhanget är i undervisningssituationer ofta implicit och studenter kontextualiserar ibland uppgifter i ett annat teoretiskt ramverk än vad som avsetts. För att rätt hantera lärsituationen krävs att studenter blir inskolade i den kultur som råder i ämnet och i skolsituationen (Wistedt & Brattström, 2005).

En individs begreppsuppfattning kan också förändras genom att en ny uppfattning läggs till utan att den gamla försvinner (Halldén, 1999; Halldén et al., 2002). De olika uppfattningarna lever sida vid sida och används i olika sammanhang. Detta kan beskrivas som en process av *differentiering* som resulterar i att två eller fler olika sätt att uppfatta ett begrepp existerar och kompletterar varandra i elevers begreppsrepertoar. För individen innebär det att tolkningsrepertoaren utökas. Ett sätt att förklara lärande är att se kunskapsbildning som en differentiering mellan olika kontexter för tolkning av en situation eller en uppgift. Begreppsutveckling kan ses som en process där man lär sig särskilja olika kontexter och i varje situation välja en för tillfället passande (Halldén, 1999; Wistedt, 1998). Individen måste vara medveten om och ha förmågan att differentiera mellan olika sätt att tolka och förstå ett undervisningsinnehåll. Det handlar om att finna en lämplig kontext och sedan använda en begreppsuppfattning i enlighet med denna (Wistedt, 1993). Kontextualiseringsteorin ger ett teoretiskt ramverk för att studera studenters sätt att hantera studiematerial och lärsituationer.

I nästa kapitel beskrivs ett sätt att förhålla sig till ett empiriskt material som är relaterat till kontextualiseringsteorin. Den intentionella analysen utgör ett redskap för tolkningen av studenternas begreppsuppfattningar utgående från studenternas utsagor. Som ett raster för tolkningen av studenters kontextualiseringar har jag valt att använda de tre aspekterna av matematiken som presenterats ovan, den algoritmiska, den intuitiva och den formella aspekten. Jag har dessutom utnyttjat distinktionen mellan procedurell och konceptuell kunskap utgående från Baroody, Feil och Johnssons (2007) modell. En begreppsuppfattning innefattar både procedurella och konceptuella kunskaper samt kopplingar däremellan.

Efter att ha diskuterat och preciserat ett antal termer i detta teorikapitel kan vi nu mer precist formulera avhandlingens syfte och forskningsfrågor.

3.5 Avhandlingens syfte

Som framgått av inledningen och forskningsöversikten har en omfattande del av forskningen om hur studenter uppfattar begrepp inom matematisk analys ägnats åt att kartlägga deras missuppfattningar. Jag har valt att förhålla mig till studenters matematiska verksamhet på ett annat sätt. Jag vill lyfta fram den potential som finns i studenternas agerande när de möter ett matematiskt material.

Avhandlingens syftet är *att studera universitets- och högskolestudenters begreppsuppfattningar inom matematisk analys så som de kommer till uttryck i deras arbete med ett matematiskt material*. Med grund i den konstruktivistiska forskningstraditionen och en beskrivning av lärande i termer av kontextualisering (Halldén, 1999) preciseras syftet genom följande forskningsfrågor:

- Hur kontextualiserar studenter begrepp inom matematisk analys?
- Vilken dynamik finns mellan olika kontextualiseringar?

Som ett ramverk för tolkningen av studenternas kontextualisering av det matematiska materialet har jag valt att använda tre aspekter av matematiken: den algoritmiska, den intuitiva och den formella aspekten (Fischbein, 1994). Dessa tre aspekter samt de termer som förekommer i syftet ovan har diskuterats och preciserats i tidigare avsnitt i detta teorikapitel. Föregående avsnitt beskriver speciellt den teori om kontextualisering (Halldén, 1999) som jag använder och hur kontext uppfattas i ett konstruktivistiskt perspektiv.

4 Metodologi

Med den teoretiska bakgrund som uttrycks i föregående kapitel utgör begreppsuppfattningar mentala konstruktioner. De kan därmed inte direkt inspekteras utan måste på något sätt synliggöras. I detta kapitel presenteras de metodologiska val som jag gjort för att med denna teoretiska utgångspunkt finna svar på forskningsfrågorna. Här presenteras analysmetoden samt överväganden som gjorts för insamling, dokumentation och presentation av det empiriska materialet. Kapitlet avslutas med några ord om etiska överväganden.

4.1 Intentionell analys

Utgår man från en konstruktivistisk grundsyn är, som nämnts ovan, begreppsuppfattningar mentala konstruktioner som inte direkt är åtkomliga för observation. Med syftet att beskriva hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar behövs därför en analysmetod där studenternas idéer och resonemang kan tolkas med utgångspunkt från vad studenterna säger, skriver och gör. Hur kontextualiserar studenterna det matematiska materialet? Jag har valt att använda analysmetoden *intentionell analys* (Halldén, 2001; Halldén, Haglund, & Strömdahl, 2007; Pettersson, 2004; Scheja, 2002; Wistedt & Brattström, 2005). Denna metod bygger i huvudsak på von Wrights studier av vad som karakteriserar mänskligt handlande (von Wright, 1971) och har stora likheter med den tolkande verksamhet som vi alla använder i vårt dagliga liv när vi försöker förstå andra människors agerande. Enligt von Wright måste vi för att förstå vad en individs agerande betyder se agerandet som ett medel för individen att uppnå ett mål. Vi tillskriver då individen en intention och det är i ljuset av en sådan intention som ett agerande blir meningsfullt och kan beskrivas som en handling.

4.1.1 Skapandet av en modell

Intentionell analys ger en modell för agerande som kan utgöra ett hjälpmedel för att förstå meningen i en individs agerande i en given situation och varför individen agerade som hon gjorde. Grundtanken i den intentionella förklaringsmodellen är att ett beteende blir begripligt och meningsfullt genom att agenten förutsätts agera intentionellt (Jakobsson Öhrn, 2001). För att förstå individers agerande måste vi enligt von Wright (1971) tillskriva mening till individernas beteende, det vill säga uppfatta agerandet som intentionellt. Det finns mänskligt agerande som inte är intentionellt. Hjärtslag och peristaltiska rörelser sker icke-intentionellt men det är inte denna typ av aktiviteter som vi här är intresserade av. En ryckning i ögonlocket kan vara intentionslös men det är viktigt att kunna skilja en sådan ryckning från till exempel en flört som innefattar en intention, medveten eller omedveten, hos den agerande. Det är i ljuset av en intention som ett agerande blir meningsfullt och kan beskrivas som en handling, som i exemplet ”flört”.

Intentionell analys är en systematisering av den tolkande verksamhet som vi alla använder i vårt dagliga liv när vi försöker förstå andra människors agerande. Syftet med att tala om intentionell analys som en specifik metod är att öka medvetenheten om tolkandet och därmed öka systematiken i analysen. Dessutom blir det möjligt för läsaren att granska de tolkningar forskaren gjort eftersom argumentationen för tolkningen presenteras.

Ett sätt att förstå den intentionella analysen är att se den som skapandet av en *modell*. Vi modellerar verkligheten för att försöka förstå vad som händer på samma sätt som en tillämpad matematiker skapar modeller för bakterietillväxt, spridning av luftföroreningar eller andra problem man önskar studera. Det är innebörden av individers agerande och yttranden vi med hjälp av den intentionella analysen försöker modellera. I modellen kan vi genom att tillskriva individerna intentioner tolka deras agerande som handlingar. Intentionalitet utgör alltså ett grundantagande för modellen. Inom modellen använder vi begreppet *handling*. Detta begrepp reserveras för arbetet inom modellen och ska inte förväxlas med beskrivningar av verkligheten som görs i termer av *agerande, beteende* och *aktiviteter*.

Att tolka beteende i ett intentionellt perspektiv är alltså att försöka svara på frågan varför individen agerade på ett givet sätt. Samma agerande, till exempel en serie enskilda beteenden som ”går mot ett fönster, lyfter handen, griper i handtaget, skjuter fönstret utåt, …” kan ges flera förklaringar: individen agerar så *för att* vädra eller *för att* släppa ut en fluga. Detta *för-att*-motiv är avgörande för vilken beskrivning som passar in i modellen. Vi söker den handling som gör enskilda beteenden rimliga i sammanhanget och meningsfulla i ljuset av en avsikt, ett mål som individen försöker uppnå: vädring eller flugjakt. Vid denna tolkning används *hela* datamaterialet som grund. Det är i ljuset av sekvenser av ageranden och med beaktande av allt annat bakgrundsmaterial som tolkningen görs. Finns till exempel data som talar om att individen torkat sig i pannan och tagit av sig kavajen är naturligtvis tolkningen att fönstret öppnas för att vädra rimlig i sammanhanget.

Ett sätt att illustrera en intentionell förklaring är att konstruera en praktisk inferens (Halldén, 2001; Halldén, Haglund, & Strömdahl, 2007; Scheja, 2001), se figur 2.

Premiss 1:	P vill/önskar/avser att åstadkomma *x*.
Premiss 2:	P tror att han kan åstadkomma *x* genom att göra *y*.
Slutsats:	Därför; P gör *y*.

Figur 2. Intentionell förklaring genom en praktisk inferens (efter Halldén, 2001, s. 10)

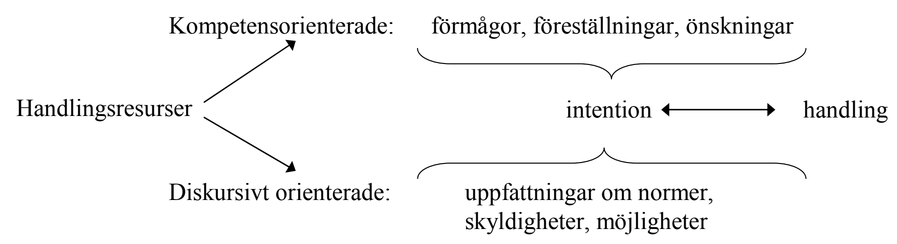
Som observatörer ser vi att P gör *y*, till exempel går mot ett fönster, tar i handtaget, och så vidare. P:s beteende blir meningsfullt om vi antar att P har ett syfte *x*, till exempel att vädra. Relationen mellan *x* och *y* skapas av den som tolkar agerandet. I denna mening tillskriver vi som tolkare en intention för agerandet. Med intention menar vi alltså inte här nödvändigtvis en medveten mental akt hos aktören. Intentionen avgör tolkaren genom att matcha premisserna i slutledningen med konklusionen. Det är denna tillskrivna mening som kan prövas och försvaras, eller förkastas, i den intentionella analysen.

Att forma en intentionell förklaring betyder inte i första hand att isolerat analysera ett enstaka agerande genom att konstruera en praktisk inferens. Det innebär framförallt att leta efter ett fält av sammanlänkade fakta, en narration om agenten. Enligt Scheja (2001) är just detta sökande den intentionella analysens väsentliga kännemärke. Den noggranna tolkningsanalysen ger en möjlighet att tränga djupt in i aktörernas beteenden. Det ger därmed en möjlighet att se potential hos aktörerna, en potential som ofta förblir osynlig vid en ytligare analys.

När vi med hjälp av intentionell analys gör en tolkning av ett samtal utgår vi från ett datamaterial som här består av skriftliga utsagor från studenterna, dokumenterade intervjuer respektive samtal mellan studenter som löser en matematikuppgift. Genom transkribering av materialet har vi ”stannat tiden” och samtalet blir möjligt att återvända till. Som utförligare kommer att beskrivas i kommande avsnitt består avhandlingens datamaterial av skriftliga utsagor, inspelat ljud från intervjuer, videobandade samtal och studenters anteckningar från en grupps arbete då de löste en given uppgift. För tolkningen tillför jag också bakgrundsinformation. Det gäller här uppgifter om hur undervisningen bedrivits, vilka läroböcker som använts och andra uppgifter om studiemiljön. Det är med hjälp av denna bakgrundsinformation som den praktiska inferensens premiss 2 konstitueras. Jag som tolkar har även en mer allmän kunskap om hur matematikkurser ser ut och hur läroböcker framställer olika begrepp. Jag har dessutom egen kunskap om ämnet matematik och erfarenheter av matematiskt arbete. Utan dessa kunskaper skulle tolkningen vara svår att genomföra. Ett exempel som visar hur intentionell analys har använts vid tolkningen av data presenteras i avsnitt 5.2.2.

4.1.2 Sammanvägning av kognitiva och diskursiva aspekter

I en intentionell analys söker vi premisserna för en individs agerande. Genom att titta på faktorer som kan tänkas påverka individen att agera på ett visst sätt kan vi göra en tolkning av en persons avsikter (Jakobsson Öhrn, 2001). von Wright (1979) gör en distinktion mellan två typer av faktorer som bestämmer en individs agerande benämnda *interna determinanter* respektive *externa determinanter*. De interna determinanterna är interna genom sin association med den förmodade mentala dispositionen hos agenten. De syftar på individens emotionella, kognitiva och fysiska tillstånd. De externa determinanterna får sin externa karaktär genom att vara associerade med egenskaper utanför agentens förmodade viljekraft. De syftar på individens föreställningar om och tolkningar av den situation i vilken handlingen utförs och av den kultur i vilken situationen är inbäddad. Vi skulle istället kunna benämna determinanterna psykologiska/mentala respektive sociokulturella/diskursiva (Halldén, 2001). Med determinanter för en handling menas i den intentionella analysen inte orsakerna till handlingen utan determinanterna konstitueras av de olika typer av premisser som kan ingå i den praktiska slutledningen, inferensen (figur 2). Determinanterna ska inte heller ses som psykologiska entiteter hos agenten utan istället som en begreppsapparat för att analysera handlande (Scheja, 2001). De är inte observerbara entiteter utan de utgörs av de föreställningar eller begreppsstrukturer som vi tillskriver individen vid konstruktionen av den praktiska inferensen. En lämpligare benämning är därför *handlingsresurser* (Halldén, Haglund, & Strömdahl, 2007). Att göra en distinktion mellan kompetensorienterade respektive diskursiva handlingsresurser öppnar för hänsynstagande till både kognitiva aspekter och sociokulturella aspekter av lärandeprocesserna (se figur 3).



Figur 3. Sammanvägning av kognitiva och diskursiva aspekter (efter Halldén, Haglund & Strömdahl, 2007, s. 29)

4.1.3 Validering av analysen

En tolkning av ett agerande innebär alltså att en intention tillskrivs en agent. Tolkningens giltighet, validitet, får mätas mot det stöd tolkningen får av det empiriska materialet samt av relevant teoribildning från tidigare forskning. I denna avhandling gäller det till exempel teorier om begreppsutveckling och tidigare studier av studenters begreppsuppfattningar inom matematisk analys. Valideringen kan ses som en argumentationsprocess. Den accepterade tolkningen blir därmed alltid öppen för fortsatt argumentation. Möjligheten att mot det empiriska materialet testa forskarens tolkningar är en av styrkorna hos metoden. Denna typ av analys valideras inte genom hänvisning till agentens egen syn på sitt agerande. Frågan om hur vi vet att individerna verkligen har de intentioner vi tillskriver dem är inte relevant eftersom vår tolkning utgör en modell. Det är i denna modell som agerandet blir till meningsfulla handlingar. Om man skulle fråga aktören är tolkningen som denne föreslår i samma grad en tillskriven intention. Aktören har möjligen större kännedom om sina egna bevekelsegrunder men kan också vara påverkad av andra omständigheter till exempel av viljan att framställa sig i en gynnsam dager. Ett beteende kan också förklaras på mer än ett sätt. I denna avhandling är det intentioner relevanta för den matematiska verksamheten som är centrala. Aktörerna skulle, om vi frågade dem, kunna välja andra syften där matematiska handlingar inte står i fokus.

4.2 Analysobjekt och analysenhet

Avhandlingens syfte är, som redan nämnts, att studera studenters begreppsuppfattningar så som de kommer till uttryck i deras arbete med ett matematiskt material. Det betyder att analysobjektet är studenternas begreppsuppfattningar. Uppfattningarna måste dessutom studeras när de aktualiseras i studenternas arbete. Studenternas utsagor, skriftliga och muntliga, utgör de enheter som analyseras i syfte att nå kunskap om studenternas begreppsuppfattningar.

I många fall tas det för givet att studenternas uttalanden speglar deras tankar. Det finns dock ingen självklar relation mellan studenters begreppsuppfattningar och vad de uttalar till exempel i en intervju. Kritik mot utelämnandet av denna problematik har riktats från det sociokulturella perspektivet. Dessa forskare hävdar att individers uttalanden är redskap som används för att skapa den diskursiva praktiken (Ivarsson, Schoultz, & Säljö, 2002). Studenters uttalanden måste därför ses i ljuset av den situation där de används. Relationen mellan vad som sägs och individens föreställningar och konceptuella uppfattningar diskuteras av Halldén, Haglund och Strömdahl (2007). De argumenterar för att forskaren måste ta hänsyn till både kognitiva och diskursiva aspekter för att genom individers uttalanden nå kunskap om deras uppfattningar. Intentionell analys ger redskap för att väga samman dessa båda aspekter.

4.3 Fallstudier

Med syftet att detaljerat studera hur studenterna nyttjar sina begreppsuppfattningar är det mycket tidskrävande att använda en stor undersökningspopulation. Jag har därför valt att genomföra mina studier som fallstudier. Den grundläggande formen för en fallstudie är ett ingående och detaljerat studium av ett enda fall (Bryman, 2002, s. 64). Den vanligaste betydelsen av ”fall” är att man studerar en viss situation, en viss miljö, en viss grupp eller person där fallet utgör ett fall av något fenomen av generellt vetenskapligt intresse.

Hur väljer man då ett fall? Först och främst måste vi minnas att ett fall alltid är ett fall av någonting. Vad är det som ska undersökas? Forskningsfrågan måste vara i fokus. Bryman (2002, s. 67-68) anger tre olika former av fall. Det kritiska fallet är ett fall valt för att testa en hypotes. Det unika fallet är ett fall som väljs för att ur ett extremfall söka ledtrådar till ett problems lösning. Det informationsrika fallet är ett fall valt för att det ger forskaren möjlighet att observera och analysera en företeelse. Det är denna sista form av fall, det informationsrika fallet som är aktuellt i denna avhandling. Forskningsfrågan handlar om att belysa hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar. Det gäller då att hitta fall som erbjuder ett rikt datamaterial så att frågeställningen kan belysas.

Hur är det då med fallstudiers validitet? Kan ett fall vara representativt så att resultatet kan tillämpas mer generellt? Svaret är naturligtvis att det inte är möjligt att från studier av ett litet antal studenter generalisera och dra slutsatser gällande alla studenter. Det är emellertid inte heller syftet med fallstudierna i denna avhandling. Genom ett ingående studium av enstaka fall har det varit möjligt att göra en teoretisk analys av dynamiken i samspelet mellan uppfattningar av olika karaktär–formella, intuitiva och algoritmiska. Den avgörande frågan är alltså inte om resultaten i statistisk mening kan generaliseras till ett vidare sammanhang utan hur belysande och generellt intressanta de teoretiska påståendena är som kan genereras ur fallstudien (Bryman, 2002, s. 68). Vad fallstudierna åstadkommer är att de visar existensen av ett samspel mellan algoritmisk kunskap, intuitiva idéer och formella resonemang. Studierna ger exempel på hur detta samspel kan gestalta sig och kan dessutom påvisa funktioner som detta samspel kan ha.

4.4 Matematisk aktivitet som medel för att synliggöra begreppsuppfattningar

För att som forskare kunna studera studenternas begreppsuppfattningar krävs inte bara att studenterna försätts i matematisk aktivitet, de måste också kommunicera denna aktivitet på sådant sätt att den blir möjlig att registrera. Studenterna måste prata, skriva, rita eller på annat sätt förmedla sina tankar. Jag har i en studie, som inte i detalj redovisas i denna avhandling, testat att låta en student lösa en utmanande uppgift och samtidigt för mig berätta hur han resonerade. Detta "tänka högt"-förfarande var ett sätt att försöka synliggöra studentens uppfattningar om de begrepp som uppgiften berörde. Ett problem med metoden var att studenten ibland blev tyst, särskilt när kritiska partier passerades. Han sa att det var svårt att tänka och prata samtidigt. Det var dessutom en situation där studenten gärna ville fråga observatören och kontrollera att han var på rätt spår.

Jag har i de studier som presenteras i denna avhandling istället valt andra metoder vilka har gett mig rikare data. Jag har valt ett utforskande arbetssätt dels genom intervju och dels genom problemlösningsaktivitet i grupp. Genom att välja två olika metoder finns möjlighet att få ett mer varierat datamaterial som därmed kan ge ett fylligare underlag för tolkning av de processer som jag vill studera. I problemlösningsstudien har jag valt att låta en grupp studenter arbeta med en utmanande uppgift. Med hjälp av problemlösningen har studenternas uppfattningar om de i uppgiften aktuella begreppen lyfts fram. Diskussionen mellan gruppmedlemmarna har gett underlag för tolkning av deras begreppsuppfattningar. Även skisser av grafer som studenterna ritade för att kommunicera sina idéer har ingått i tolkningsunderlaget. I den andra studien har jag valt en annan metod. Studenterna har ombetts att skriftligen beskriva hur de uppfattar två begrepp: gränsvärde och integral. Dessa skriftliga utsagor har, förutom att utgöra ett självständigt datamaterial, använts som underlag för uppföljande intervjuer. Genom intervjuer utgående från studenternas skriftliga redogörelser för de två begreppen har deras sätt att nyttja sina begreppsuppfattningar synliggjorts. I intervjuerna har jag som intervjuare utmanat studenternas begreppsuppfattningar och hur de nyttjar dem.

4.5 Konstruktion av utmanande uppgifter

För att synliggöra studenters begreppsuppfattningar genom att studera deras arbete med en uppgift krävs att uppgiften utmanar studenternas begreppsuppfattningar. Uppgiften måste därför vara av sådant slag att lösningen inte direkt kan erhållas genom en känd metod men ska ändå ha ett matematiskt innehåll som studenterna är bekanta med (Wistedt, Brattström, & Jacobsson, 1993, s. 15). För att kunna avgöra vad som kan vara kända metoder som leder till algoritmiska lösningar krävs kännedom om vad studenterna mött tidigare och på vilket sätt de mött innehållet. Uppgiften måste dessutom på lagom nivå utmana studenterna så att studenternas arbete med uppgiften synliggör deras begreppsuppfattningar. Det krävs alltså god kännedom om studenternas utbildningsnivå för att välja en lämplig uppgift. Uppgifter som delvis är öppna till sin karaktär har troligen en större potential att ge rika data eftersom redan studenternas diskussioner för att sätta ramar för uppgiften borde kunna ge mycket information om studenternas begreppsuppfattningar.

För att hitta utmanande uppgifter som kan ge ett rikt datamaterial kan det vara användbart med uppgifter som använts i tidigare forskningsstudier eller i beprövad praxis. För dessa uppgifter har vi då redan information om vad studenternas möte med uppgiften innebär. Jag har i denna avhandling valt uppgifter genom att utnyttja delproblem från tidigare genomförda projektarbeten inom ett utvecklingsarbete vid Göteborgs universitet. Dessa delproblem har i samband med dessa projektarbeten visat sig vara utmanande men ändå möjliga att bemästra för studenter med motsvarande utbildningsbakgrund. För att testa formuleringar och tidsramar har uppgifterna provats på kollegor, en grupp doktorander och enstaka studenter som fått kommentera uppgiften. Utgående från testarnas kommentarer och deras arbete med uppgifterna har ett urval av uppgifter gjorts och formuleringar av dessa justerats.

4.6 Val av studentgrupper

Matematisk analys studeras av i stort sett alla studenter som läser matematik på högskolenivå. Trots att en sådan kurs för en del är inledning till avancerade matematikstudier och för andra i stort sett slutmålet för matematikstudierna så är kursplaner och kursböcker ofta mycket lika oberoende av studieinriktning. Det kan då finnas anledning att tro att det finns intressanta skillnader mellan hur olika studentgrupper uppfattar det matematiska innehållet. Det kan också vara intressant att studera hur studenters fortsatta matematikstudier påverkar deras uppfattningar. Jag har i denna avhandling valt att studera studenters begreppsuppfattningar för två olika studentgrupper, dels studenter från högskoleingenjörsutbildningar och dels studenter från ett matematikprogram. De blivande högskoleingenjörerna har innan analyskursen läst en förberedande kurs så de hade när studien genomfördes läst cirka 10 poäng (15hp) matematik. Studenterna från matematikprogrammet hade läst cirka 30 poäng (45hp) matematik när studien genomfördes.

4.7 Problemlösning i grupp

Trots att jag är intresserad av enskilda studenters sätt att nyttja sina begreppsuppfattningar har jag i den ena studien valt att låta studenterna lösa uppgifter i grupp (se avsnitt 5.2 samt artikel 3). Gruppen har använts för att få de enskilda studenterna att kommunicera sina tankar. De berättar för varandra hur de tänker runt de i uppgiften förekommande begreppen. Gruppen får också funktionen att verka utmanande. Andra gruppmedlemmars uttalanden måste verifieras eller vederläggas, vilket får studenterna att i samtalet förtydliga sina uppfattningar. Genom att gruppmedlemmarna alla har ungefär samma kunskapsnivå kan gruppmedlemmarna inte lita på att någon i gruppen vet bättre; det finns ingen som kan förutsättas sitta inne med ”rätt svar”.

4.8 Intervjuer

En ofta använd metod för databildning inom kvalitativ forskning är intervju. Forskningsintervjuer definieras av Kvale (1997, s. 13) som intervjuer vars syfte är att skapa beskrivningar av de intervjuades livsvärld med avsikt att tolka de beskrivna fenomenens mening. Intervju kan alltså fungera som en metod för att synliggöra inre mentala föreställningar till exempel begreppsuppfattningar. För att intervjun ska ge beskrivningar av studenternas begreppsuppfattningar krävs att intervjuaren ställer frågor så att studentens begreppsuppfattning utmanas. I likhet med konstruktionen av uppgifter krävs även i detta fall goda kunskaper om de matematiska begreppen och kunskaper om vad andra studier visat om studenters begreppsuppfattningar kring de aktuella begreppen. Det krävs också goda kunskaper om studenternas studiesituation och ämnesmässiga nivå för att kunna ställa intervjufrågor på rätt nivå och snabbt tolka svaren så följdfrågor kan ställas. Det är avgörande att intervjuaren har en förmåga att ”förnimma den omedelbara meningen i ett svar och den horisont av möjliga innebörder som svaret öppnar” (Kvale, 1997, s. 123). Detta kräver god kunskap om ämnet för intervjun men också intresse för det mänskliga samspel som sker under intervjun. En forskningsintervju har i dessa avseenden stora likheter med muntlig examination även om syftet vid en examination är ett annat: att utvärdera studentens kunskaper snarare än att utreda och beskriva studentens begreppsrepertoar.

Med syftet att erhålla beskrivningar av hur studenter uppfattar och nyttjar matematiska begrepp har jag i en av de två studierna valt att använda mig av intervjuer (se avsnitt 5.1 samt artikel 1 och 2). Som utgångspunkt för dessa intervjuer användes texter som studenterna skrivit om de aktuella begreppen.

4.9 Val av begrepp

Matematisk analys rymmer ett flertal intressanta begrepp. Naturligtvis är derivata och integral centrala begrepp inom differential- och integralkalkylen. Gränsvärdesbegreppet är, som redovisats i forskningsöversikten, grunden till båda dessa begrepp samt till de reella talen. Gränsvärdesbegreppet är dessutom dokumenterat i forskningen som ett problematiskt begrepp (se avsnitt 2.2.2). Att välja dessa tre som utgångspunkt för att studera studenters begreppsuppfattningar inom matematisk analys kan därför vara fruktbart. De tre begreppen relaterar sig alla till funktionsbegreppet och det är svårt, eller kanske till och med omöjligt, att studera uppfattningar av gränsvärde, derivata och integral i ett matematiskt arbete utan att funktionsbegreppet i någon mån blir inblandat.

Som framgått av forskningsöversikten (avsnitt 2.1 och 2.2) är dessa fyra begrepp, funktion, gränsvärde, derivata och integral, alla *tröskelbegrepp* (Meyer & Land, 2003). Dessa begrepp kan, som nämnts tidigare, fungera som en portal till ett tidigare onåbart sätt att tänka om någonting. Tröskelbegrepp är transformativa vilket innebär att förståelse för tröskelbegrepp kan ge ett förändrat synsätt på hela det matematiska området för begreppen. Genom att välja att studera studenternas uppfattningar av tröskelbegrepp är det därför rimligt att vi också får kännedom om hur studenterna uppfattar även andra begrepp inom området. Att de fyra begreppen valts ska alltså inte ses som att jag är specifikt intresserad av studenters begreppsuppfattningar av just dessa begrepp. Begreppen har istället valts som exempel på begrepp inom matematisk analys. Skälen att välja just dessa begrepp är att de är tröskelbegrepp och dessutom centrala begrepp inom matematisk analys. Det är därmed rimligt att tro att jag, genom att studera i vilket kognitivt sammanhang studenter tolkar dessa begrepp, kan få kunskaper om hur de kontextualiserar även andra begrepp inom matematisk analys.

4.10 Dokumentation och transkribering

För att kunna tolka individers aktiviteter måste den beskrivning vi utgår från innehålla tillräckligt med information. Benämningen *tjock beskrivning* används av Geertz (1991) för en redovisning av vad som sker där också sammanhanget för agerandet kan utläsas. Geertz påpekar att vi i våra beskrivningar av mänskligt agerande bör vara aktörsorienterade och tolkningar av agerandet måste göras i termer av handlingar som rimligen kan tillskrivas individen.

Dokumentationen av studierna har gjorts genom ljud- och videoupptagningar samt genom insamling av skriftligt material. Vid intervjuerna valdes ljudupptagning för att inte mer än nödvändigt störa intervjun eller hämma den intervjuade. Dokumentation av gruppernas arbete gjordes genom videoinspelning, detta främst för att säkra möjligheterna att avgöra vem som säger vad. För att inte påverka gruppen genomförde gruppen sitt arbete utan närvarande observatör. Det betyder att videodokumentationen också blir viktig för att förstå vad som händer till exempel då en gruppmedlem tillfälligt lämnar rummet. Figurer och lösningsskisser som studenterna producerade vid intervjuer och grupparbete har samlats in och utgör en del av datamaterialet. För att kunna avgöra vem som skrivit vad använde studenterna olikfärgade pennor vid grupparbetet. Videoinspelningen ger också information om när de olika anteckningarna gjordes. Man kan på filmen se när någon skriver och var på pappret de skriver och även om det inte direkt i filmen kan avläsas vad som skrivs kan texten senare lätt lokaliseras.

Intervjuerna och gruppens samtal har transkriberats i sin helhet. Pauser och tvekan i studenternas tal har markerats med punkter (…). Punkter har också använts då yttranden är inflätade i varandra samt när yttranden saknar tydlig start eller lämnas oavslutade. När betoning av ord eller uttryck avviker från normal prosodi har det betonade ordet markerats med fet stil.

4.11 Analysmetod

För att analysera datamaterialet har intentionell analys använts (se avsnitt 4.1). Som ett första steg i analysen har en berättelse om gruppens arbete konstruerats. Berättelsen har varit det första steget i att hitta de kritiska delarna av samtalet, de delar där studenternas uppfattningar blir synliggjorda (Wistedt, Brattström, & Jacobsson, 1993, s. 17-19). Utgående från berättelsen har också narrationer av kortare utdrag utformats (Wistedt, 1994b). Berättelsen och narrationerna har använts för att detaljerat gå igenom materialet och göra tolkningar av vad som händer samt att finna just de kritiska avsnitt som kan underkastas en ingående analys med hjälp av den praktiska inferensen. Narrationerna ger dessutom en möjlighet att kommunicera datamaterialet på ett tillgängligt sätt.

4.12 Presentation av data

De delar av studenternas samtal och utdrag från intervjuerna som finns återgivna i kappan och artiklarna har redigerats något för att öka läsbarheten. Matematiska uttryck har återgivits med matematiska symboler när det bedömts förenkla läsandet utan att påverka tolkningen av studenternas uttalanden. Felsägningar som direkt rättats av studenten själv har strukits och en del talspråkliga uttryck presenteras i sin skriftspråkliga form. För en diskussion av detta sätt att presentera ett datamaterial för läsaren, se till exempel Trankell (1973).

För att ta del av datamaterial från studierna hänvisas främst till artiklarna som finns bilagda sist i denna avhandling. I kappan presenteras huvudsakligen de resultat analysen av det samlade datamaterialet har gett.

4.13 Etiska överväganden

Vid genomförandet av de empiriska studierna har studenterna informerats om studiens syfte och om att deltagandet i studien är frivilligt och på intet sätt påverkar deras deltagande och examination i de kurser de följer. Ingen av studierna har genomförts med studenter där jag varit inblandad i undervisning eller examination. Insamlingen av skriftligt material i intervjustudien skedde i slutet av schemalagd undervisningstid men studenterna informerades om att deltagandet var frivilligt. Tidpunkter för intervjuer och gruppdiskussioner bestämdes i samråd med deltagande studenter och genomfördes utanför ordinarie undervisning. För att förhindra identifiering av de medverkande anges det inte i presentationen av studierna vid vilka lärosäten de är genomförda. Studenterna presenteras dessutom under fingerade namn.

5 Fallstudierna

Denna avhandling grundas, som framgått av ovanstående, huvudsakligen på två studier: en intervjustudie där skriftliga utsagor utgör underlag och en studie där en grupp av studenter arbetat med en problemlösningsuppgift. Ytterligare studier har genomförts för att testa metoder och för att testa idéer om hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar. Uppgiften för gruppstudien har provats ut genom att prövas på två enstaka studenter och en grupp av doktorander. Två grupper av studenter har arbetat med en alternativ formulering av uppgiften. Ytterligare en uppgift har dessutom testats genom en gruppstudie och en studie av en enskild student. De studier som utgör avhandlingens huvudsakliga grund är de studier som har erbjudit data av sådant slag att materialet har kunnat användas för att besvara forskningsfrågorna. De övriga studierna har delvis presenterats i föregående avsnitt i samband med att de metodologiska frågorna diskuterades men kommer också att beröras i anknytning till presentationen av de två huvudstudierna.

5.1 Intervjustudien

En studie har genomförts med studenter som läser matematik inom högskoleingenjörsutbildningar. Tjugo studenter som läste en kurs i matematisk analys fick i samband med ett undervisningstillfälle möjlighet att delta i studien. Dessa studenter var när studien genomfördes i mitten av sitt första eller andra studieår och hade förutom den nästan avslutade analyskursen, endast tentamen återstod, läst en introducerande matematikkurs.

Studenterna fick skriftligen beskriva hur de uppfattar begreppen gränsvärde och integral genom uppmaningarna ”Förklara så klart och tydligt som möjligt innebörden i det matematiska begreppet gränsvärde” respektive ”Förklara så klart och tydligt som möjligt innebörden i det matematiska begreppet integral”. För vardera uppmaningen gavs dessutom kommentaren ”använd gärna figurer men beskriv i ord vad de föreställer” och resten av sidan var sedan lämnad tom för studenterna att ge sina förklaringar. Studenterna uppmanades dessutom att skatta sin egen förståelse av dessa begrepp: ”Om du skulle bedöma din egen förståelse av nedanstående matematiska begrepp, hur bra tycker du själv att du förstår innebörden i dessa begrepp?”

Skattningen gjordes genom att studenterna för varje begrepp fick välja bland uttrycken ”Inte alls bra”, ”Mindre bra”, ”Varken bra eller dålig”, ”Ganska bra” respektive ”Mycket bra”. Studenterna fick också fylla i ett så kallat PANAS-test (Watson, Clark, & Tellegen, 1988). För vart och ett av 20 ord som beskriver känslor och emotioner (nervös, ivrig, missbelåten, stolt, …) ombads studenterna att markera hur de kände sig just för tillfället genom att välja ”Mycket lite eller inte alls”, ”Lite”, ”Måttligt”, ”En hel del” eller ”Väldigt mycket”. PANAS-testet har inte använts i den analys av det skriftliga datamaterialet som genomförts här. Testet utgör underlag för en annan bearbetning av materialet som inte utnyttjas i denna avhandling. Avslutningsvis fick studenterna också ange om de var villiga att delta i en uppföljande intervju.

Tabell 1. Kriterier för bedömning av enkätsvar

Gränsvärde:

0. Innehåller inget med relevans för det matematiska begreppet
1. Bygger endast på enstaka exempel
2. Utrycker gränsvärde som en process
3. Uttrycker gränsvärde som ett objekt
4. Anger gränsvärde både som process och objekt
5. Inkluderar formell behandling, t.ex. definitionen i någon form

Integral:

0. Innehåller inget med relevans för det matematiska begreppet
1. Bygger endast på enstaka exempel
2. Anger en av aspekterna omvänd derivata respektive area
3. Anger båda aspekterna omvänd derivata respektive area
   eller anger både area och areaberäkning genom indelning i staplar.
4. Anger båda aspekterna area och omvänd derivata
   samt antyder definitionen (Riemannsumma/gränsvärde)
5. Inkluderar formell behandling, t.ex. integralens definition.

För tolkning av studenternas skriftliga utsagor om de matematiska begreppen har en kriterielista utarbetats (se tabell 1). Dessa kriterier har skapats med utgångspunkt i tidigare forskning om studenters uppfattningar om dessa begrepp (t.ex. Artigue, 1991; Cornu, 1991; Orton, 1983b), samt en modell för hur matematisk kunskap utvecklas (Baroody, Feil, & Johnson, 2007). Kriterierna har konstruerats med fokus på kvalitativa skillnader i studenternas begreppsliga förståelse (jfr. Marton & Booth, 1997). De två begreppen gränsvärde och integral kan båda uppfattas som processer men även som objekt. Med stöd i begreppsutvecklingsteorier av Sfard (1991) och Dubinsky (1991) har kriterielistan utformats för att visa på en utveckling från process via objekt till en ”proceptuell” uppfattning (Grey & Tall, 1994) där begreppet uppfattas både som process och objekt (se avsnitt 3.2). Kriterielistan är så utformad att formella kunskaper om begreppen uppfattas som en djupare kunskap. Även om det inte i all matematikutbildning är ett uttalat mål att studenterna ska tillägna sig en korrekt formell hantering av begreppen så fungerar den formella hanteringen ändå som ett strävansmål.

Begreppet integral inkluderar två olika tolkningar, integral som area (bestämd integral) och integral som omvändning till derivata (obestämd integral, primitiv funktion). Kriterielistan har utformats så att studenternas förståelse uppfattas som större om de redovisar båda dessa aspekter med hänvisning till att studenterna har ombetts att så tydligt som möjligt ange innebörden i begreppet. Studenterna kan naturligtvis ha gett sina svar genom att ange endast en av dessa aspekter även om de har kunskap om båda.

Det skriftliga materialet har analyserats med kriterielistan som grund genom noggrann och upprepad läsning. Detta innebär att utsagorna noggrant har tolkats genom att, med hela materialet som grund, argumentera för vad studenterna avser med sina utsagor, det vill säga vilken förståelse studenterna visar enligt kriterierna.

Fem studenter förklarade sig villiga att delta i en uppföljande intervju och tider bokades in med dessa fem studenter ett par dagar senare. En av studenterna blev sjuk så fyra sådana intervjuer genomfördes. Varje intervju varade 30-40 minuter och genomfördes i ett grupprum på det lärosäte där studenterna studerade. Intervjuerna genomfördes med två intervjuare, Max Scheja och jag, och täckte in frågor både om de matematiska begreppen och om studenternas uppfattning av sin studiesituation. Scheja ansvarade för frågor om studenternas uppfattning av sin studiesituation medan min roll var att utforska studenternas begreppsuppfattningar av de matematiska begreppen, främst gränsvärde och integral.

Intervjufrågorna ställdes med utgångspunkt från studentens skriftliga utsagor och penetrerade studentens uppfattningar. Utgående från den kriterielista som tagits fram för analys av de skriftliga uttalandena (se tabell 1) ställdes intervjufrågor för att synliggöra studentens begreppsuppfattningar. Frågor ställdes också för att utforska graden av befintliga kopplingar och samband mellan olika begrepp inom området matematisk analys.

Intervjuerna ljudbandades och de figurer som några av studenterna ritade under intervjun samlades in. Intervjuerna transkriberades sedan i sin helhet. Intervjuerna har analyserats med hjälp av intentionell analys (se avsnitt 4.1).

5.2 Problemlösningsstudien

5.2.1 Uppgiften

Tre grupper av studenter deltog i en problemlösningsstudie. Grupperna fick en utmanande uppgift att arbeta med (se figur 4).

Låt f vara en funktion definierad på hela $\mathbf{R}$.

a) Hur många nollställen kan funktionen högst ha om för alla x gäller att $f'(x) \neq 0$ *?*
b) Om istället $f''(x) \neq 0$ *vad gäller då för antalet nollställen till funktionen?*
c) Om vi har $f^{(n)}(x) \neq 0$ *vad kan då sägas om antalet nollställen till funktionen? Använd induktion för att bevisa ert påstående.*

Figur 4. Uppgiften, version 1.

Uppgiften som använts berör centrala begrepp inom området matematisk analys som funktion och derivata. Uppgiften har inspirerats av en projektarbetsuppgift inom programmet Naturvetenskaplig problemlösning vid Göteborgs universitet men utgör bara en begränsad del av projektuppgiften. Av erfarenheter från detta projektarbete var det klart att det var en utmanande uppgift men ändå möjlig att lösa för matematikstudenter under första studieåret. Uppgiften användes i två versioner, med eller utan uppmaningen att använda induktion för att bevisa påståendet. Grupperna fick inga tidsramar för sitt arbete utan instruerades att arbeta så länge de själva önskade. Studenterna fick var för sig tillgång till uppgiften dagen innan problemlösningstillfället med instruktion att inte diskutera uppgiften med varandra innan grupptillfället. Detta val gjordes för att gruppens arbetstid inte skulle bli alltför lång. Grupperna arbetade ändå i 2-3 timmar.

I uppgiften finns inte mer angivet om funktionen än att den är definierad för alla reella tal. Att derivatan är skild från noll för alla x kan tolkas som att funktionen är deriverbar för alla x men det är ingen helt självklar tolkning. Uppfattas funktionen som deriverbar för alla x så är den också kontinuerlig. En anledning till att inte helt specificera uppgiften är att det då blir en del av problemlösningen att diskutera vilka förutsättningar som ska gälla. Redan dessa diskussioner kan ge mycket information om studenternas begreppsuppfattningar. De två första deluppgifterna är givna för att leda studenterna in i problemet. Det är den tredje deluppgiften som är den verkliga utmaningen. Det är troligt att studenterna inte kommer att ha så svårt att komma fram till att funktionen har högst n nollställen om $f^{(n)}(x) \neq 0$. Detta påstående ska bevisas och även om uppgiften i version 2 inte uppmanar till att använda induktion så är induktion det naturliga valet. Det visade sig också att den grupp som löste uppgiften utan denna uppmaning ändå direkt gjorde tolkningen att det handlade om induktion. Idén för induktionsbevis kan beskrivas som följer:

> Låt P_n vara ett påstående för varje naturligt tal n, det vill säga för $n = 1,2,3\ldots$. Påståendet *"P_n gäller för alla naturliga tal"* sägs vara bevisat med induktion om påståendet P_n på något sätt härleds från de föregående, det vill säga från $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$.

I många fall, troligen i alla de fall studenter på inledande matematikkurser mött tidigare, kan P_n härledas från P_{n-1} och beviset kan då genomföras på följande sätt: Verifiera först P_1 och visa sedan att P_{n-1} medför P_n. Detta ger tillsammans ett fullständigt bevis. Det är på detta sätt induktionsbevis brukar introduceras i inledande matematikkurser (se t.ex. Vretblad, 1995, s. 74). För att möjliggöra induktionsprocessen måste det finnas någon form av relation mellan de olika påståendena P_n. I detta fall är nyckeln att $f^{(n)}$ är derivatan av $f^{(n-1)}$ (alternativt att $f^{(n)}$ är (n-1):te derivatan av f', se noter i artikel 3). Så snart detta samband har hittats gäller i de flesta fall som studenter på inledande matematikkurser mött att bevisen inte kräver några nya idéer. För denna uppgift krävs dock ytterligare idéer för att beviset ska kunna genomföras.

5.2.2 Studenternas arbete

Uppgiften i version 1 har använts av en grupp. Studenterna i denna grupp följde alla ett matematikprogram vid ett svenskt universitet och hade vid studiens genomförande läst cirka 30 poäng (45 hp) matematik. Gruppen bildades av studenter som anmälde sig när de i samband med undervisningen på en kurs i flervariabelanalys fick frågan om de kunde medverka i studien. Gruppen bestod av fyra studenter, två kvinnor och två män. Tre av dem var när studien genomfördes i slutet av sitt första studieår och hade under året studerat tillsammans. En av gruppmedlemmarna gick i en högre årskurs men läste vid tillfället samma kurs i flervariabelanalys som de andra tre. Gruppens arbete videofilmades utan närvarande observatör. De anteckningar som gjordes av studenterna under problemlösningen samlades in. Arbetet i denna grupp har analyserats i detalj. Gruppen valdes ut för närstudium eftersom materialet erbjöd rika data för att belysa forskningsfrågorna. Samtalet har transkriberats i sin helhet och sedan analyserats med hjälp av intentionell analys. Ett exempel på hur analysen genomförts ges nedan. För mer bakgrundsinformation om datautdraget, se artikel 3.

Diana: *Om den är skild från noll, vad innebär det då för derivatan? Och om* ***funktionen*** *är skild från noll, vad innebär det då? ... om derivatan?*

I yttrandet försöker Diana relatera begreppen funktion och derivata. Hon frågar vad det innebär att funktionen är skild från noll. Ett problem vid analysen av yttrandena är de obestämda referenserna. ”*Om den är skild från noll*”, vad syftar *den* på? I formuleringen av uppgiften studenterna arbetar med anges $f^{(n)}(x) \neq 0$ så det är rimligt att anta att det är n:te derivatan som åsyftas. Detta stöds också av att Diana i ett tidigare yttrande talar om $f^{(n)}(x)$. När hon sedan frågar vad detta innebär för derivatan är det rimligt att anta att det är derivatan av $f^{(n)}(x)$ som avses. Detta stöds av ett tidigare yttrande där Diana påpekar att derivatan av $f^{(n)}(x)$ är $f^{(n+1)}(x)$. Om så är fallet varför övergår Diana då till att fundera över vad avsaknad av nollställen hos funktionen har för effekt? Kanske är det så att hon tror att det hjälper att undersöka ett specialfall. Även n:te derivatan är ju en funktion. Tolkningen skulle i så fall kunna ges med följande inferens:

Premiss 1: Diana vill undersöka hur $f^{(n)}(x) \neq 0$ påverkar $f^{(n+1)}(x)$.
Premiss 2: Diana tror att hon genom att undersöka specialfallet $g(x) \neq 0$ kan få reda på något användbart.
Slutsats: Diana undersöker hur derivatan påverkas av att funktionen saknar nollställen.

Det kan också ses som rimligt att Diana döper om $f^{(n)}(x)$ och istället benämner detta *funktionen*. För tolkning av ”*...om derivatan?*” blir det viktigt med intonationen. Transkriberingen är här inte tillräckligt tydlig, men en återgång till videofilmen gör att tolkningen blir att Diana menar ”*för derivatan*”. Det är inte fundering över ett nytt fall utan en fortsättning på frågeställningen om funktionens påverkan på derivatan. Med tolkningen att Diana har döpt om $f^{(n)}(x)$ till funktionen blir då ”*derivatan*” liktydig med $f^{(n+1)}(x)$. Tolkningen skulle då kunna ges av följande:

Premiss 1: Diana vill undersöka hur $f^{(n)}(x) \neq 0$ påverkar $f^{(n+1)}(x)$.
Premiss 2: Diana kallar $f^{(n)}(x)$ för *funktionen*.
Slutsats: Diana undersöker hur förhållandet att funktionen saknar nollställen påverkar derivatan.

Tekniken att döpa om objekt för att reducera komplexiteten i ett problem är effektiv. En genomgång av hela datamaterialet visar att Diana har goda begreppsuppfattningar och är väl inskolad i matematikens arbetsmetoder. En rimlig tolkning är därför att hon utnyttjar tekniken att döpa om objekten.

En grupp som bestod av två manliga studenter har arbetat med uppgiften i version 2 utan uppmaningen att använda induktion för att bevisa påståendet. Även dessa studenter följde samma matematikprogram och läste vid undersökningstillfället kursen i flervariabelanalys. De var vid studiens genomförande i slutet av sitt första studieår och hade under detta år läst matematik men också en kurs inom datavetenskap. Gruppens arbete videofilmades utan närvarande observatör och anteckningar och figurer som studenterna ritade under problemlösningen samlades in. Materialet från denna grupp har inte analyserats i detalj eftersom det inte bedömdes vara lika rikt i relation till forskningsfrågorna som materialet från den första gruppen. Vissa övergripande resultat kan dock presenteras även från denna grupp. De tolkade inte uppgiften så att f är deriverbar för alla x. Gruppen uttalade direkt, vilket redan nämnts, att uppgiften handlade om att genomföra ett induktionsbevis. Att uppgiften i version 2 inte hade uppmaning att använda induktion spelade för denna grupp alltså ingen roll. Gruppens slutsats blev att antalet nollställen för funktionen inte kan bestämmas.

Uppgiften i version 2 har också använts med en grupp studenter från matematiklärarutbildning. Vid studiens genomförande hade de inte startat sina studier i matematik. Deras förkunskaper var gymnasiets Matematik kurs D. Gruppen bestod av fyra studenter, två kvinnor och två män. Även denna grupps arbete videofilmades utan närvarande observatör. Inte heller materialet från denna grupp har detaljstuderats då materialet inte bedömdes användbart för att svara på forskningsfrågorna. Uppgiften var troligen för svår för dessa studenter. De fastnade i en diskussion om eventuella samband mellan nollställen för funktioner respektive nollställen för derivatan.

En helt annan uppgift har också testats genom en gruppstudie och en studie av en enskild student. Dessa är universitetsstudenter i slutet av sitt första år på ett matematikprogram. Studenterna har läst cirka 30 poäng (45 hp) matematik. Uppgiften berör begreppen funktioner, kontinuitet, integraler och gränsvärden:

> Låt f vara en funktion kontinuerlig på intervallet $[0,2\pi]$. Vad kan sägas om $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$? Ge bevis för de uttalanden som görs.

Uppgiften är inspirerad av en uppgift från Stewart (2003, s. 580) men har omformulerats till en formulering utan ledtrådar och med svagare villkor på f. Studenterna som deltagit i studien har i de analyskurser de läst haft annan litteratur, en bok av Persson och Böiers (2001). Gruppens arbete med uppgiften har videofilmats och transkriberats i sin helhet men materialet har inte detaljanalyserats eftersom det inte bedömts tillföra ny information till forskningsfrågorna. Den enskilde studentens arbete har också videofilmats. Inte heller detta material har detaljstuderats. Formen för studien innebar att datamaterialet inte blev tillräckligt informationsrikt för att tolkning av studentens begreppsuppfattningar skulle vara möjlig. Vad en översiktlig genomgång av materialet ger är dock att det bekräftar flera av de svårigheter med de aktuella begreppen som visats i tidigare forskning, till exempel gränsövergångsproblematiken. Det förekommer inga diskussioner i termer av ε och δ. Gruppen diskuterar inte så mycket i geometriska termer. Det förefaller som om gruppen inte helt skiljer på fall då integralen inte existerar och då gränsvärdet inte existerar. Möjligen råder en viss osäkerhet om i vilken ordning integrationen och gränsövergången ska göras. Den ensamme studenten resonerar mer i geometriska termer. Han är dessutom mycket bekymrad över att då n går mot oändligheten får $\sin nx$ en oändligt liten period och kan enligt honom därför inte integreras. Detta bekymmer är så starkt att studenten inte känner sig övertygad av det geometriska resonemanget och inte heller övertygad om att gränsvärdet existerar.

De ovan beskrivna problemlösningssituationerna visar på vikten av att den givna uppgiften ger studenterna en rimlig utmaning. Blir utmaningen alltför stor ger situationen inte ett datamaterial som kan ge information om studenternas begreppsuppfattningar.

5.3 Studiernas relation till artiklarna

De två ovan presenterade huvudstudierna utgör underlag för de tre artiklarna i denna avhandling. I artikel 1 presenteras intervjustudien och dess resultat. Artikel 2 utgår också från intervjustudien med syftet att diskutera resultaten från artikel 1 i relation till aspekter av tröskelbegrepp. I artikel 3 presenteras problemlösningsstudien och dess resultat. Sammanfattningar av de tre artiklarna presenteras i nästa kapitel.

6 Sammanfattning av artiklarna

I detta kapitel presenteras en sammanfattning av de tre artiklarna. I föregående kapitel har de metoder som använts i studierna beskrivits. I sammanfattningarna av artiklarna ges därför en mycket kort summering av studiernas tillvägagångssätt och mer utrymme lämnas åt en beskrivning av de resultat som presenteras i artiklarna. Artiklarna finns i sin helhet som bilagor sist i avhandlingen.

6.1 Artikel 1

Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of calculus

Denna artikel har syftet att studera karaktären av studenters begreppsuppfattningar av två centrala begrepp inom matematisk analys, gränsvärde och integral, och att diskutera vad denna form av förståelse innebär i termer av möjligheter för studenterna att utveckla en djupare förståelse av området. Med förståelse innefattas både procedurell och konceptuell kunskap samt hur väl sammanhängande denna kunskap är (se teorikapitlet avsnitt 3.3). De två begreppen gränsvärde och integral ska ses som exempel på centrala begrepp inom matematisk analys. Dessa två begrepp har dessutom en potential att öppna upp för en djupare förståelse av området men uppfattas ofta av studenter som svåra att lära; de är så kallade tröskelbegrepp (Meyer & Land, 2005, se även avsnitt 2.1). Artikeln ger en kortare översikt av forskning relaterad till studenters uppfattningar om gränsvärde och integral. Tidigare forskning har, som redan redovisats i kappans forskningsöversikt, ofta lyft fram studenters missuppfattningar.

Som mer utförligt beskrivits i föregående avsnitt fick 20 studenter inom högskoleingenjörsutbildning uppgiften att i skrift så tydligt som möjligt förklara dessa begrepps innebörd. Studenterna ombads också att skatta sin egen förståelse för begreppen. De skriftliga redogörelserna har bedömts utgående från en kriterielista (se avsnitt 5.1 och tabell 1). Kriterierna har skapats med grund i tidigare forskning om dessa begrepp (t.ex. Artigue, 1991; Cornu, 1991; Orton, 1983b) samt i en modell för hur matematisk kunskap utvecklas (se avsnitt 3.3 och Baroody, Feil, & Johnson, 2007). Med fyra av studenterna genomfördes uppföljande intervjuer med de skriftliga redogörelserna som grund. Dessa intervjuer har analyserats med hjälp av intentionell analys (se metodologikapitlet avsnitt 4.1).

Undervisningen på den kurs i matematisk analys som studenterna följde bestod av föreläsningar och övningar. Föreläsningarna var baserade på kurslitteraturens framställning av kursinnehållet. Som kursbok användes *Calculus, early transcendentals* av Stewart (2003). I denna bok ges en definition för gränsvärdet av en funktion $f(x)$ då x går mot a där gränsvärdet definieras som det tal vilket funktionsvärdena kan komma hur nära som helst bara x väljs tillräckligt nära a. En mer formell definition i termer av ε och δ ges i ett särskilt avsnitt som inte tas upp i den kurs som studenterna följde. Integral definieras i kursboken som ett gränsvärde av summor av produkterna av delintervallens längd och ett funktionsvärde i en godtycklig punkt i delintervallet, det vill säga som gränsvärdet av Riemannsummor då delintervallens längd går mot noll (se avsnitt 2.2.4). Att detta gränsvärde existerar och är entydigt anges i en kommentar. Kopplingen mellan integral och area görs genom integralkalkylens huvudsats. Primitiva funktioner tas upp i ett avsnitt innan kapitlet om integraler. I senare delen av integralkapitlet definieras obestämd integral och denna benämning och integraltecknet används för primitiva funktioner.

Resultatet av analysen av studenternas skriftliga utsagor visar att ingen av studenterna inkluderar formell behandling av begreppen, se tabell 2.

Tabell 2. Studenternas förståelse bedömd utgående från skriftliga utsagor, antal studenter för varje bedömning (N=20)

Bedömning	0	1	2	3	4	5
Gränsvärde[1]	2	5	8	3	1	-
Integral[2]	-	10	7	2	-	-

Studenternas bedömning av sin egen förståelse visar att de flesta studenterna ansåg att de hade en ganska bra förståelse för begreppen, se tabell 3. Det är naturligtvis så att de kriterier som studenterna använder för att bedöma sin egen förståelse kan ha helt andra bevekelsegrunder än vad som är fallet i den kriterielista som är grund för utfallet i tabell 2 men det är ändå en viktig iakttagelse att studenterna har denna positiva självbild.

Fyra studenter intervjuades, två kvinnor och två män. För att belysa resultatet av analysen av dessa intervjuer presenteras i artikeln data från skriftliga utsagor och intervjuer av två av dessa studenter, Philip och Victor. Philip skattar sin förståelse av begreppen gränsvärde och integral som ”Ganska

[1] En av studenterna besvarade inte frågan.
[2] En av studenterna besvarade inte frågan.

bra” respektive ”Mycket bra”. Victor skattar sin förståelse som ”Varken bra eller dålig” respektive ”Ganska bra”.

Tabell 3. Studenternas egen skattning av sin förståelse, antal studenter för varje skattning (N=20)

Skattning	Inte alls bra	Mindre bra	Varken bra eller dålig	Ganska bra	Mycket bra
Gränsvärde	2	3	6	7	2
Integral	1	3	5	9	2

Studenternas egen skattning av sin förståelse till trots ger intervjuerna ett intryck av att studenterna har en mycket fragmenterad begreppsuppfattning. Den framträder som en löst sammanfogad struktur av beskrivningar av de givna begreppen med få om ens några kopplingar mellan de olika begreppen. Studenterna har också en mycket tydlig procedurell inriktning av sin förståelse. De gör uttalanden som ”*jag försöker förstå hur man löser saker och ting*” och ”*jag går inte runt och grubblar över varför det är si eller så*”.

Formella definitioner saknas i de beskrivningar studenterna ger av begreppen. Victor säger ”... *det här med definitioner brukar jag inte lära mig utantill, tyvärr…*”. Trots utforskande intervjufrågor ger studenterna inga svar som antyder att de försökt utnyttja de formella definitionerna för att berika sina begreppsuppfattningar. Studenterna utnyttjar istället egna ”definitioner” av begreppen. Dessa ges ofta i termer av hur man hanterar begreppet i praktiskt matematiskt arbete. Som ett exempel kan nämnas Philips uttalanden om integralbegreppet. Han skriver ”*En integral av en funktion är en funktion vars derivata är den första funktionen*”. Han vidhåller också under intervjun att integral är just att bestämma en primitiv funktion. ”*Integralen den är ju väldigt definierad redan… [integraler] är trots allt motsatsen till derivata, ungefär…*” Han säger också att ”*det är min definition av integral*”. Han känner igen begreppet Riemannsumma men ser inte det som definierande för hans uppfattning av vad en integral är. Han anser inte att Riemannsumman är funktionell eftersom den bara kan ge approximationer. ”*Ska man räkna ut den exakta [arean] får man använda sig av integraler.*” Det är från denna uppfattning om hur derivatan används som Philip grundar sin egen ”definition”.

Analysen av datamaterialet, särskilt av hur studenterna hanterar utmanande intervjufrågor, klargör att det första intrycket av studenternas begreppsuppfattningar som fragmenterade och med ett procedurellt fokus inte gör studenterna rättvisa. Vid flera tillfällen under intervjuerna leder utmanande frågor till att studenterna upptäcker egenskaper hos begreppen eller sammanhang för begreppen de inte tidigare undersökt. Studenternas kommentarer visar att de blir intresserade av dessa nya sammanhang och startar en process där begreppens egenskaper analyseras på nytt och kopplingar till andra begrepp undersöks. En alternativ tolkning av studenternas förståelse förs fram i artikeln. Tidigare forskning (t.ex. Halldén, 1999; Wistedt & Brattström, 2005) har visat att studenter ibland kontextualiserar undervisningsmaterial på sätt som vid första anblicken kan uppfattas som märkligt eller felaktigt men som ger studenterna möjlighet att genomföra sina studier med framgång. I denna studie visar resultaten att studenterna uttrycker sin förståelse av begreppen gränsvärde och integral i en *algoritmisk kontext* där själva operationerna är definierande egenskaper och bas för förståelsen. Studenterna talar i huvudsak om begreppen i termer av hur dessa begrepp används som redskap. Begreppsuppfattningarna består huvudsakligen av procedurella kunskaper. Det är i denna algoritmiska kontext som de bedömer sin egen förståelse vilket också förklarar deras höga skattningar av den egna förståelsen.

Studenterna utstrålar under intervjuerna ett stort självförtroende när de själva får bedöma sina kunskaper inom matematisk analys. Studenterna grundar troligen sin bedömning på de tolkningar de gör av det studiematerial de mött och de krav som studiematerial, lärare och examinerande uppgifter ställer på dem. Victor säger som argument för sin skattning: ”*Det märker jag också på själva resultatet på [matematikkursen], det går ju bra, så…*“ Philip svarar på frågan om han kommer att studera mycket inför den kommande tentamen: ”*Njaee… egentligen så hoppas jag ju på att jag har förstått allting. Jag kommer ju att göra en massa övningar och sånt där men jag kommer ju inte… jag tror inte det är så annorlunda ändå.*” Förståelse för dessa studenter handlar om att kunna lösa uppgifter.

Den algoritmiska kontexten är dominerande men analysen av intervjuerna visar att utmanande frågor bäddar för möjligheter till kontextskifte. Under intervjun med Philip får han frågan om alla integraler kan ses som areaberäkningar och omvänt. Philips svar är först ganska kategoriskt nej men han påbörjar sedan ett resonemang där han själv under tiden han pratar upptäcker exempel som motsäger hans uppfattning att vissa areor inte kan beräknas med en integral. Hans avslutande kommentar är ”*Nu måste jag fundera på om man kan göra det på alla integraler, det har jag aldrig tänkt på* (skratt). *Men det är…*”. Kommentaren indikerar att han påbörjar en process som kan innebära att han går utanför den algoritmiska kontexten.

Ytterligare ett exempel på hur utmanande frågor bäddar för möjligheter till kontextskiften kan hämtas från intervjun med Victor. Han har en intuitiv idé om gränsvärde som bygger på ett induktivt resonemang och utnyttjar denna idé för att förklara vad en integral är. ”*Integral är arean som finns under funktionen […] och när man beräknar den […] så approximerar man den […] med mindre och mindre staplar.*” På detta sätt kan Victor få en bättre och bättre approximation men han är övertygad om att det alltid är en approximation. Men Victor antyder också att han har hört att det finns ett exakt värde: ”*inte enligt definitionen, men tydligen så om man gör så fin, så fin, dom här små delta x då, ända till oändligt då, det skulle vara den absolut bästa approximationen som finns*”. Victor har problem att sammanfoga sin processinriktade förståelse av integralen med integralen som ett exakt värde. Ivern i hans försök att förklara visar att han intresserar sig för frågeställningen och börjar funderar över gränsvärdesproblematiken vilket öppnar för en möjlighet till ett kontextskifte.

I artikeln ges en argumentation för att studenter som utvecklar en begreppsuppfattning i en algoritmisk kontext inte gör det på grund av missuppfattningar utan för att denna kontextualisering är funktionell för dem (Hähkiöniemi, 2006; Lithner, 2004; Raman, 2004). Studien visar också att genom impulser från utmanande frågor kan även andra kontexter än den algoritmiska öppnas för studenterna. Studenternas begreppsuppfattning inom den algoritmiska kontexten kan då utgöra en språngbräda mot en mer fullödig konceptuell förståelse av dessa begrepp.

6.2 Artikel 2

Transformation and contextualisation: Exploring students' conceptual understanding of threshold concepts in calculus

Artikel 2 diskuterar studenters begreppsuppfattningar i relation till så kallade *tröskelbegrepp* ("threshold concepts", Meyer & Land, 2005) och deras egenskaper. I studenters strävan att utveckla begrepp inom en specifik disciplin blir vissa begrepp mer avgörande än andra. Tröskelbegrepp har, som beskrivits i tidigare kapitel, en potential att öppna upp för vidare lärande och förståelse av området (se avsnitt 2.1). Tröskelbegrepp kännetecknas dessutom av att vara transformativa (Meyer & Land, 2006) i meningen att förståelse för tröskelbegrepp förändrar studenters uppfattningar om själva begreppet samt möjliggör en förändring av deras syn på ämnets språk, normer och praktiker, Ways of thinking and practising i ämnet (*WTP*) (McCune & Hounsell, 2005, se även avsnitt 2.1).

Artikelns syfte är att studera studenters förståelse av begreppen gränsvärde och integral samt att diskutera resultaten i relation till den transformativa egenskapen av dessa tröskelbegrepp och då särskilt att klargöra i vilken mening förståelse av tröskelbegreppen innefattar en transformation av förståelsen i relation till matematikens *WTP*. Studenters utveckling av en förståelse kan beskrivas som en kontextualiseringsprocess (Halldén, 1999, se även avsnitt 3.4). Denna kontextualiseringsteori samt en modell för utveckling av procedurella och konceptuella kunskaper (Baroody, Feil, & Johnson, 2007, se även avsnitt 3.3) utgör artikelns teoretiska ramverk.

Det empiriska materialet utgörs även i denna artikel av intervjustudien. Intentionell analys har använts för analys av data. Artikeln ger en kort summering av hur studenterna tolkar begreppen i en algoritmisk kontext och fokuserar därefter på hur utmanande frågor under intervjuerna öppnar upp för andra kontextualiseringar där de begreppsliga egenskaperna blir mer framträdande. Två korta utdrag från intervjuer med två studenter, Philip och Victor, används som illustrationer av detta kontextskifte. Philip får frågan om alla integraler är areor och omvänt. Kommentaren ”*Nu måste jag fundera på om man kan göra det **på alla integraler**, det har jag aldrig tänkt på*” (betoning tillagd) visar också att han närmar sig matematikens *WTP*. Victor diskuterar om alla integraler är en approximation. Ivern i uttalandet ”*Ja… alltså det är oändligt… jag menar det är så fint att man nästan inte ser… nere i nanometer, nej det är mikro nano…skalor.* ” och kroppsspråket vid detta uttalande visar att Viktor närmar sig en kontextualisering där de begreppsliga egenskaperna blir mer framträdande.

I artikeln diskuteras dessa kontextskiften i relation till tröskelbegreppens transformativa egenskap. Denna egenskap kan begreppsliggöras genom studenternas kontextskiften. Studenters begreppsuppfattningar förändras och utvecklas när begreppen kontextualiseras på nya sätt. Förändringarna gäller inte bara uppfattningar om begreppen. Kontextskiften skapar också en möjlighet för studenterna att närma sig ämnets *WTP*.

6.3 Artikel 3

Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang - En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift

I denna artikel analyseras hur en grupp universitetsstudenter nyttjar sina begreppsuppfattningar i en problemlösningsprocess. Artikeln har syftet att visa hur en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang kan gestalta sig i en problemlösningsprocess. Kan förstaårsstudenter utnyttja en sådan växelverkan och vilken funktion har i så fall dessa växlingar mellan intuitiva idéer och formella resonemang? Intuitiva idéer definieras, på samma sätt som redan beskrivits i teoriavsnittet (avsnitt 3.1.1), med utgångspunkt i Fischbeins teorier (1987, 1999) som en slags kognition som ger möjlighet till en omedelbar uppfattning där alla delar uppfattas direkt och tillåter resonemang utan att man behöver vila på det formella. Formella resonemang definieras, på samma sätt som redovisats tidigare (se avsnitt 3.1.2), som logiska slutledningar som vilar på formella definitioner och satser.

I artikeln presenteras studenterna i gruppen under namnen Alex, Beth, Carl och Diana. De är i slutet av sitt första studieår av en matematikutbildning. Gruppen har arbetat med en utmanande uppgift som berör begreppen funktion och derivata samt inkluderar ett induktionsbevis (se avsnitt 5.2 och figur 4). Uppgiften består i att bestämma antalet nollställen till en funktion vars n:te derivata är skild från noll. Uppgiften ger också en uppmaning att med induktion bevisa att detta antal nollställen gäller. Gruppen arbetade med uppgiften i 115 minuter. Vid analysen av studenternas samtal har intentionell analys använts (se metodologikapitlet avsnitt 4.1).

Redan tidigt i sin diskussion om uppgiften formulerade studenterna en korrekt hypotes att en funktion som uppfyller uppgiftens krav har högst n nollställen. Gruppen konstaterade snabbt att om förstaderivatan inte är noll så kan derivatan inte byta tecken och funktionen är därmed växande, eller avtagande, hela tiden. Funktionen kan därför ha högst ett nollställe. Detta utnyttjas som ett startsteg för induktionen. Studenterna har god kunskap om hur induktionsbevis presenterats i en tidigare kurs, men de har svårt att hitta en argumentation för sin hypotes som passar in i detta mönster. De utnyttjar senare idén att studera vad som gäller då derivatan har m nollställen. Med stöd i en figur övertygar de sig om att i så fall kan funktionen ha högst $m+1$ nollställen. Studenterna utnyttjar också en följd av detta resultat: Om p:te derivatan har högst m nollställen så har (p-1)-derivatan högst m+1 nollställen. Studenterna upprepar detta resultat och visar på så sätt att om p:te derivatan är skild från noll så har funktionen högst p nollställen. Gruppen presenterar inte någon skriftlig lösning men deras diskussion innehåller alla ingredienser för ett fullständigt bevis.

Studenterna uppvisar genom sitt arbete med uppgiften att de har och utnyttjar intuitiva idéer för de begrepp som är aktuella. Diskussionerna behandlar begrepp som funktion, derivata, andraderivata, nollställe, växande och avtagande. Runt dessa begrepp tillåter sig studenterna att resonera utan att vila på det formella. Begreppen uppfattas på ett omedelbart och självklart sätt. Men studenterna ställer också krav på att presentera ett formaliserat bevis. I de fall dessa krav består av Beths önskan att lärobokens algoritm för induktionsbevis ska följas slaviskt stör det gruppens arbete och hämmar dess kreativitet. Men de formella kraven har också en positiv påverkan på problemlösningsprocessen. Kraven leder till att studenterna kontrollerar och verifierar sina idéer. Studenterna breddar och fördjupar sitt sökande vilket driver problemlösningsprocessen vidare.

Vid en första anblick kan en del av det studenterna säger och gör tyckas felaktigt men en noggrann analys visar att studenterna har mer kunskap än deras uttalande först ger vid handen. Ibland utelämnas preciseringar, men man kan se att preciseringen återkommer när den blir kritisk för resonemanget. Precis som en rutinerad matematiker utnyttjar studenterna möjligheter att ekonomisera sina resonemang genom att utelämna för tillfället onödiga detaljer.

I den kreativa processen utnyttjar studenterna både intuitiva idéer och formella resonemang. I artikeln presenteras ett utdrag från studenternas diskussion där Diana diskuterar sambandet mellan $f^{(n)}$ och $f^{(n+1)}$. Genom att döpa om dessa till *funktionen* respektive *derivatan* skaffar sig Diana tillgång till nya utgångspunkter och kan utnyttja de uppfattningar som hon har om begreppen funktion och derivata. Att hon har intuitiva idéer om dessa två begrepp visar hon genom att på ett omedelbart och självklart sätt, utan hänvisning till formella definitioner och satser, rita en bild av en graf (se artikel 3, figur 2). Alex protesterar när Diana kommer fram till att en funktions avsaknad av nollställen inte ger någon information om derivatan. Dianas ritar en graf som blir ett tydligt motexempel. I artikeln ges även ett utdrag från studenternas diskussion där Carl försöker resonera sig fram till ett bevis. Carl övertygar sig om att hans resonemang är korrekt genom att ta stöd i en figur. Figuren är av ett sådant generellt slag att den kan ses som ett generiskt exempel. Carl säger sig bli övertygad men söker ändå sätt att formalisera resonemanget. Han letar efter formella satser där de aktuella begreppen finns representerade. En rimlig tolkning är att han försöker verifiera sina intuitiva idéer.

Artikelns slutsats är att studenterna i problemlösningsprocessen förmår utnyttja en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang och att växlingar mellan intuitiva idéer och formella resonemang har flera olika funktioner. Växlingar utnyttjas för att få stöd och kontrollera intuitiva idéer. Studenterna söker kopplingar mellan sina intuitiva idéer och formella resultat. Detta leder det kreativa arbetet framåt. Den formella strukturen blir ett stöd som gör att studenterna tar sig vidare. Växlingar utnyttjas också för att få nya utgångspunkter för problemlösningen. När studenterna kör fast i försöken att formalisera söker de möjligheter till nya utgångspunkter genom att växla från formella resonemang till intuitiva idéer. Växlingar utnyttjas även för att reducera komplexitet. Genom att lämna den formella hanteringens stringens ekonomiserar studenterna sina resonemang. Diana utnyttjar möjligheten att döpa om objekt. Det är ett effektivt sätt att reducera komplexiteten och ett vanligt arbetssätt för matematiker. Växlingar utnyttjas dessutom för att driva problemlösningsprocessen vidare. Trots att studenterna säger sig bli övertygade av sina intuitiva idéer arbetar de för att prestera ett formaliserat bevis. Dessa formaliseringskrav leder till att studenterna tränger djupare in i uppgiften och letar nya vägar och hittar därmed nya idéer som leder problemlösningsprocessen vidare.

Studien visar att studenterna förmår nyttja sina begreppsuppfattningar på ett mångdimensionellt sätt. En stor kreativitet möjliggörs hos studentgruppen genom att de förmår utnyttja de formella och de intuitiva aspekterna av matematiken i ett dynamiskt samspel. Studenternas sätt att arbeta har stora likheter med problemlösningsstrategier som vi kan finna hos professionella matematiker (Burton, 1999a, 1999b).

7 Slutsatser

I detta kapitel ges svar på avhandlingens två forskningsfrågor (se avsnitt 3.5). Dessa svar presenterar det sammantagna resultatet av de i avhandlingen ingående studierna och utgör alltså avhandlingens slutsatser.

7.1 Hur kontextualiserar studenter begrepp inom matematisk analys?

I denna avhandlings empiriska studier har jag studerat studenters begreppsuppfattningar genom att undersöka hur de kontextualiserar det matematiska material som de möter. I intervjustudien har vi sett hur studenter talar om sina uppfattningar av begreppen gränsvärde och integral. Dessa studenters begreppsuppfattningar kan beskrivas som starkt fragmenterade och procedurellt inriktade. Studenterna ser själva operationerna som definierande för begreppen och de få kopplingar de gör mellan olika begrepp bygger på vad begreppen används till. I artikel 1 och 2 framhålls att sådana begreppsuppfattningar kan förstås och ses som rimliga om vi antar att studenterna har tolkat begreppen i en *algoritmisk kontext*. I artikel 3, där jag låtit en grupp studenter arbeta med en utmanande uppgift, har vi sett att studenterna utnyttjar en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang. Dessa studenter tolkar det matematiska arbetet på ett sätt som kan beskrivas som en *formell kontext* där också intuitiva idéer utgör viktiga inslag.

Studenterna i de två olika studierna kommer från olika studieinriktningar. I intervjustudien deltar blivande högskoleingenjörer och i problemlösningsstudien följer studenterna ett matematikprogram. Analysen av datamaterialet antyder att detta kan ha betydelse för hur studenterna kontextualiserar de matematiska begreppen. De signaler som undervisning, examination och studiemiljö ger avspeglar sig i de kontextualiseringar mot vilka studenterna tolkar sina ansträngningar att bygga en begreppslig förståelse. Som redovisats i forskningsöversikten (avsnitt 2.3) har studier av läroböcker och prov visat att de till stor del innehåller material som kan hanteras på ett algoritmiskt sätt (Bergqvist, 2006; Boesen, 2006; Lithner, 2004; Raman, 2004). Att studenter utnyttjar en algoritmisk kontext är därför ganska naturligt. Det kan däremot ses som anmärkningsvärt att problemlösningsstudien visar att studenterna från matematikprogrammet trots detta visar att de har och förmår utnyttja intuitiva idéer.

De olika studentkategorierna har vid studiens genomförande läst olika mycket matematik. De blivande högskoleingenjörerna har läst 10 poäng (15 hp) matematik och matematikstudenterna 30 poäng (45 hp). En möjlig förklaring till skillnaden i studenternas kontextualiseringar kan också vara denna skillnad i studietid. Scheja (2006) har studerat hur studenter i teknisk utbildning uppfattar sina studier och sitt lärande. I hans undersökning talar studenter om en upplevelse av att förståelse för ett begrepp inte uppkommer under den kurs som behandlar begreppet utan först under senare kurser när andra begrepp som bygger på begreppet ifråga behandlas. Scheja (2006) benämner fenomenet *delayed understanding* (jämför Entwistle, Nisbet, & Bromage, 2005). De begrepp jag studerat i denna avhandling är alla begrepp som återkommer i senare kurser. Studenterna på matematikprogrammet har alltså ytterligare bearbetat begreppen. Som det kommer till uttryck i materialet har studenterna med den längre studietiden större tillgång till intuitiva idéer om begreppen samt klarar att på ett bättre sätt utnyttja formella resonemang där begreppen ingår. De intuitiva idéerna för begreppen har skapats genom studenternas tidigare möten med begreppen (Fischbein, 1987, se även avsnitt 3.1.1). Det krävs tid och erfarenhet från många möten med begreppen för att skapa dessa sekundära intutioner.

Studiemiljö och studietid betyder emellertid inte allt. Vi kan i studierna också se att olika individer kontextualiserar det matematiska materialet på olika sätt även om de befinner sig i samma studiemiljö. I artikel 3 där fyra studenter, alla från samma matematikprogram, arbetar med en uppgift kan vi tydligt se att studenterna betonar olika delar av det matematiska innehållet. Carl och Diana gör en likartad kontextualisering där fokus läggs på det begreppsliga innehållet i uppgiften och där intuitiva uppfattningar och formella resonemang har viktiga funktioner för resonemangen som förs i problemlösningssituationen. Beth har ett annat fokus. Ytligt sett utnyttjar hon de formella aspekterna av matematiken men hon gör det på ett algoritmiskt sätt. Hon vill att det induktionsbevis gruppen ska prestera ska följa den mall för sådana bevis som läroboken beskriver. Hon använder denna mall som en algoritm för beviset. Alex lyfter också fram matematikens formella delar men av ett annat skäl. I senare delen av gruppens arbete driver han hårt frågan om lösningens kommunicerbarhet. Han menar att gruppen måste presentera ett formaliserat bevis för att kunna förmedla sina tankar till människor utanför gruppen. En formell kontext kan alltså ha olika karaktär och olika funktion i studenters arbete med matematik.

I forskningsöversikten refereras till många studier som undersökt studenters begreppsuppfattningar. Ett vanligt sätt att tala om dessa ofta bristfälliga uppfattningar är att beskriva dem som missuppfattningar. När Victor i den första studien hävdar att en integral är en approximation (se artikel 1) kan det ge intryck av att vara en missuppfattning. Integraldefinitionen ger ju genom gränsvärdet ett exakt värde. Men vi kan av Victors uttalande se att han har en uppfattning i enlighet med en processinriktad begreppsuppfattning. Det är inte en fix approximation som Victor refererar till. Approximationen kan enligt Victor göras hur god som helst, vilket är just vad som krävs för att ett gränsvärde ska existera. Victor har inte en missuppfattning av integralbegreppet men han använder en processinriktad begreppsuppfattning. Övergången från att se ett begrepp som en process till att uppfatta begreppet som ett objekt (se avsnitt 3.2) är problematisk vilket beskrivits av ett flertal forskare (se forskningsöversikten avsnitt 2.2). Victors uppfattning av integralbegreppet och hans uppfattning av gränsvärde som en process passar i det algoritmiska sammanhang där Victor och hans studiekamrater generellt tolkar det matematiska material de möter. Uppfattningar som benämns som ”missuppfattningar” kan på detta sätt i vissa fall vara en tolkning av begreppet i en annan kontext än den som forskaren eller läraren avsett (Halldén, 1999; Wistedt, 1998).

Som jag refererat till i inledningen hävdar Tall (1992a) och Williams (1991) att studenter ofta skapar egna uppfattningar om hur de förväntas hantera gränsvärden och att de praktiska beräkningarna uppfattas som viktigare än den formella behandlingen. I mina studier har jag sett exempel som stöder detta. I artikel 1 har studenterna en mycket tydlig procedurell inriktning. Studenterna gör uttalanden som ”*jag försöker förstå hur man löser saker och ting*” och ”*jag går inte runt och grubblar över varför det är si eller så*”. Vissa kopplingar finns till konceptuell förståelse men i en dominerande algoritmisk kontext värdesätts dessa konceptuella kunskaper inte i det dagliga arbetet med matematiken.

7.2 Vilken dynamik finns mellan olika kontextualiseringar?

Även om vissa kontextualiseringar är mycket dominanta utnyttjar studenter också andra kontextualiseringsmöjligheter. De blivande högskoleingenjörerna, som mycket tydligt tolkar sin studiesituation i en algoritmisk kontext, visar att de vid provocerande frågor rör de sig mot mer begreppsliga uppfattningar av de efterfrågade begreppen där både formella och intuitiva aspekter av dessa lyfts fram.

I problemlösningsstudien, där studenter från ett matematikprogram i grupp arbetar med en uppgift, har vi sett hur studenterna utnyttjar kontextualiseringsmöjligheter där formella strukturer och intuitiva idéer utgör viktiga inslag. Studien visar att studenterna förmår utnyttja ett samspel mellan intuitiva idéer och formella resonemang. Det är också i denna studie ofta provocerande frågor, här från medstudenter, som gör att studenterna växlar mellan intuitiva uppfattningar och formella resonemang. Dessa växlingar har flera funktioner. De ger stöd åt problemlösningsprocessen genom att formella strukturer kan utnyttjas och de intuitiva idéerna kan kontrolleras, de kan utnyttjas för att få tillgång till nya utgångspunkter för problemlösningen, de kan utnyttjas för att reducera komplexiteten i problem som behandlas och de driver problemlösningsprocessen vidare.

Tall och Vinner (1981) har som nämnts i teorikapitlet (avsnitt 3.2) infört begreppet *concept image*. Denna kognitiva struktur innefattar alla de kunskaper som en individ har om ett begrepp samt alla de processer som förknippas med begreppet. Jag har i mina studier sett att studenter i olika situationer lyfter fram olika delar av sitt ”concept image”. Ibland är det de formella delarna som framträder, ibland de intuitiva, ibland de algoritmiska. Avgörande för vad som lyfts fram av studenterna är hur de kontextualiserar det material de möter. Signaler från undervisning och studiemiljö påverkar till synes starkt studenternas agerande. Provocerande frågor och utmanande material är viktigt för att ge studenterna incitament att växla kontext och upptäcka nya möjligheter att tolka en uppgift.

Det syfte för den matematiska verksamheten som studenterna uppfattar blir avgörande för vilken kontext de väljer. Om syftet är att klara tentamen och tentamina består av uppgifter som kan lösas genom att imitera typexempel utnyttjar troligen studenterna en algoritmisk kontext. Mina utmanande frågor introducerar ett nytt syfte: att utforska egenskaper hos begrepp och samband mellan dessa. Detta nya syfte ger ett motiv att välja en annan kontext där konceptuella kunskaper utgör ett större inslag. Begreppsutveckling kan, som redovisats i teorikapitlet (avsnitt 3.4), ses som en process av differentiering där individen får tillgång till två eller fler olika sätt att uppfatta ett begrepp (Halldén, 1999). I denna avhandling, där vi endast studerar begreppsuppfattningar under en mycket kort tidsperiod, är det inte möjligt att följa denna utveckling. Vi kan dock se den potential för sådan utveckling som ligger i öppnandet för nya kontextualiseringsmöjligheter.

8 Diskussion

Detta avslutande kapitel inleds med en diskussion om avhandlingens bidrag till forskningsfältet. Därefter följer en diskussion om avhandlingens relation till tidigare forskning om individers begreppsuppfattningar där uppfattningarna ofta setts som missuppfattningar. Kapitlet presenterar också frågor för vidare forskning och avslutas med en diskussion om avhandlingens betydelse för undervisning.

8.1 Avhandlingens bidrag

Avhandlingens resultat stöder till stora delar tidigare forskningsresultat om hur studenter uppfattar begreppen gränsvärde, derivata och integral. Studierna visar till exempel att studenterna har svårt att uppfatta gränsvärdet i integraldefinitionen (Artigue, 1991; Orton, 1983b), att studenter även utan kunskaper om de formella definitionerna klarar att lösa många av de uppgifter som ingår i kursen (Zandieh, 1999) och att studenterna inte ser behovet av och meningen med de formella definitionerna (Hähkiöniemi, 2006).

I avhandlingen används termen *algoritmisk kontext* för att rimliggöra studenternas agerande. Genom att koppla studier av studenters begreppsuppfattningar till en kontextualiseringsteori bidrar avhandlingen med en förklaringsmodell för hur studenter på inledande matematikkurser tolkar det matematiska material de möter. Med denna förklaringsmodell kan vi visa att studenternas agerande inte bottnar i kognitiva tillkortakommanden utan är ett sätt att anpassa sig till uppfattade inlärningskrav i situationen. En liknande förklaringsmodell har använts av Nilsson (2006). Han har i sin studie av hur elever uppfattar sannolikhetsbegreppet kopplat kontextualiseringsteorin till olika förklaringsmodeller för slumpfenomen. Jag har valt att använda tre aspekter av matematiken som ett raster för tolkningen av studenternas kontextualiseringar.

Avhandlingen indikerar att det finns möjligheter att med avstamp i en algoritmisk kontext öppna upp för en mer begreppslig kontext där formella och intuitiva aspekter av matematiken får större plats. Detta motsäger resultat från studier av forskare som hävdar att procedurella kunskaper stör lärandet av konceptuella kunskaper (t.ex. Pesek & Kirshner, 2000). Avhandlingen visar också att studenter redan under sitt första år av matematikstudier förmår utnyttja en dynamik mellan olika aspekter av matematiken.

Avhandlingen visar att begreppsuppfattningar är kontextberoende. Det betyder att det är av största vikt att ta hänsyn till kontextuella faktorer då begreppsuppfattningar studeras. Avhandlingen utnyttjar och prövar därmed den intentionella analysmetoden samt en teori om individers kontextualisering och visar därigenom hur analysmetoden och kontextualiseringsteorin kan utgöra hjälpmedel även för annan matematikdidaktisk forskning.

Studierna som presenteras bidrar till att öka kunskapen om hur studenter inom högre utbildning uppfattar matematiska begrepp genom att koppla ihop teorier från matematikdidaktisk begreppsuppfattningsforskning med teorier från forskning om högre utbildning. Termerna ”tröskelbegrepp” och ”ways of thinking and practising” introduceras i den matematikdidaktiska forskningen.

8.2 Tidigare forskning i nytt perspektiv

Avhandlingen tar sin utgångspunkt i studier av studenters begreppsuppfattningar. Som beskrivits i inledningen och forskningsöversikten har många sådana studier gjorts med syfte att kategorisera missuppfattningar av begrepp som studenter ofta uppvisar. Dessa studier har ett stort värde i det att vi får kunskap om på vilka sätt olika begrepp kan uppfattas av studenterna. Men vi måste också minnas att studenter anpassar sig till de situationer de befinner sig i. De utnyttjar strategier som är effektiva i deras studiemiljö. Kräver situationen inte mer än algoritmiska kunskaper väljer ofta studenter att tolka materialet i en algoritmisk kontext. Vi löper en risk att fastna i ett negativt tänkande om studenters kapacitet om vi ensidigt tar fasta på sådana studier. Säljö (1991) har kritiserat denna typ av konstruktivistisk forskning för att inte ta hänsyn till individens uppfattning av situationen:

> ”Children (and adults) are constantly portrayed as lacking in abilities and situationally appropriate and perfectly rational modes of quantifying and handling counting problems […] are marginalized in the experiment (or in the formal setting). Other modes of reasoning, usually academic and formally elegant, are given priority as if they were “better”, irrespective of what the actor is attempting to achieve.” (Säljö, 1991, p. 123)

Genom att studera hur studenterna kontextualiserar det matematiska materialet har jag i denna avhandling kunnat studera studenternas begreppsuppfattningar ur ett annat perspektiv. Med hjälp av den intentionella analysen har jag kunnat väga samman studenternas kognitiva förmågor och deras tolkning av situationen. Studenternas kontextualiseringar och deras skattning av sin egen förmåga visar att de har andra uppfattningar om vad det innebär att förstå de matematiska begreppen än vad som uttrycks av lärare och i kursmål.

En anledning till att jag valt ett perspektiv där jag inte klassificerar studenters uppfattningar som missuppfattningar är att en sådan klassificering kräver att det finns en norm att spegla begreppsuppfattningen mot. Benämningen missuppfattning signalerar dessutom att det endast finns en sådan korrekt uppfattning. Studierna i avhandlingen visar att studenters uppfattningar kan variera beroende på vilken kontext som aktualiseras. Avhandlingen lyfter därmed fram begreppsuppfattningarnas kontextberoende.

Tidigare studier av studenters uppfattningar av begrepp inom matematik och särskilt inom matematisk analys bekräftas till stor del av de studier som gjorts inom denna avhandlings ram. Vi kan se att studenter fokuserar på procedurella färdigheter (jfr. t.ex. Tall, 1992a). Vi kan också se att studenterna har svårt att övergå till objektifierade uppfattningar (jfr. t.ex. Artigue, 2001; Cornu, 1991). Vi finner att gränsvärdesbegreppet inte uppfattas som så viktigt av studenterna eftersom de inte ser någon användning av begreppet mer än som en del av definitionen av derivata (jfr. Hähkiöniemi, 2006; Zandieh, 1999). Vi har beskrivit hur studenter har svårt att se integral som ett gränsvärde av en följd av summor (jfr. Artigue, 2001; Orton, 1983b). Men vi kan också se att avhandlingen visar på färdigheter hos studenterna där andra forskare utpekat brister. Studenterna utnyttjar i flera fall visualiseringar genom grafer av funktioner och deras derivata (jfr. t.ex. Eisenberg, 1991; Ferrini-Mundy & Graham, 1994). Vi kan dessutom se att de studenter som har läst flera matematikkurser har intuitiva idéer för de begrepp som funktion och derivata som de fått möjlighet att bearbeta under flera kurser. Scheja (2006) benämner, som redan nämnts, fenomenet *delayed understanding*, ett fenomen som tycks tyda på att det krävs tid och erfarenhet för att bilda kraftfulla sekundära intuitioner. Förståelsen kommer för många studenter först när de ytterligare bearbetat begreppen i senare kurser.

8.3 Metoddiskussion

Avhandlingen bygger på fallstudier. Hur generella svar kan då forskningsfrågorna få? Målet för all vetenskap är att nå generell kunskap men generalitet har som alla begrepp en mångfald av betydelser. En betydelse är den statistiska betydelsen där generalisering sker enligt statistiska principer från ett urval undersökta till en population. Men kunskap kan också vara generell i meningen att vara av fundamental och allmän betydelse. Det är generalitet i den senare meningen som gäller för denna avhandling. Genom fallstudierna har jag kunna påvisa hur studenter kan uppfatta ett matematiskt material och hur de kan utnyttja ett dynamiskt samspel mellan olika aspekter av matematiken.

För att analysera data har jag använt intentionell analys. Denna metod har ursprungligen utvecklats för tolkning av samtalssituationer men har även används för tolkning av intervjuer (Entwistle, McCune, & Scheja, 2006;

Scheja, 2002). I denna avhandling har analysmetoden använts för båda dessa typer av datamaterial. Intervjuerna är genomförda med penetrerande frågor utgående från studenternas skriftliga utsagor. Det innebär att intervjun har stora likheter med en grupps diskussion då de arbetar med en utmanande uppgift. Intentionell analys kräver ett rikt material vilket intervjuerna har gett. Även gruppdiskussion har gett ett rikt material i det fall där uppgiften har varit lagom utmanande.

Den intentionella analysen har utgjort en bärande princip för hur studenternas utsagor ska tolkas. Ryve (2006) påpekar att:

> "…intentional analysis should be seen as a method of analysis of how to structure the analyst's process of going from accounts of (descriptions) to accounts for (interpretations). In addition, it is important to accentuate that intentional analysis is a methodological device which has to be related to theoretical constructs used for ascribing meaning to the data." (Ryve, 2006, p. 61)

Jag har valt att utnyttja kontextualiseringsteorin som teoretiskt ramverk. Vid det konkreta arbetet med analysen kan den praktiska inferensen endast användas i ett mindre antal utvalda kritiska partier av ett datamaterial. Det är också så analysen presenteras av Halldén, Haglund och Strömdahl (2007). Konstruktion av en berättelse och narrationer av kortare utdrag har varit min metod att hitta de kritiska partierna.

8.4 Vidare forskning

Denna avhandling har studerat studenters begreppsuppfattningar inom matematisk analys. Med den metod som använts i avhandlingen kan studier naturligtvis göras av studenters begreppsuppfattningar även inom andra områden. Linjär algebra är ett område som innehåller många begrepp. Flera av dessa kan illustreras i två- eller tredimensionella koordinatsystem. Förståelse av området kräver dock att dessa begrepp används även i högre dimensioner där de är svåra att visualisera. På vilket sätt samspelar algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i studenters uppfattningar av dessa begrepp?

Avhandlingen har studerat universitets- och högskolestudenters begreppsuppfattningar. I Sverige introduceras begreppen gränsvärde, derivata och integral i de senare av gymnasieskolans kurser. Några studier som jag refererat till (t.ex. Hähkiöniemi, 2006) har studerat gymnasisters uppfattningar av dessa begrepp. Dessa studier har dock haft andra inriktningar. Det vore därför intressant att undersöka hur gymnasister kontextualiserar de begrepp inom området matematisk analys som introduceras i gymnasiets kurser.

De begrepp som studerats i denna avhandling har alla beskrivits som tröskelbegrepp (Meyer & Land, 2003). Flera intressanta frågor kan ställas om dessa begrepp inom matematik. Vilken roll har tröskelbegreppen i undervisningen? Är studenterna (och deras lärare) medvetna om vilka begrepp som är av denna karaktär och vilka möjligheter de erbjuder (jfr. Marton, Runesson, & Tsui, 2004)? Handlar dessa möjligheter om att just dessa begrepp kräver, för att förstås i matematisk mening, kontextväxlingar av genomgripande slag?

8.5 Betydelse för undervisning

Flera tidigare studier har visat att studiematerial, undervisning och examinationsformer sänder signaler till studenterna om vad som förväntas av dem som inte är i enlighet med ämnets tankesätt och handlingsnormer (Bergqvist, 2006; Boesen, 2006; Lithner, 2004; Raman, 2004). Konsekvensen av dessa signaler kan, som vi sett i denna avhandling, vara att studenter tenderar att tolka det matematiska materialet i en algoritmisk kontext. När denna kontext blir totalt dominerande minskar studenternas möjligheter att utveckla sina begreppsuppfattningar. Det hämmar också den kreativa förmågan i problemlösningssituationer. Att kunna utnyttja en dynamik mellan kontexter är en viktig aspekt för ett framgångsrikt matematiskt arbete. Vi har i denna avhandling sett att utmanande frågor under intervjuerna inneburit nya kontextualiseringsmöjligheter för studenterna. Studenterna har visat ett stort intresse för frågeställningarna som uppstått och startat en tankeprocess som har möjlighet att leda till en frigörelse från en tidigare helt dominerande algoritmisk tolkning av det matematiska materialet. Att i undervisningen skapa denna typ av utmanande frågeställningar kan vara avgörande för hur studenterna lyckas närma sig matematikens sätt att tänka och agera. Detta kan ske på många olika sätt till exempel genom problemlösning, genom diskussioner om begreppens egenskaper eller genom diskussioner utgående från visualiseringar med hjälp av grafritande räknare och matematiska programvaror.

Avhandlingen har visat att studenter på inledande kurser tolkar det matematiska materialet på ett sätt som inte överensstämmer med lärares förväntningar. Vid en första anblick är det lätt att avfärda studenternas uttalanden som felaktiga. En analys som tar hänsyn till både kognitiva och diskursiva aspekter ger dock, som vi sett, en annan bild. Att som lärare vara lyhörd för vad studenterna avser med sina uttalande kan vara avgörande för om undervisningen ska kunna hjälpa studenterna att närma sig matematikens tankesätt och handlingsnormer.

9 Summary

9.1 Introduction

Several studies have been carried out categorizing students' misconceptions of concepts in calculus (see e.g. Artigue, 1991; Tall, 1992a). These studies give a rather depressing picture of students' understanding of these concepts. However, some researchers (e.g. Williams, 1991) argue that a misconception of a concept may be a first step on the way to develop an understanding of the concept, or a "fore-conception" using a term borrowed from Sierpinska (1992). The point of departure taken in this thesis is a perspective which also focuses on the potential of students' conceptions. The thesis consists of three articles and a connecting text. Two of the articles are written in English and one in Swedish. The articles are included as appendices.

McCune and Hounsell (2005) have introduced the notion of *Ways of thinking and practicing (WTP)* in a subject to describe disciplinary differences. In students' efforts to understand the subject some concepts may be more crucial. *Threshold concepts* can be considered as a portal opening up a new and previously inaccessible way of thinking about something (Meyer & Land, 2003). The concepts brought to the fore in this thesis (function, limit, derivative, and integral) are concepts of this kind. Research on students' conceptions has shown that learning these concepts is problematic for students (e.g. Artigue, 1991; Cornu, 1991; Orton, 1983b; Tall, 1992a). These four calculus concepts could be seen both as processes and as objects. It is fundamental in the practice of mathematics to be able to use both these aspects but the transition from a process-oriented conception to an objectified one is often problematic for the students (Artigue, 2001; Sfard, 1991).

9.2 Theory and methodology

Mathematical activities can be looked upon from many different perspectives. Fischbein (1994) talks about three basic components of mathematics as a human activity: the formal, the algorithmic, and the intuitive. I have chosen to study the dynamics between these three aspects of mathematics. The interaction between these components is, according to Fischbein (1994), very complex. Several authors have discussed the interplay and the tension between these aspects of mathematics (e.g. Bergsten, 2004; Farmaki & Paschos, 2007; Hanna, 1991; Lithner, 2004; Mamona-Downs, 2001; Pinto & Tall, 1999, 2002). In this thesis *formal reasoning* is defined as deductions starting in formal definitions and theorems. Following Fischbein (1987) *intuitive ideas* is defined as a kind of cognition that is immediate and self-evident so that all parts could be perceived simultaneously, allowing reasoning without the need for formal references. *Algorithmic knowledge* is defined as rules and procedures and includes students' ability to describe and use these rules and procedures (Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1998).

The distinction between procedural and conceptual knowledge is also used in this thesis. Hiebert (1986) introduced a definition of these types of knowledge which was later developed by Star (2005). He defined *conceptual knowledge* as knowledge about concepts and principles. *Procedural knowledge* was defined as knowledge about rules and procedures. Baroody, Johnson and Feil (2007) have taken these definitions even further. They describe development of knowledge and understanding as a process which increases knowledge of both kinds, creating richer connections and ending up with well connected procedural and conceptual knowledge. Moreover, these two types of knowledge are seen as supporting each other in the learning process. In accordance with this model understanding is defined as including both procedural and conceptual understanding with the level of understanding depending on the richness and connectedness of the knowledge.

Within a constructivist perspective the term *context* is defined as the cognitive structure brought to the fore by the individual in a particular situation. Studies have shown that students often interpret teaching and learning material in a way that was not intended by the teacher (Halldén, 1999; Wistedt, 1994a, 1994b). This led to the development of a theory of *contextualisation* (Halldén, 1999). This theory could be seen as an answer to the critique from the sociocultural perspective that constructivists tend to neglect the social aspects of learning and also as a development of the theory of conceptual change. This theory holds that a conception is developed not only by changing the conception but also by adding new conceptions to the ones previously held. The development could be described as a process of differentiating between two or more conceptions and of choosing the contextualisation appropriate to the situation at hand.

The aim of this thesis is to explore how university students use their conceptions when working with mathematical tasks in calculus. The research questions are: How do students contextualise concepts in calculus? What dynamic interplay among different contextualisations occurs when students solve mathematical problems?

The analysis of the data drew on the intentional approach to learning and meaning making developed in research on learning and conceptual change in school and higher education (Halldén, Haglund, & Strömdahl, 2007). An analysis based on such an intentional approach focuses on the students' activities in terms of intentional action. As outside observers, we do not have direct access to the students' intentions so we have to infer them by viewing the observed activities from a perspective which renders them meaningful. To adopt such an intentional perspective is to view social and communicative behaviour in terms of some purpose of the acting person to achieve a goal. By analysing what the students say or do in a particular situation and by focusing on how they approach and understand a particular learning task or a piece of information, we gain a picture of the students' perceptions of the situation at hand and what they are trying to achieve. Intentional analysis, by virtue of its focus on individual students' ways of reasoning in relation to a particular task or a particular learning environment, helps us to understand what the students take for granted, what they hold true or commit themselves to.

The thesis includes two empirical studies, an interview study and a problem solving study. The interview study included 20 engineering students taking a course in calculus. The students were asked to reflect in writing on the meaning of the concepts limit and integral. Four students volunteered to take part in a subsequent interview. The interviews involved questions probing the students' understanding of the two concepts. In the problem-solving study, a group of four students in their first year of a mathematics programme was working with a challenging task including the concepts of function and derivative. The problem was to decide how many zeros there exist when you know that the *n*th derivative is nonzero. The task also included proof by induction.

9.3 The papers

Paper 1: Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of calculus
(Manuscript submitted for publication)

The first paper reports findings from the interview study. The aim of the paper is to investigate the nature of students' understandings of the concepts of limit and integral and to discuss what this form of understanding might imply in terms of opportunities for the students to develop a conceptual understanding of calculus. Intentional analysis of the students' written and oral accounts reveals that the students were expressing their understanding of the concepts within an *algorithmic context* in which the operations of these concepts were seen as defining features and a basis for understanding those concepts. The algorithmic context was predominant but when probing questions were put to them addressing topics that the students previously had not considered the students were prompted to think about these unfamiliar topics. The students' ways of reasoning revealed an awareness of conceptual areas in need of further elaboration and reflection and hinted at a potential for developing conceptual understanding. The students' understanding within an algorithmic context can be seen as a stepping stone towards a more complete understanding of calculus.

Paper 2: Transformation and contextualisation: Exploring students' conceptual understanding of threshold concepts in calculus
(Manuscript submitted for publication)

The second paper also draws on data from the interview study. The paper revisits the findings in paper 1 and takes the analysis further. The aim is to discuss the findings in relation to the transformative aspects of threshold concepts and in particular to clarify in what sense developing an understanding of threshold concepts involves a transformation of understanding in relation to ways of thinking in the subject. The interviews made it clear that the students' algorithmic contextualisation of the threshold concepts limit and integral and the understanding thus developed was not fixed and final. Faced with probing questions they appeared to shift to a contextualisation foregrounding ideas relating to the conceptual dimensions of calculus. These contextual shifts are discussed in relation to the transformative aspects of threshold concepts (Meyer & Land, 2006). It is argued that the transformative aspects may be conceptualised in terms of contextual shifts allowing the development of conceptions at different levels of abstraction simultaneously interacting to shape the students awareness of the ways of thinking and practising in mathematics.

Paper 3: Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang: En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift [The interplay between intuitive ideas and formal reasoning: A case study of university students' problem solving in calculus]
(Accepted for publication in Nordic Studies in Mathematics Education)

The third paper reports on findings from the problem solving study. The aim of the paper is to investigate the interplay between intuitive ideas and formal reasoning in a problem solving process. The discussion between the members of the group was analysed following the principles of intentional analysis. The results show that the students both had and used intuitive ideas relevant to the concepts brought to the fore by the task. The students also created proof by induction but did not themselves regard it as proof fitting the ordinary pattern for such proof by induction as they remembered it from text-books and teaching. The students used intuitive ideas and formal reasoning in a dynamic interplay. The interplay had several functions: to control intuitive conceptions, to offer a new basis for reasoning, to reduce the complexity of the problem and to push the problem solving process forward.

9.4 Conclusions and discussion

In the interview study the students displayed fragmented conceptions with a procedural focus, a result which confirms previous research results. There were few connections between different concepts and the operations were seen as defining features of the concepts. The students' interpretations were carried out in an *algorithmic context*, in which the very operations were seen by the students as crucial to their understanding of the concepts. However, in the problem solving study the students' interpretations of the mathematical task were of a different kind. The task was interpreted in a *formal context* in which also intuitive ideas played an important role. The two empirical studies included different student groups. The results suggest that differences in time and study programme may explain the differences in the students' contextualisations of the tasks presented to them. However, there are also differences in the contextualisations made by different individuals regardless of programme. Even if the algorithmic context was predominant among the engineering students probing questions opened up the possibility for the students to contextualise the task in a different way. Probing discussions also initiated shifts between formal reasoning and intuitive ideas among the students who worked in a predominantly formal context. These students used such an interplay in ways familiar to professional mathematicians (Burton, 1999a, 1999b).

By using a theory of contextualisation to model the students' conceptions of threshold concepts in calculus it is made clear that the students' interpretations of a given task are not merely due to cognitive shortcomings, but rather ways of dealing with a learning situation at hand. This thesis shows how students may have a potential for developing a formal understanding of a mathematical concept previously viewed within an algorithmic context.

The concepts investigated in this thesis are all regarded as threshold concepts (Meyer & Land, 2003). Further research on such concepts is required if we want to gain a fuller picture of the role that such concepts play in teaching and learning, and of the potential such concepts offers to the understanding of the relationship between contextual shifts and conceptual development. Furthermore, such an understanding would be crucial to teachers' possibilities to help students approach ways of thinking and practising which are fundamental to mathematics.

10 Referenser

Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem: En belysning av barns lärande*. Doktorsavhandling, Göteborgs universitet.

Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus: Anecdotes or the tip of the iceberg? In G. Booker, P. Cobb & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 3-10). Oaxtepec, Mexico: CINVESTAV.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 207-220). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In K. L. Frank (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publisher.

Baroody, A., Feil, Y., & Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115-131.

Bereiter, C. (1994). Constructivism, socioculturalism, and Popper's world 3. *Educational Researcher, 23*, 21-23.

Berger, M. (2004). The functional use of the mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 81-102.

Bergqvist, E. (2006). *Mathematics and mathematics education: Two sides of the same coin*. PhD thesis, Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå University.

Bergsten, C. (2004). *Exploiting the gap between intuitive and formal knowledge in mathematics.* Paper presented at the ICME 10, Copenhagen.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning*. New York and Sydney: Academic Press.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: Comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. PhD thesis, Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå university.

Bryman, A. (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber.

Burton, L. (1999a). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics, 37*, 121-143.

Burton, L. (1999b). Why is intuition so important for mathematicians but missing from mathematics education? *For the Learning of Mathematics, 19*(3), 27-32.

Caravita, S., & Halldén, O. (1994). Re-framing the problem of conceptual change. *Learning and Instruction, 4*, 89-112.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher, 23*(7), 13-20.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. In E. von Glaserfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 57-176). Dordrecht: Kluwer.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dahlgren, L.-O. (1997). Learning conceptions and outcomes. In F. Marton, D. Hounsell & N. Entwistle (Eds.), *The experience of learning* (2 ed., pp. 23-38). Edinburgh: Scottish Academic Press.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*(3), 281-303.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 23*, 17-24.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Driver, R. (1981). Pupils' alternative frameworks in science. *European Journal of Science Education, 3*, 93-101.

Driver, R., Asoko, H., Leach, J., Mortimer, E., & Scott, P. (1994). Constructing scientific knowledge in the classroom. *Educational Researcher, 23*(7), 5-12.

Dubinsky, E. (1991). Reflexive abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duit, R. (2006). *Biography - STCSE. Students' and Teachers' Conceptions and Science Education.* Retrieved 6 Sept 2007, from http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/stcse/stcse.html

Dysthe, O. (2001). Sociokulturella teoriperspektiv på kunskap och lärande. In O. Dysthe (Ed.), *Dialog, samspel och lärande* (pp. 31-74). Lund: Studentlitteratur.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Entwistle, N., McCune, V., & Scheja, M. (2006). Student learning in context: Understanding the phenomenon and the person. In L. Verschaffel, F. Dochy, M. Boerkaerts & S. Vosiniadou (Eds.), *Instructional psychology: Past, present, and future trends. Sixteens essays in honour of Eric de Corte* (pp. 131-148). Amsterdam: Elsevier.

Entwistle, N., Nisbet, J., & Bromage, A. (2005). *Subject overview report: Electronic Engineering*. Enhancing teaching and learning environments in undergraduate courses (ETL-project), School of education, University of Edinburgh.

Entwistle, N., & Ramsden, P. (1983). *Understanding student learning*. London: Croom Helm.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). The interaction between intuitive and formal mathematical thinking: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(3), 353-365.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in mathematics learning, preliminary analyses and results. MAA notes no. 33* (pp. 31-45). Washington: The mathematical association of America.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In Biehler, Scholz, Strässer & Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as ascientific discipline* (pp. 231-245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematics reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 11-50.

Geertz, C. (1991). Tjock beskrivning. För en tolkande kulturteori. *Häften för kritiska studier, 3*, 13-33.

Grey, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 115-141.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 57-72.

Halldén, O. (1988). Alternative frameworks and the concept of task. Cognitive constraints in pupils' interpretations of teachers' assignments. *Scandinavian Journal of Educational Research, 32*, 123-140.

Halldén, O. (1999). Conceptual change and contextualization. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 53-65). Amsterdam: Pergamon Elsevier.

Halldén, O. (2001). Social konstruktionism, konstruktivism och intentionell analys som heuristiskt verktyg i kvalitativ analys. In Halldén, Scheja & Jakobsson-Öhrn (Eds.), *Intentionell analys. Forskningsrapporter från Pedagogiska institutionen, nr 65*. Stockholms universitet.

Halldén, O., Haglund, L., & Strömdahl, H. (2007). Conceptions and contexts: On the interpretation of interview and observational data. *Educational Psychologist, 42*(1), 25-40.

Halldén, O., Petersson, G., Scheja, M., Haglund, L., Österlind, K., & Stenlund, A. (2002). Situating the question of conceptual change. In M. Limón & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change. Issues in theory and practice* (pp. 137-148). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23.

Hansson, Ö. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function*. PhD thesis, Luleå university, Department of mathematics.

Harel, G., & Dubinsky, E. (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Helenius, O., & Tengstrand, A. (2005). *Nybörjarstudenter och matematik. Matematikundervisningen under första året på tekniska och naturvetenskapliga utbildningar*. Högskoleverkets rapportserie 2005:36.

Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Holton, D. (Ed.). (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hounsell, D. (1979). Learning to learn: research and development in student learning. *Higher Education, 8*(4), 453-469.

Hähkiöniemi, M. (2006). Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(2), 170-184.

Ivarsson, J., Schoultz, J., & Säljö, R. (2002). Map reading versus mind reading. Revisiting children's understanding of the shape of the earth. In M. Limón & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change - issues in theory and practice*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Jakobsson Öhrn, H. (2001). Intentionell handlingsanalys. In O. Halldén, M. Scheja & H. Jakobsson-Öhrn (Eds.), *Intentionell analys. Forskningsrapporter från Pedagogiska institutionen, nr 65*. Stockholms universitet.

Kilborn, W. (1979). *PUMP-projektet : bakgrund och erfarenheter* Stockholm: LiberLäromedel/Utbildningsförlaget.

Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.

Lester, F. K. (Ed.). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 405-427.

Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning : en studie av kommunikationen lärare - elev och matematiklektionens didaktiska ramar* Doktorsavhandling, Göteborgs universitet.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 259-288.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3-42). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Marton, F., & Säljö, R. (1976a). On qualitative differences in learning: I.Outcome and process. *British Journal of Educational Psychology, 46*, 4-11.

Marton, F., & Säljö, R. (1976b). On qualitative differences in learning: II.Outcomes as function of the learner's conception of the task. *British Journal of Educational Psychology, 46*, 115-127.

Marton, F., & Säljö, R. (1997). Approaches to learning. In F. Marton, D. Hounsell & N. Entwistle (Eds.), *The experience of learning*. Edinburgh: Scottish Academic Press.

McCune, V., & Hounsell, D. (2005). The development of students' ways of thinking and practising in three final-year biology courses. *Higher Education, 49*, 255-289.

Meyer, J. H. F., & Land, R. (2003). Threshold concepts and troublesome knowledge: Linkages to ways of thinking and practising within the disciplines. In C. Rust (Ed.), *Improving student learning: Improving student learning theory and practice - Ten years on*. Oxford: Oxford Centre for Staff and Learning Development.

Meyer, J. H. F., & Land, R. (2005). Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning. *Higher Education, 49*, 373-388.

Meyer, J. H. F., & Land, R. (2006). Threshold concepts and troublesome knowledge. In J. H. F. Meyer & R. Land (Eds.), *Threshold concepts and troublesome knowledge* (pp. 3-18). London: Routledge.

Miller, C. M. L., & Parlett, M. (1974). *Up to the mark: A study of the examination game*. London: SRHE.

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.

Mulligan, J., & Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development: Towards integrated perspectives. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills: A phenomenographic approach*. PhD thesis, Göteborg University.

Nilsson, P. (2006). *Exploring probabilistic reasoning - A study of how students contextualise compound chance encounters in explorative settings*. PhD thesis, Växjö University.

Orton, A. (1983a). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 235-250.

Orton, A. (1983b). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 1-18.

Persson, A., & Böiers, L.-C. (2001). *Analys i en variabel*. Lund: Studentlitteratur.

Pesek, D., & Kirshner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 524-540.

Pettersson, K. (2004). *Samspel mellan intuitiva idéer och formella bevis: En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift*. Licentiatuppsats, Göteborgs universitet.

Pettersson, K. (under tryckning). Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang - En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift. *Nordisk Matematikdidaktik (NOMAD)*.

Pettersson, K., & Scheja, M. (2007). Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of calculus. *Manuscript submitted for publication*.

Piaget, J. (1980). The psychogenesis of knowledge and its epistemological significance. In M. Piattelli-Palmarini (Ed.), *Language and learning* (pp. 23-34). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Pinto, M., & Tall, D. (1999). *Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning.* Paper presented at the 23rd Conference of PME 3.

Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. *For the Learning of Mathematics, 22*(1), 2-10.

Pramling Samuelsson, I. (1983). *The child's conception of learning*. PhD thesis, Göteborg University.

Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 135-150.

Raman, M. (2004). Epistemological messages conveyed by three high-school and college mathematics textbooks. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 389-404.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Doktorsavhandling, Göteborgs universitet.

Ryve, A. (2006). *Approaching mathematical discourse: Two analytical frameworks and their relation to problem solving interactions*. PhD thesis, Department of Mathematics and Physics, Mälardalen University.

Scheja, M. (2001). Determinants of action as conceptual devices for analysing learning activities in formal educational settings. In O. Halldén, M. Scheja & H. Jakobsson-Öhrn (Eds.), *Intentionell analys. Forskningsrapporter från Pedagogiska institutionen, nr 65*. Stockholms universitet.

Scheja, M. (2002). *Contextualising studies in higher education: First-year experiences of studying and learning in engineering*. PhD thesis, Department of Education, Stockholm University.

Scheja, M. (2006). Delayed understanding and staying in phase: Students' perceptions of their study situation. *Higher Education, 52*, 421-445.

Scheja, M., & Pettersson, K. (2007a). Algoritmic understanding and threshold function: exploring students' conceptual understanding of calculus. In B. Csapó & C. Csíkos (Eds.), *Developing potentials for learning. Proceedings of 12th European Conference for Research on Learning and Instruction, Aug 28 - Sept 1, 2007, Budapest*.

Scheja, M., & Pettersson, K. (2007b). Transformation and contextualisation: exploring students' conceptual understandings of threshold concepts in calculus. *Manuscript submitted for publication*.

Schoenfeld, A. (2004). The math wars. *Educational Policy, 18*(1), 253-286.

Schwartzenberger, R. L. E., & Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82*, 44-49.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes no. 25* (pp. 25-58). Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Simpson, A. (1995). Developing a proving attitude. In *Conference proceedings: Justifying and Proving in School Mathematics* (pp. 39-46). Institute of Education, University of London.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 49-76.

Sjöberg, B. (2001). *Från Euklides till Hilbert : historien om matematikens utveckling under tvåtusen år*. Åbo: Åbo Akademis förlag.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, 404-411.

Stewart, J. (2003). *Calculus: early transcendentals* (5 ed.). Belmont: Brooks/Cole-Thomson learning.

Säljö, R. (1991). Piagetian controversies, cognitive competence, and assumptions about human cognition. *Educational Psychology Review, 3*(2), 117-126.

Säljö, R. (1997). Talk as data and practice - a critical look at phenomenographic inquiry and the appeal to experience. *Higher Education Research & Development, 16*(2), 173-190.

Säljö, R. (1999). Concepts, cognition and discourse: From mental structures to discursive tools. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 81-90). London: Pergamon.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken - ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.

Säljö, R. (2005). *Lärande och kulturella redskap : om lärprocesser och det kollektiva minnet*. Stockholm: Norstedts akademiska förlag.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1993). Solving everyday problems in the formal setting. An empirical study of the school as context for thought. In S. Chaiklin & J. Lave (Eds.), *Understanding practice: Perspectives on activity and context* (pp. 327-342). Cambridge: Cambridge University Press.

Tall, D. (1992a). Students' difficulties in calculus. In *Proceedings of Working Group 3 on Students difficulties in calculus, ICME-7, Québec, Canada* (pp. 13-28).

Tall, D. (1992b). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 229-274.

Thunberg, H., & Filipsson, L. (2005). *Gymnasieskolans mål och Högskolans förväntningar. En jämförande studie om matematikundervisningen. Rapport från Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm*. Retrieved 2007-10-14, from http://www.math.kth.se/gmhf/GMHFrapport.pdf

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A., & Wilson, J. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers*. Retrieved 2007-02-20, from http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Trankell, A. (1973). *Kvarteret Flisan*. Stockholm: P. A. Norstedt & Söners förlag.

Watson, D., Clark, L. A., & Tellegen, A. (1988). Development and validation of brief measures of positive and negative affect: the PANAS scales. *Journal of Personality and Social Psychology, 54*(6), 1063-1070.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. New York, NY: Cambridge University Press.

White, R. (1994). Conceptual and conceptional change. *Learning and Instruction, 4*, 117-121.

Williams, S. (1991). Models of limits held by college calculus students. *Journal for research in mathematics education, 22*(3), 219-236.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definition for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *Nordisk matematikdidaktik, 1*, 38-52.

Wistedt, I. (1994a). Everyday common sense and school mathematics. *European Journal of Psychology of Education, 9*, 139-147.

Wistedt, I. (1994b). Reflection, communication and learning mathematics. *Learning and Instruction, 4*, 123-138.

Wistedt, I. (1998). Assessing student learning in gender inclusive tertiary mathematics and physics education. *Evaluation and Program Planning, 21*, 143-153.

Wistedt, I., & Brattström, G. (2005). Understanding mathematical induction in a co-operative setting: Merits and limitations of classroom communication among peers. In A. Chronaki & I. M. Christiansen (Eds.), *Challenging perspectives on mathematics classroom communication* (pp. 173-203). Greenwich, CT: Information Age Publisher.

Wistedt, I., Brattström, G., & Jacobsson, C. (1993). Att använda barns informella kunskaper i matematikundervisningen. *Rapport från Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet*.

von Wright, G. H. (1971). *Explanation and understanding*. Ithaca, NY: Cornell University Press.

von Wright, G. H. (1979). The determinants of action. In H. Kohlenberger (Ed.), *Reason, action and experience. Essays in honour of Raymond Klibanshy* (pp. 107-119). Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and Instruction, 4*, 45-70.

Vretblad, A. (1995). *Algebra och kombinatorik*. Malmö: Gleerups.

Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited: On school mathematics as a situated practice*. PhD thesis, Linköping University.

Zandieh, M. (1999). The role of a formal definition in nine students' concept image of derivative. In Berenson, Dawkins, Blanton, Coulombe, Kolb & Norwood (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 136-141).

Artikel 1

Manuscript submitted for publication.

Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of calculus

KERSTIN PETTERSSON*† and MAX SCHEJA‡

†University of Skövde, School of Life Sciences,
Box 408, SE-541 28 Skövde, Sweden
‡Stockholm University, Department of Education,
SE-106 91 Stockholm, Sweden

*Corresponding author. Email: kerstin.pettersson@his.se

The study explores the nature of students' conceptual understanding of calculus. Twenty students of engineering were asked to reflect in writing on the meaning of the concepts of limit and integral. A sub-sample of four students was selected for subsequent interviews, which explored in detail the students' understandings of the two concepts. Intentional analysis of the students' written and oral accounts revealed that the students were expressing their understanding of limit and integral within an *algorithmic context*, in which the very 'operations' of these concepts were seen as crucial. The students also displayed great confidence in their ability to deal with these concepts. Implications for the development of a conceptual understanding of calculus are discussed, and it is argued that developing understanding within an algorithmic context can be seen as a stepping stone towards a more complete conceptual understanding of calculus.

Keywords: Algorithmic context; Calculus; Conceptual understanding; Higher education; Learning potentiality; Procedural knowledge

AMS Subject Classification: 97C30; 97D20; 26A06

1 Introduction

Looking across the continuously growing body of research on students' development of conceptual understanding, it is clear that relatively little effort has been put into exploring the nature of the understanding experienced by students in the course of studying. In contrast, much effort has been put into investigating students' conceptual misunderstandings and shortcomings in coming to understand scientific concepts in various disciplinary settings [e.g. 1; for an overview, see 2]. Traditionally, research on students' conceptual understanding has often focused on cognitive obstacles and misconceptions, and on how such misconceptions can be avoided and corrected [e.g. 3, 4]. However, and as far as research on mathematics education is concerned, research has also pointed up that misconceptions seem to be unavoidable and might even be necessary in developing conceptual understanding [5, 6], and so it has been argued that they make an appropriate, or at least natural, first step in understanding the more formal definition of a concept [7]. In view of this, it makes sense to view erroneous beliefs, not necessarily as errors to be avoided but rather as 'fore-conceptions' [8], which provide a basic foundation for later development of a conceptual understanding [9].

In this study we set out look for the *potentiality* in the conceptual understanding that a group of students showed as they struggled with the task of explaining the meaning of two central calculus concepts, namely limit and integral. There are a number of reasons for investigating students' understanding in relation to integrals and limits. One reason is that these concepts are 'threshold concepts' [10]. Threshold concepts have the potential to open up understanding of a topic in important ways, but students may initially find these concepts particularly difficult to grasp. Looking across the previous research on students' understandings of the concept of limit there is indeed evidence suggesting that this concept is a threshold concept [e.g. 10, 11, cf. 12]. The concept of integral is also a threshold concept. Students often experience difficulties in grasping the integral as a limit of a sum and integrals provide an important starting point for a great deal of mathematics, depending on different definitions of integral [13-15]. As most students meet threshold concepts in the course of their university studies, such concepts provide a good opportunity to explore emerging conceptual understandings among university students. Ultimately, understanding how students understand and deal with threshold concepts confronting them in a particular subject area, such as calculus, is crucial to finding ways to help students to learn more meaningfully and effectively in that subject area.

The aim of the present study is to investigate the nature of students' understandings of the concepts of limit and integral, and to discuss what this form of understanding might imply in terms of opportunities for the students developing a conceptual understanding of calculus. In what follows the theoretical background of the study will be described. This description will be followed by a presentation of methods for collecting and analysing data. Then, the results of the study will be presented, analysed and discussed in relation to on-going research in the field.

2 Theoretical background

2.1 Procedural and conceptual knowledge

In the literature an important distinction has been made between 'conceptual knowledge' and 'procedural knowledge' [16]. Conceptual knowledge has been described as being particularly rich in relationships and can be thought of in terms of a connected web of knowledge. Procedural knowledge has been defined in terms of knowledge of rules or procedures for solving mathematical problems. Early on, Skemp [17] described two types of understanding—relational and instrumental—that can be related to this distinction between conceptual and procedural knowledge. In Skemp's terminology, instrumental understanding meant having procedural knowledge only, knowing how to do something, whereas relational understanding involved knowing both what to do and why. More recently, Star [18] has scrutinised the definitions of different types of knowledge and understanding. In particular, Star argues that the popular use of the terms conceptual and procedural knowledge confounds knowledge types with knowledge qualities. Star goes on to argue that conceptual knowledge is better understood in terms of 'knowledge of concepts or principles' and that procedural knowledge should be defined in terms of 'knowledge of procedures'. Star's suggestion makes it possible to talk about rich and well-connected procedural knowledge in terms of 'deep' procedural knowledge. This perspective also makes it possible to talk about conceptual knowledge even though this knowledge may be superficial and weakly connected. In a recent study, Baroody, Feil and Johnson [19] take this argument further. They describe the progression of and relation between the different kinds of understanding and knowledge described in the research. The development of knowledge and understanding can, according to Baroody, Feil and Johnson [19] be described along a continuum. At the one end of this continuum understanding is unconnected and coupled with superficial procedural knowledge and a lack of conceptual knowledge. At the other end we find richly connected procedural and conceptual knowledge. The progression indicated by this model implies that in the beginning of the learning process the procedural and conceptual knowledge are largely unconnected, but as learning progresses they become more and more linked. The procedural knowledge is described in each developmental phase as being more complete, supporting the development of conceptual knowledge which is described as moving from a weak and unconnected schema to a strong and fully integrated schema. So, the model described by Baroody, Feil and Johnson [19] implies that procedural and conceptual knowledge represents mutually supportive aspects of learning mathematics. This stance, however, runs contrary to other research positions [e.g. 17, 20] which have emphasised that procedural knowledge often poses an obstacle for students' development of conceptual knowledge.

In this paper we look at understanding in terms of both knowing how and knowing why, that is, in terms of both procedural and conceptual knowledge, and how connected this knowledge is. In our analyses of data we have used criteria for assessing students' understandings of calculus which map onto the general model of development of knowledge and understanding described by Baroody, Feil and Johnson [19]. The criteria we have used are also in line with current research on students' conceptions of limit and integral.

2.2 Students' understandings of limit and integral

Research on students' conceptual understanding of limits suggests that to come to understand and treat a limit as an object is a formidable challenge for students [e.g. 7, 12, 14, 21-23]. The students' understanding of the concept of limit also seems to be deeply intertwined with everyday language use. The everyday meaning of the word 'limit' induces conceptions of the limit as a barrier or as the last term of a process. The students tend to restrict convergence to monotonic convergence [14], that is, restricting convergent sequences to be increasing sequences bounded above (or decreasing sequences bounded below). Limits also tend to be seen as processes performed on functions. Taking the limit is seen as evaluating the function at a sequence of points successively closer to a point of interest [7]. The dynamic element here is clear, and because the actual value of the function at the point of interest is irrelevant, the students conclude that the limit is not attained. For the students in the study reported by Williams [7] the idea of limit was closely related to points of discontinuity; taking a limit was seen as appropriate only for non-continuous functions. In a study by Oehrtman [24] students' reasoning about limits were clustered around different metaphors. These metaphors involved reasoning about limits in terms of approximation and physical limits as described above.

While there is a good deal of research on students' conceptual understanding of limits, less effort has been put into investigating students' conceptual understanding of integrals. However, a study by Orton [15] indicated that students interpret the integral as a signal to ‘do something’, as a procedure which transforms an input into some output, and it was also found that students’ technical ability could be quite strong, despite their showing minimal conceptual understanding. Apart from showing strong procedural skills the students were found to demonstrate a great reluctance to using geometric interpretations to complete an algebraic process, and when possible, the students were more inclined to move to an algebraic context [15].

Research has shown that integration in terms of a limit of sums can be difficult even for experienced students [13, 15] students may experience difficulties in understanding the relationship between a definite integral and area under a curve and sometimes integration is just seen as a rule, as anti-differentiation. For instance, students may understand that a sequence of Riemann sums consists of better and better approximations and that it is possible to go on and on and improve this approximation. Quite often, and quite rightly, students point out that such a procedure will never produce the correct answer. However, often they are unable to state that the limit would provide the answer. Thompson [25] reports on findings from a teaching experiment in which university students were encouraged to find out for themselves the relation between derivative and integral, the Fundamental Theorem of Calculus. This teaching experiment suggests that a great deal of image-building regarding accumulation, rate of change, and rate of accumulation must precede the students’ coordination and synthesis into the Fundamental Theorem.

As Artigue [14] has pointed out, in many countries students’ first contact with integrals happens in high school. Integrals are then introduced through the notion of anti-derivative and a pragmatic approach to the Fundamental Theorem of Calculus which allows the anti-derivative to be connected with the intuitive notion of area. It is not until studies at university that a theory of integration is introduced, starting with the theory of Riemann integrals. The theory of integration requires successive reconstructions of the relationships the students have with the integral concept. Research has documented the limitations of standard teaching strategies, showing that students become reasonably successful on standard tasks but have difficulty in developing a solid understanding of the topics brought to the fore in the teaching [14].

2.3 Contextualisation and learning

In any research aiming to clarify the meaning-making processes involved in student learning it is necessary to model these processes in ways that capture the complexities involved. The present study resides within a constructivist research framework which focuses on how students try to make sense of information that they are confronted with in various learning environments. Particular emphasis is put on the contextual nature of students' learning processes as learning itself is seen as involving putting bits and pieces of information into context [26]. In socio-cultural research 'context' is often used to refer to the physical or socio-cultural situation in which learning occurs [27, 28]. Here, however, and in keeping with constructivist research traditions, we will adopt a rather different view of context. It will be used to refer not to the physical or discursive situation in which students find themselves but rather to the students' personal framings or interpretations of that situation—framings within which they think about particular learning material, for instance mathematics concepts [e.g. 29, 30]. This definition of context allows analyses of students' learning processes in terms of contextualisations of information presented in a particular setting [for a more detailed account of this research stance, see 26, 31; cf. also 32]. From such a contextualisation perspective, the study of how students understand mathematical concepts will essentially become a study of how students pull together the information provided in a particular learning environment and create personal contexts for understanding that information [33-35]. So, the challenge for students will be to find ways of contextualising the learning material which render it meaningful, while simultaneously meeting the demands of the teaching-learning environment [36].

3 Method

3.1 Data collection

Data were collected in a class of undergraduate engineering students at a medium sized Swedish university college. The students (N = 20) were, at the time of the data collection, taking a basic course in calculus, which introduced the typical calculus concepts such as limit, derivative and integral. The textbook used in the course was Calculus, early transcendentals, by Stewart [37]. At the end of the calculus course, just before the exam, the students were asked to reflect in writing on their own understandings of the concepts of 'limit' and 'integral'. More precisely, the students were asked to explain in writing, as clearly as possible, the meaning of those concepts by two questions phrased as follows: "Please, explain as clearly as possible the meaning of the mathematical concept [limit/integral]". The students were also asked to rate their own understanding of these concepts in terms of "poor", "less well", "neither poor/good", "good", or "very good". In addition they were asked whether they would be willing to participate in a subsequent interview to discuss their understandings of the two concepts. Five of the students volunteered to take part in the interview, and ultimately four[1] students—two women and two men—were interviewed. Moreover, and importantly, the students were informed that participation in the study was optional and formed part of a research project focusing on mathematical understanding, and had nothing to do with their approaching calculus exam. The students were also informed that any information conveyed (in writing or in the interview) would be dealt with in a way which would inform and enrich the research process, but without jeopardising the personal integrity and identities of those involved.

The individual interviews were conducted only a few days after the students had produced their written accounts. Each interview lasted 30-40 minutes and involved questions probing the students' understandings of the two concepts, but also questions about how the students usually set about their everyday studying. Both authors were present during the interviews. One of the authors—with formal training in mathematics—asked questions pertaining to the mathematical concepts and the students' interpretations of those. The other author—an educationalist—focused on questions relating to how the students usually set about their everyday studies. The interviews were, with the students' informed consent, audio recorded and later transcribed in full.

3.2 Data analysis – written accounts

The first step in analysing the written accounts involved assessing the students' understandings of the two concepts on the basis of the written reflections they had provided. Drawing on previous research [12, 15, 19, 38, cf. 39], assessment criteria were constructed to enable an initial categorisation of the data, focusing on the qualitative differences in conceptual understanding revealed by a close reading of the students' written accounts [cf. 40; see also 41]. As is usual in this type of classification, formal considerations were regarded as an indication of the existence of a more sophisticated understanding matching the learning outcomes usually sought after in the teaching. The notion of integral can be seen as harbouring two concepts: the concept of definite integral (area) and the concept of indefinite integral (anti-derivative). The explanation in writing just asked the students to demonstrate their understandings of 'integral' and so the students' answers could have been given with just one of these aspects in mind. However, the criteria were designed so as to assign a more sophisticated understanding to an answer showing both aspects, thus indicating a broader conceptual understanding of integral [cf. the developmental pattern sketched by 19]. It is also worth mentioning that none of the students seemed surprised at the way the question was phrased,

[1] One of the students fell ill and had to cancel his participation in the study.

which would suggest that the dual meaning of integral did not stand out as a problem for the students. The ratings of the students' understandings were done along a scale ranging from 0 to 5 according to the criteria specified in Table 1.

Table 1. Criteria for rating the students' questionnaire answers

Concept	Rating	Criteria
Limit	0	Does not include anything of relevance for the mathematical concept
	1	Just occasional examples
	2	Describes limit as a process
	3	Describes limit as an object
	4	Describes limit as both a process and an object
	5	Includes formal considerations e.g. the concept definition in some way
Integral	0	Does not include anything of relevance for the mathematical concept
	1	Just occasional examples
	2	Describes one of the aspects area or anti-derivative
	3	Describes both of the aspects area and anti-derivative **or** the aspects of area and the estimation of the area by dividing into strips
	4	Describes both the aspects area and anti-derivative and gives an indication of the definition (Riemann sum/limit)
	5	Includes formal considerations e.g. the concept definition in some way

Of course, using such a criteria-based assessment of the students' understandings necessarily introduces a normative aspect into the research, which allows an initial grading of the students' performances against a set structure. This procedure is common practice in mathematics teaching, where formal treatment is often seen as an important learning goal for students. However, it is important to remember that this initial evaluation of the students' understandings drew on what the students had put down in writing, and so might have failed to capture the full range of their understanding—an understanding which potentially goes beyond what the students thought was necessary to put down in writing to meet with the perceived demands of the situation in hand.

To enrich this initial picture of the students' understandings, in-depth analyses of the interviews were carried out to procure a more fine-grained picture of individual students' understandings of the two concepts.

This more particularised analysis makes it possible to supplement some of the students' written explanations, and—given the assumption that the students in fact made an effort to explain their understandings of the two concepts—arrive at a more complete depiction of the nature of the students' understandings of these concepts.

3.3 Data analysis – interviews

The analysis of the interview data drew on the intentional approach to learning and meaning making developed in research on learning and conceptual change in school and higher education [26, 33, 42-44]. An analysis based on such an intentional approach focuses on the students' activities in terms of intentional action. As outside observers, we do not have direct access to the students' intentions so we have to infer them by viewing the observed activities from a perspective which renders them meaningful. To adopt such an intentional perspective is to view social and communicative behaviour in terms of some purpose of the acting person to achieve a goal. By analysing what the students say or do in a particular situation, with a focus on how they approach and understand a particular learning task or a piece of information we gain a picture of the students' perceptions of the situation at hand, and what they are trying to achieve. Intentional analysis, by virtue of its focus on individual students' ways of reasoning in relation to a particular task or a particular learning environment, helps us to understand what the students take for granted, what they hold true or commit themselves to. In the present study, the analysis of the interview data focused on the students' personal interpretations of the two concepts. In particular, the analysis sought to describe the nature of the students' conceptual understanding in terms of how the students viewed these concepts as aspects of a wider context for learning calculus.

3.4 A brief description of the course setting

Apart from interviewing the students about their understandings of integral and limit, an attempt was made to obtain information on how the students had been introduced to the topic of calculus. The teaching in the calculus course was organised around lectures and tutorials. The lectures were based on the textbook used in the course, and served to introduce the class to central calculus concepts. The tutorials encouraged the students to do tasks and to write summaries of the text. As mentioned earlier, the textbook used was *Calculus, early transcendentals*, by Stewart [37]. This book first provides a definition of the concept of limit, expressing it in a less formal way:

> The limit of *f(x)*, as x approaches a, equals L if we can make the values of *f(x)* arbitrarily close to L (as close as we like) by taking x to be sufficiently close to a (on either side of a) but not equal to a. [37, p. 93]

Later in the book, the ε, δ -definition is introduced in a special section under the heading 'The precise definition of a limit'. The chapter 'Integrals' starts out with a section where the problem of computing the area under the graph of a function is studied by dividing the area into strips. The next section gives a definition of the definite integral:

> If f is a continuous function defined for $a \le x \le b$, we divide the interval $[a,b]$ into n subintervals of equal width $\Delta x = (b-a)/n$. We let $x_0(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ be the endpoints of these subintervals and we let $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ be any sample points in these subintervals, so x_i^* lies in the ith subinterval $[x_{i-1}, x_i]$. Then the definite integral of f from a to b is $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$. [37, p. 380]

In a note there is a comment on the existence of such a sum: 'Because we have assumed that f is continuous, it can be proved that the limit in [the definition] always exists and gives the same value no matter how we choose the sample points x_i^*' [37, p. 381] . There is also a note saying that the limit exists even if f has a finite number of removable or jump discontinuities. Preceding this chapter on integrals is a chapter on applications of differentiation which includes a section specifically treating the anti-derivative of a function. This particular section does not use the notion of indefinite integral, but that notion for the anti-derivative is used and discussed later in the chapter on integrals. The connection between integral and area is stated in the 'Fundamental Theorem of Calculus' but there is no explicit discussion about the concept of area. An interpretation of the view communicated in the textbook is that area is defined by the integral.

4 Results

4.1 Written accounts

The result of the analysis of the students written accounts according to the criteria specified in Table 1 is presented in Table 2. As can be seen in the table there was nobody who included formal considerations of the concepts.

Looking at the students' view of their own understanding of the concepts it is clear that most of the students saw themselves as having a rather good understanding of the concepts (see Table 3).

Table 2. Rating of the students' understandings of limit and integral, number of students for each rating (N=20)

Rating	0	1	2	3	4	5
Limit[2]	2	5	8	3	1	-
Integral[3]	-	10	7	2	-	-

Table 3. The students' ratings of their own understanding of limit and integral, number of students for each rating (N=20)

Rating	'Poor'	'Less well'	'Neither poor/good'	'Good'	'Very good'
Limit	2	3	6	7	2
Integral	1	3	5	9	2

Of course, the criteria used to rate the students' understandings (see Table 1) as these understandings were expressed in the written accounts, may differ from the largely implicit grounds on which the students rated their own understandings of the two concepts. The general pattern emerging from a comparison between the students' own ratings of their understandings and the external ratings presented in Table 2 indicates a positive bias in the students' self-conceptions of their own understandings of the two concepts—a bias which, incidentally, is not uncommon among students in higher education [45]. While these ratings provide some information about the varying degrees of conceptual understanding perceived by the students themselves, and assessed by formal criteria, they reveal little about the nature of this understanding and its implications for the students' learning. To explore this particular dimension we will have to turn to the more fine-grained data offered by the individual interviews.

4.2 The student interviews – a thematic overview

For the purposes of this study, we will concentrate on two interviews, presenting them as two individual cases which illustrate observations that

[2] One of the students did not answer the question.
[3] One of the students did not answer the question.

were made in all four interviews. First, an overview will be provided of the two students' written explanations, and this will be followed by a presentation and an analysis of the interview results.

Philip, aged 19, is a first-year student enrolled in an educational program combining engineering studies with a teacher training course. Philip rated his own understanding of limit as 'good'. In explaining his view on the concept of limit he wrote:

'Limit is the value a function should get at a certain data input. For example, you can't divide by zero, but sometimes there is a value which the function 'should get' for that value, a function where the graph has a "hole" you should be able to figure out which value should be at that hole.'

In his written account Philip also gave an example, drawing a figure showing the line $y = 4$ with a 'hole' for $x = 1$ and commenting: '*There should be a point at* $x = 1$ *which takes the value 4*'. As can be seen from the quote, this explanation suggested that limit was to be viewed, not in terms of a process, but rather as something that fills out a 'hole', that is, the limit is an object. An assessment of Philip's understanding of limit, based on what he had put down in writing, and according to the criteria specified in Table 1, yields a rating of 3 ('*Describes limit as an object*').

Philip rated his own understanding of integral as 'very good'. In accounting for the meaning of the concept of integral, he wrote:

'An integral of a function is a function whose derivative is the first function. For example $\frac{x^2}{2}$ *is an integral of x since the derivative of* $\frac{x^2}{2} = \frac{2x}{2} = x$ *'*

An assessment of Philip's understanding of integral, based on what he had put down in writing, and using the criteria specified in Table 1, gives him a rating of 2 ('*Describes one of the aspects area or anti-derivative*').

Victor, aged 34, is an undergraduate student enrolled in an environmental engineering program. Before enrolling at this program, he had previously finished a nursing degree. At the time of the data collection Victor was in his second year of engineering studies and had taken an introductory course in mathematics. Victor rated his understanding of the concept of limit as 'neither poor nor good', and in explaining his view on the concept of limit he wrote:

'You search for a value (if there is a value) of a variable that approaches the defined limit (could be a (+/-) value or infinity (+/-).'

An assessment of his written account, using the criteria specified in Table 1, yields a rating of 2 (‘*Describes limit as a process*’).

Victor rated his own understanding of integral as ‘good’. In the questionnaire he put down the following explanation:

‘Sum of areas under and between functions between the definition interval (the smaller Δx the better approximation of areas)’

An assessment of Victor’s understanding of integral, based on what he had put down in writing, and using the criteria specified in Table 1, yields a rating of 3 (‘*Describes both of the aspects area and anti-derivative* ***or*** *the aspects of area and the estimation of the area by dividing into strips*’).

4.2.1 The students’ understandings – a first glance

A close reading of the student interviews makes it clear that a recurring theme throughout is the lack of connections made between the calculus concepts involved. In the interviews the students mention just a few connections to other concepts and these are only brought to the fore in direct response to specific questions asked in the interview. By way of illustration, in being asked about existing connections between limits and other mathematical concepts, Philip talks about using limits to define a derivative but seems disinclined to elaborate more on this connection: ‘*…[Sigh] What I think about is derivatives because you use limits to define a derivative. I haven’t thought more about it than that … I’ve only used limit to do that. But…I’m not sure…*’ Apart from mentioning that limits may be used to define a derivative Philip makes no other connections between limit and other mathematical concepts during the interview. Another example which serves to illustrate the lack of connections between the calculus concepts was found in Philip’s accounting for connections to the concept of integral. Initially, this leads him to touch briefly on the topic of area but then he seems to be moving into a quagmire of uncertainty unable to elaborate on this connection, or any other existing relations to integral: ‘*I’m thinking of course of finding the area under graphs and things like that…because you then use integral… but… I can’t think of anything else, specific…*’

A similarly fragmented pattern emerged in analysing the other interviews. For instance, looking at the interview with Victor, in being asked to make connections between limit and other mathematical concepts he responds by partially making a connection to the symbol for limit rather than to other concepts: ‘*It is lim… yes, lim when some variable approaches a specific value*’.

Victor could not give any definition of limit, and in the interview he pointed out that he usually has difficulty remembering definitions, and that he often puts more effort into how to solve problems: ‘*…It is difficult* *to remember things….it is just as when I solve mathematics, I don't drum things in, I try to understand the connected whole, …how you solve things. That's the way I learn and remember things. So, unfortunately, I don't usually learn definitions by heart…*'

Victor also connected limit to the concept of asymptote but this was the only conceptual connection he made in relation to the concept of limit. Looking at Victor's understanding of integral, he seemed to strongly connect it to area, and he gave an illustration by drawing a picture of an area divided into strips: '*You often mean the area under the function, defined between the interval a and b…a and b are real numbers, plus or minus. Yeah, so…integral is the area. And when you compute the area you often…you get an approximation. You take…because it gives a good approximation…the smaller strips [the better]. The area is the base times the height and the smaller the base or height or whatever, the better the approximation.*'

Viewing this method of dividing the area into strips as an approximation, Victor stated that this method was for explanation and understanding rather than for solving problems. To compute an integral, he explained, you use the anti-derivative: '*[Dividing the area into strips] is just to explain it. [To compute the integral] you use the derivative, the anti-derivative of a function […] you use the anti-derivative of the function to get [the integral]*'

However, Victor seemed to have difficulty in grasping the linkages between 'computing' the integral by using the anti-derivative and 'explaining' the concept by using the illustration of an area divided into strips. It was clear that he viewed them as separate phenomena, distantly related but still disjointed—a disjointing which again serves to illustrate an apparent fragmentation in the students' understanding of calculus.

So far, the students' written accounts and their oral expansions of these accounts in the interviews, demonstrate a rather fragmented conceptual understanding of limit and integral. The students typically seem to rely on ways of thinking which focuses on different conceptual aspects in isolation, rather than on possible interconnections and the integration between different aspects into an organised whole. Even though Victor, for instance, stressed that he tried to understand the 'connected whole' of what he was learning, his accounts testified to a rather patchy view of connections between limit and other mathematical concepts, and also revealed a strong preference for learning how to solve problems rather than thinking about the function and nature of concepts: '*I [focus on] how to solve problems […] I try to understand and apply. I don't go around mulling over why it's one way or the other.*'

Looking at how the students articulated their understanding of the two concepts it was clear that they seemed to be thinking about limit and integral primarily in algorithmic terms—as frames or forms for carrying out certain procedures. This procedural focus came through clearly in the students' reflections on how limit and integral were connected to other mathematical concepts. Philip, for instance, explained the connection between integral and area mainly as one of 'using' integral to finding the area. '*You find the area under the graph by using the integral, because…well [there is] a formula [but] I don't know it off-hand.'* This pronounced procedural focus was also illustrated in an earlier extract from the same interview, when Philip said that '*you use limits to define a derivative. I haven't thought more about it than that … I've only used limit to do that*'.

Victor, in expressing his understanding of limit, testified to a similar procedural focus, first in his written account saying that: '*You search for a value (if there is a value) [---]*' and then, in being asked to explain what he meant by the parenthesis ('if there is a value'), stressing that '*sometimes it's not possible [for me] to solve…*' and so '*[the limit] doesn't exist*'. So, for Victor, the very existence of limit seemed contingent on whether or not it was possible for him to solve the problem in hand—a pragmatic view which was repeatedly brought to the fore in the interview.

Moreover, neither of the students could give complete formal definitions of the two concepts, although they did formulate personal accounts relating to the definitions of these concepts. Similar to the students' accounts in general, these definition type accounts seemed to be of an algorithmic nature, that is, they typically emphasise the algorithmic aspects of the concepts and show a strong connection to how the concepts are used in problem solving. A comment from Philip, being asked to expand on his written explanation of limit, may serve as an illustration of this procedural emphasis. The following quotation from the interview illustrates how he defined limit in terms of procedure: '*It is a value which it tries to get closer to…when it gets closer to a certain data input, it gets closer to a specific value, but if you just…put that data in that you're trying to get closer to, you get…then you don't get a value. It's, sort of, the value that you should get there.*'

To recap, looking at the interviews, the students' conceptual understanding of integral and limit may at first glance be described as fragmented; it emerges as a loosely woven structure of descriptive and explanatory accounts, lacking in definition and with few, if any, connections are being made between the calculus concepts involved. So, it is easy to get the impression that the students' understandings are all about fragmentation and form, characterised by a pronounced procedural focus on solving tasks.

4.2.2 The students' understandings – an alternative view

However, a closer look at the interview data, and in particular on how the students dealt with questions posed in the interview, makes it clear that this initial picture of the students' understandings as exclusively fragmented, merits a more nuanced commentary. More specifically there are instances in the interviews where the students, prompted by probing questions from the interviewers, touch on issues which seem to lead them to think about topics that they previously have not considered. For instance, Philip was asked about whether all integrals could be seen as areas and vice versa. He said he did not know for sure, and that was why he had refrained from mentioning anything about this issue in his written account. However, he subsequently started to think about this topic in a way which indicated he found it quite challenging:

I: *Are all integrals areas and are all areas integrals?*
Philip: *No.*
I: *Can you say a bit more about it? When, for instance, is it impossible to use an integral to compute the area…?*
Philip: *It's when the integral…to take an example, if you…or yeah, maybe so. If you have a …if you have, like, a broken graph or something… But then again, you could calculate with that…and find the different areas and then add them together. I have to think about whether you can do that for all integrals. I've never thought about that before...*

Although Philip did not pursue this line of reasoning it was clear that the topic brought up by the interviewer sparked ideas about the relationship between area and integral which previously Philip had not considered and which made him reflect on this issue from a new angle. At first, Philip adamantly replies that integral and area are not the same thing. His utterance '*It's when the integral…*' suggest the view that not all areas can be computed with the help of integrals. When he goes on '*to take an example, if you…or yeah, maybe so. If you have a broken graph or something ... But then again, you could calculate with that…*' it is clear that Philip, unsuccessfully, tries to find examples illustrating his point. After a couple of attempts he suggests the notion of '*a broken graph*', but in trying to explain that the integral of such a function cannot be computed, he comes up with a counter argument: '*you could calculate with that…and find the different areas and then add them together*'. Philip moves from adamant to wavering in his position with regards to the relationship between area and integral. He realises that he has not previously thought about the possibilities and limitations of the use of integrals. The interviewer's probing questions pose a challenge for his procedural understanding of the concepts in question, and it is clear from his way of reasoning that the discussion has sparked his interest in the topic and so has opened up an area for conceptual reflection.

A similar instance of how probing questions made the students extend their reflection on mere procedural dimensions to include conceptual topics that they had not previously considered was shown in the interview with Victor, who was asked to comment on the summation of areas as an approximation of the integral, and ended up talking about infinity:

I: *Okay, you've written the smaller delta x the better the approximation.*
Victor: *Mm…*
I: *Mm…but is it always an approximation?*
Victor: *Yeah, it's an approximation. Because…the function is not a straight line, so you can't…compute as with a rectangle…there are lines…[if] the distances are straight and stuff, you can measure them. But the function bends, it goes up or down, and then you've got to make approximations all the time.*
I: *So, you can never get the exact, precise area under the [curve]?*
Victor: *No, not according to the definition, but apparently if you make really, really small…*[draws very thin stripes under the function]...
I: *…delta x*
Victor: *…delta x, until infinity, that would be the best approximation there is.*
I: *Mm…if you do that infinitely?*
Victor: *Yeah, then you take delta x. […] …it's infinitely…I mean it's so tiny that it's almost impossible to see…it's nano-metres, no it's micro nano…scales…*

Victor brings to the discussion part of the definition of integral, namely the summation of rectangles. Victor is aware of the process of choosing smaller and smaller rectangles to reach a better and better approximation. If the function is piecewise linear one can arrange the division of intervals so that such a summation can be used to compute the exact value of the area. However, this does not apply to curves in general. Victor refers to the definition, but from his comments we can see that he is only talking about the summation of rectangles. Clearly, he views the definition as a process or movement through which thinner and thinner strips provide better and better approximations of the area. Victor has, however, not realised that the definition uses the power of a limit to bring about transfer from approximation to an exact value. But when the interviewer poses probing questions Victor discovers that there is something missing. He knows ('*but apparently, if you…*') that there is an absolute, exact, best value. From his facial expression and other non verbal communication cues it is clear that he is bothered by the situation, but continues to work hard to argue for the notion of the integral as an approximation. In doing so, he refrains from talking about the exact value, and talks instead about the 'best approximation' which you obtain if you take an infinite number of really thin strips, so thin that they are impossible to see with the naked eye: '*I mean it's so tiny that it's almost impossible to see…it's nano-metres, no it's micro nano…scales…*'. Judging from the eagerness with which Victor explains his thinking, drawing a picture to clarify his way of reasoning, the question of viewing the summation of areas as an approximation of the integral clearly brings to the fore ideas which he finds both exciting and conceptually challenging.

Previous research [e.g. 33, 42] has shown that students tend to find ways of *contextualising* learning material which may at first appear peculiar but which may nevertheless enable the students to deal quite successfully with learning tasks confronting them in various teaching-learning environments. The students involved in the present study gave accounts testifying to a fragmented understanding, and that they understood the two concepts mainly in terms of procedures to be carried out. However, just to say that the students' understanding was fragmented and procedural would be a simplification. Rather, the results suggest that the students were communicating their understanding of limit and integral within an *algorithmic context* in which the very 'operations' of these concepts, were seen as defining features and a basis for understanding those concepts. As shown in the extracts above, the students mainly talk about limit and integral in terms of how to use these concepts as tools to reach a certain end, thus leaning toward what Skemp [17] would call 'instrumental understanding', and Star [18] 'procedural knowledge'.

Here, we use the notion 'algorithmic context' to describe the students' personal framings of calculus because we wish to point up that pursuing studies within such a context for interpretation—within which the procedural aspects of studying and learning are brought to the fore—seems to be functional, like an algorithm following a step-by-step procedure for coping with a problem in a finite number of steps. However, the fact that an algorithmic contextualisation of calculus foregrounds procedural aspects does not mean that the conceptual aspects go out the window. Rather, and as Baroody, Fein, and Johnson [19] have stressed, knowledge building involves an interplay between procedural and conceptual dimensions. Consequently, procedural knowledge, that is, knowledge of rules or procedures for solving mathematical problems [18], which in the present study has been shown to guide students' efforts within an algorithmic contextualisation of calculus, may potentially facilitate conceptual insight.

Moreover, and importantly, in considering the students' oral accounts more closely, it was also observed that the way in which the students tackled questions posed in the interview would lead them to address topics that they previously had not considered in relation to their calculus studies. As illustrated by the excerpts provided earlier, such instances prompted the students to think about these unfamiliar topics in terms that would suggest that they experienced an emerging awareness of areas in need of elaboration and reflection. From these and similar passages in the interviews an alternative picture of the students' understandings emerge—a picture which suggests, not merely fragmentation but also a potential for conceptual reflection and elaboration.

Another observation to be made in relation to the results presented here has to do with the apparent confidence with which the students dealt with the challenge of explaining the two concepts. Both their self-assessments of their own understanding of limit and integral, and their ways of talking about these concepts in the interview, suggest that the students were quite sure of their own knowledge of calculus. Philip, for instance, on being asked whether he felt prepared for the upcoming exam, calmly said he hoped that he had a good grasp of everything. '*Of course I'll do a lot of exercises and stuff [in preparing for the exam] but I don't think I…I don't think it'll be that much of a change [in my understanding], it's more about going through what you've done before so you know that you really know everything*'. Victor made remarks along similar lines, saying he felt that he was doing quite well, '*At least so far, judging from the mark I got on the basic math course, so…*'. So, despite the fact that their understanding of the two concepts could be described as algorithmic rather than conceptual in character, the students themselves seemed unperturbed by any potential shortcomings in their conceptual understanding of limit and integral. We would argue that this positive self-confidence is functional for students who are pursuing their studies within a teaching-learning environment that puts distinctive requirements on how to demonstrate understanding in relation to particular tasks. Recent research on student learning in higher education [e.g. 46] illustrates that different academic disciplines have their distinctive ways of thinking about, presenting and representing conceptual understanding, and that successful studying is not merely a question of developing such understanding, but of adjusting to the discipline specific 'received notion' of what it means to understand and demonstrate understanding in the subject area. The algorithmic context that we have suggested works as a frame for the students' understanding seems to provide the students with all the necessary procedures and routines that are needed to cope efficiently with the learning tasks that they are confronted with. So perhaps it is only to be expected that the understanding following from such an algorithmic contextualisation should be coupled with a certain degree of self-confidence.

5 Discussion

The precedence of procedure and function over in-depth conceptual understanding has often been discussed as a problem in need of instructional solution [e.g. 14]. Consequently, much of the research on student learning—not only in mathematics education [e.g. 7, 12, 23] but also in the broader field of science education [see 2]—has been aimed at identifying and correcting students' misconceptions or misunderstandings of concepts. The present study was designed to emphasise the potentiality, rather than fallibility, of students' efforts to understand calculus.

Recognising such potential requires an effort to see past the students' non-standard interpretations of the concepts. Instead of treating the students' idiosyncratic accounts as misconceptions we side with Oehrtman, in looking for 'the roots of growth toward a future, deeper understanding' [24, p. 148].

For teachers, an awareness of the interplay between students' contextualisations and conceptual understanding is crucial to finding ways to help students to learn more meaningfully and effectively in any particular subject area. The fact that students sometimes tend to rely on techniques that serve their immediate interest of coping with a particular learning task, or passing an exam, does not necessarily prevent them from developing a solid conceptual understanding. To focus solely on the procedural aspects of a concept might, of course, delay a more complete conceptual understanding [cf. 44, 47] but there is reason to believe that true conceptual understanding of a subject-matter comes gradually [19, 48, 49]. We would argue that students who develop their understanding of calculus using an algorithmic context of interpretation do so, not because of a misconception, but because it is functional for them and enables them to deal pragmatically and often successfully with learning tasks that they are confronted with in teaching and in exams [50-52].

The process of developing an understanding of, for instance, integral and limit, involves building up a context for 'provisional understanding' of those concepts [cf. 53], which provides a framework for future studying and potential learning. The potentiality for conceptual understanding lies in the students' realisation of the provisional character of their algorithmic understanding, and in their willingness to expand their contextualisations of the two concepts to allow links to be made between different procedural and conceptual dimensions of these concepts. Self-confidence in one's own ability in the subject area might play an important part in this endeavour, but more importantly the students must become aware that there exist an interplay between several contexts for interpretation, which bring to the fore not only procedural but also conceptual aspects of the learning material in hand.

In exploring the students' understandings of the concepts of limit and integral, we have found that students were reflecting on the two concepts within an algorithmic context for interpretation, emphasising procedures and techniques for problem solving, rather than pointing up conceptual connections between concepts. However, a more fine-grained analysis of the students' ways of reasoning also revealed an awareness of conceptual areas in need of further elaboration and reflection, hinting at a potential for developing conceptual understanding, and for linking procedural and conceptual aspects of the concepts involved. The contribution of this study to the broader research on student learning in mathematics lies in the explicit connection between students' efforts to understand concepts and the wider context within which these efforts are made. From a normative standpoint, merely focused on assessing the students' understandings, the students' explanations may appear to be fragmented and mainly procedural in character. However, this study suggests that the students' understandings of limit and integral may in fact form part of a wider algorithmic contextualisation, which can provide a stepping stone towards a more complete and full understanding of calculus.

Instead of putting the students' ways of reasoning into question, this study has tried to put them into context, pointing up the impact that students' contextualisations of learning material may have on their emerging conceptual understanding. Adopting a view on student learning which emphasises potentiality rather than fallibility has important implications for teaching. From such a perspective, guiding students' efforts to develop conceptual understanding of calculus does not mean accepting or ignoring apparent mistakes or misconceptions; it means taking them seriously enough to look for ways to help students extend and develop these efforts within contexts that allow important aspects of concepts to be recognised as crucial ingredients in understanding those concepts. Such a perspective, which reveals students' ways of contextualising concepts and learning tasks, enables teachers to engage, not only with students but also with students' efforts to understand. In that sense it also provides a crucial pathway for linking the students' provisional understandings to ways of thinking endorsed within the discipline.

6 Authors' Notes

The authors wish to thank the Network for learning in mathematics, natural sciences and engineering at Stockholm University, Department of Education for valuable feedback on an earlier version of this paper. We owe special thanks to Professors Inger Wistedt, Mats Andersson, Noel Entwistle, and Dr Andreas Ryve, for their helpful comments and suggestions which led to many improvements. Financial support for this research was made possible through a grant to Kerstin Pettersson from the Swedish National Graduate School in Mathematics Education funded by the Bank of Sweden Tercentenary Foundation and grants to Max Scheja from The Swedish Research Council's Committee for Educational Sciences.

References

[1] Driver, R. and Easley, J., 1978, Pupils and paradigms: A review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education*, **5**, 45-70.

[2] Duit, R., 2006, *Biography - STCSE. Students' and Teachers' Conceptions and Science Education.* Leibniz Institute for Science Education at the University of Kiel, Available online at: http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/stcse/stcse.html (accessed 6 Sept 2007).

[3] Driver, R. and Erickson, G., 1983, Theories in action: Some theoretical and empirical issues in the study of student's conceptual frameworks in science. *Studies in Science Education*, **10**, 37-60.

[4] Nussbaum, J. and Novick, S., 1982, Alternative frameworks, conceptual conflict and accommodation: towards a principled teaching strategy. *Instructional Science*, **11**, 183-200.

[5] Davis, R.B. and Vinner, S., 1986, The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, **5**(3), 281-303.

[6] Tall, D., 1993, Students' difficulties in calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students difficulties in calculus, ICME-7, Québec, Canada, 1992*, p. 13-28.

[7] Williams, S., 1991, Models of limits held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, **22**(3), 219-236.

[8] Sierpinska, A., 1992, On understanding the notion of function. In: G. Harel and E. Dubinsky (Eds.) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes no. 25* (Washington D.C.: Mathematical Association of America), p. 25-58.

[9] Berger, M., 2004, The functional use of the mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics*, **55**, 81-102.

[10] Meyer, J.H.F. and Land, R., 2005, Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning. *Higher Education*, **49**(3), 373-389.

[11] Meyer, J.H.F. and Land, R. (Eds.), 2006, *Threshold concepts and troublesome knowledge*. (London: Routledge).

[12] Cornu, B., 1991, Limits. In: D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers), p. 153-166.

[13] Artigue, M., 1991, Analysis. In: D. Tall and S. Vinner (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers), p. 167-198.

[14] Artigue, M., 2001, What can we learn from educational research at the university level? In: D. Holton (Ed.) *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers), p. 207-220.

[15] Orton, A., 1983, Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, **14**, 1-18.

[16] Hiebert, J. (Ed.) 1986, *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. (Hillsdale, N.J.: Erlbaum).

[17] Skemp, R., 1976, Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, **77**, 20-26.

[18] Star, J., 2005, Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **36**, 404-411.

[19] Baroody, A., Feil, Y. and Johnson, A., 2007, An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **38**(2), 115-131.

[20] Pesek, D. and Kirshner, D., 2000, Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, **31**, 524-540.

[21] Ferrini-Mundy, J. and Graham, K., 1994, Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. In: J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.) *Research issues in mathematics learning, preliminary analyses and results. MAA notes no. 33* (Washington: The mathematical association of America), p. 31-45.

[22] Juter, K., 2006, Limits of functions: University students' concept development. PhD thesis, Luleå University of Technology.

[23] Przenioslo, M., 2004, Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, **55**, 103-132.

[24] Oehrtman, M.C., 2002, Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and other Student Metaphors for Limit Concepts: An Instrumentalist

Investigation into Calculus Students' Spontaneous Reasoning. PhD thesis, University of Texas.

[25] Thompson, P.W., 1994, Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, **26**(2-3), 229-274.

[26] Halldén, O., Scheja, M. and Haglund, L., 2007, The contextuality of knowledge. An intentional approach to meaning making and conceptual change. In: S. Vosniadou (Ed.) *Handbook of research on conceptual change* (London: Taylor & Francis).

[27] Resnick, L., 1989, Introduction. In: L. Resnick (Ed.) *Knowing, learning, and instruction* (Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum), p. 1-24.

[28] Resnick, L., Säljö, R., Pontecorvo, C. and Burge, B. (Eds.), 1997, *Discourse, tools and reasoning. Essays on situated cognition.* (Berlin, Heidelberg: Springer).

[29] Cobb, P., 1986, Context, goals, beliefs, and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **6**(2), 2-9.

[30] Cobb, P., 1990, Multiple perspectives. In: L.P. L. P. Steffe and T. Wood (Eds.) *Transforming children's mathematics education* (Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum), p. 200-215.

[31] Ryve, A., 2007, What is actually discussed in problem-solving courses for prospective teachers? *Journal of Mathematics Teacher Education*, **10**(1), 43-61.

[32] Booth, S., Wistedt, I., Martinsson, M. and Marton, F., 1999, Paths of learning. The joint constitution of insights. In: L. Burton (Ed.) *Learning mathematics. From hierarchies to networks* (London: Falmer Press), p. 62-83.

[33] Halldén, O., 1999, Conceptual change and contextualization. In: W. Schnotz, S. Vosniadou and M. Carretero (Eds.) *New perspectives on conceptual change* (Amsterdam: Pergamon Elsevier.), p. 53-65.

[34] Wistedt, I., 1994, Everyday common sense and school mathematics. *European Journal of Psychology of Education*, **9**, 139-147.

[35] Wistedt, I., 1994, Reflection, communication and learning mathematics. *Learning and Instruction*, **4**, 123-138.

[36] Wistedt, I., 1998, Assessing student learning in gender inclusive tertiary mathematics and physics education. *Evaluation and Program Planning*, **21**, 143-153.

[37] Stewart, J., 2003, *Calculus: early transcendentals*. 5 ed. (Belmont: Brooks/Cole-Thomson learning.).

[38] Sfard, A., 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1-36.

[39] Marton, F. and Booth, S., 1997, *Learning and awareness.* (Mahwah, NJ: Erlbaum).

[40] Van Rossum, E.J. and Schenk, S.M., 1984, The relationship between learning conception, study strategy and learning outcome. *British Journal of Educational Psychology*, **54**, 73-83.

[41] Dahlgren, L.-O., 1997, Learning conceptions and outcomes. In: F. Marton, D. Hounsell and N. Entwistle (Eds.) *The experience of learning* (Edinburgh: Scottish Academic Press), p. 23-38.

[42] Wistedt, I. and Brattström, G., 2005, Understanding mathematical induction in a co-operative setting: Merits and limitations of classroom communication among peers. In: A. Chronaki and I.M. Christiansen (Eds.) *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication* (Greenwich, CT: Information Age Publish), p. 173-203.

[43] Ryve, A., 2006, Making explicit the analysis of students' mathematical discurses - Revisiting a newly developed methodological framework. *Educational Studies in Mathematics*, **62**(2), 191-210.

[44] Scheja, M., 2002, Contextualising studies in higher education. PhD thesis, Department of Education, Stockholm University.

[45] Ehrlinger, J. and Dunning, D., 2003, How chronic self-views influence (and potentially mislead) estimates of performance. *Journal of Personality and Social Psychology*, **84**(1), 5-17.

[46] Entwistle, N., 2005, Learning outcomes and ways of thinking across contrasting disciplines and settings in higher education. *The Curriculum Journal*, **16**, 67-82.

[47] Scheja, M., 2006, Delayed understanding and staying in phase: Students' perceptions of their study situation. *Higher Education*, **52**, 421-445.

[48] Perry, W.G., 1970, *Forms of intellectual and ethical development in the college years: a scheme.* (New York: Holt, Rinehart & Winston).

[49] Perry, W.G., 1988, Different worlds in the same classroom. In: P. Ramsden (Ed.) *Improving learning. New perspectives* (London: Kogan), p. 145-161.

[50] Hähkiöniemi, M., 2006, Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. *Journal of Mathematical Behavior*, **25**(2), 170-184.

[51] Lithner, J., 2004, Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, **23**, 405-427.

[52] Raman, M., 2004, Epistemological messages conveyed by three high-school and college mathematics textbooks. *Journal of Mathematical Behavior*, **23**, 389-404.

[53] Entwistle, N., 1995, Frameworks for understanding as experienced in essay writing and in preparing for examinations. *Educational Psychologist*, **30**(1), 47-54.

Artikel 2

Manuscript submitted for publication.

Transformation and contextualisation: exploring students' conceptual understandings of threshold concepts in calculus

Max Scheja[1] and Kerstin Pettersson[2]
[1]Stockholm University and [2]Skövde University, Sweden

Address for correspondence:
Max Scheja, Stockholm University, Department of Education,
SE-106 91 Stockholm,
Email: max.scheja@ped.su.se
Phone: +46 8 16 37 92

Abstract

Research on student learning in higher education suggests that threshold concepts within various disciplines have the capacity to transform students' understanding. The present study explores students' understanding in relation to particular threshold concepts in mathematics—integral and limit—and tries to clarify in what sense developing an understanding of threshold concepts involves a transformation of understanding in relation to ways of thinking in mathematics. Drawing on data collected in interviews with students taking a basic course on calculus the analysis offers an initial characterisation of students' understandings as algorithmic. It then proceeds to construct a more fine-grained account for how these understandings develop in the course of the interview, suggesting that the transformative aspects of threshold concepts may be conceptualised in terms of shifts in students' contextualisations allowing the development of conceptions at different levels of abstraction simultaneously interacting to shape students' awareness of the ways of thinking and practising in the subject.

Keywords/phrases: Conceptual understanding, Contextualisation, Mathematics, Student learning in higher education, Threshold concepts, Ways of thinking and practising

Introduction

> ‘When you’re coming up to Finals (you ask) – “Do I really understand it?” I think your understanding increases gradually on each topic. You think you understand something (in first year), but you don’t really understand it until you really understand the whole subject. There’s never a moment of (total) enlightenment. As you gradually build up knowledge, the understanding comes with it.’ (Entwistle & Entwistle, 2005, p. 149).

Over the past decades, research into higher education has explored the extent to which students develop independent forms of conceptual understanding in the course of their university studies (Entwistle & Entwistle, 1992). The main thrust of this research has been to describe the structurally different forms of understanding that students achieve in their studies. But it has also explored students’ actual experiences of reaching an understanding of various topics (Entwistle & Entwistle, 2005). When students are asked to describe their experiences of understanding they typically report feelings of satisfaction over having gained insight into a puzzling topic, and feelings of meaning and significance attached to the material learned. The driving force of these impressions appears to be a strong perception of coherence and connectedness linked to a gradually emerging awareness of what constitutes the wider understanding of a subject domain (Entwistle & Entwistle, 1992; Entwistle & Entwistle, 2005), as illustrated by the opening quote from a British undergraduate student in her final year of study. The idea expressed in that quote, that understanding is built up gradually through a process of trying to grasp the ‘whole subject’, is not a simply one of common sense. For instance, constructivist research on learning and conceptual change (Caravita & Halldén, 1994) has argued that learning involves a complex interplay of beliefs at different levels of interpretation. At one level students may hold beliefs about specific concepts, while at a more general level—a meta level of interpretation—there appear to exist a set of beliefs about the very nature of the academic discipline which tend to influence students’ ways of understanding and dealing with specific concepts brought to the fore in the teaching (Caravita & Halldén, 1994). The array of terms used to refer to such beliefs may sometimes lead to confusion. So for clarity, in this paper the term ‘concept’ will be used to refer to a class or grouping to which objects sharing similar defining features belong (White, 1994). Sometimes the term ‘concept’ has been used to denote individuals’ varying ways of understanding such a class or grouping. In this paper such individuals’ varying ways of understanding concepts will be referred to as ‘conceptions’. The idea that conceptions at different levels simultaneously interact to shape students' overarching conceptions of studying and learning within a particular subject area invites reflection on learning as a powerfully context dependent process involving a dynamic interplay between learners' personal experiences and capabilities and their conceptions of the learning environment (Entwistle, 2007a; Halldén, Scheja, & Haglund, 2007). A natural corollary to discussing the complexity of learning is discussing the sorts of understandings that students achieve in their university studies and on how these understandings develop as a result of students' interaction with their learning environment. That will also be the topic of the present paper which focuses on how students come to develop their understandings of important concepts in mathematics.

Understanding the subject

Talking about conceptual understanding in general terms gives a rather unfair impression of a unified structure of understanding, with a fixed route to conceptual insight. Research has made it increasingly clear that students vary in how they conceive of learning and knowledge (Perry, 1970, 1988; Säljö, 1979, 1982), approach their studies (Case & Marshall, 2004; Entwistle & Ramsden, 1983; McCune, 2001) and in how they come to understand learning material (Halldén, 1999; Marton & Säljö, 1976a, 1976b, 2005; Wistedt & Brattström, 2005). So the extent to which students come to develop conceptual understanding in a particular subject area, and across disciplines, is likely to vary, as is the nature of that understanding. One reason for this variation has to do with the differences that exist between particular subject areas in terms of the structure of the subject matter including the logical breath, depth and width of that content. What is regarded as valid academic understanding within a particular subject area is to a large extent determined by the established norms, conventions, discourse and practices of that particular discipline. Recent research (Entwistle, 2005; McCune & Hounsell, 2005) on the opportunities for facilitating high-quality learning at the undergraduate level introduced the notion of *Ways of thinking and practising* (WTP) to describe disciplinary differences brought to the fore within five contrasting subject areas. Broadly speaking WTPs refer to:

> 'the richness, depth and breadth of what students might learn through engagement with a given subject area in a specific context. This might include, for example coming to terms with particular understandings, forms of discourse, values or ways of acting which are regarded as central to graduate level mastery of a discipline or subject area […] WTP can potentially encompass anything that students learn which helps them to develop a sense of what it might mean to be part of a particular disciplinary community whether or not

> they intend to join a given community in the future, for example, by pursuing a particular profession' (McCune & Hounsell, 2005, p. 257).'

Troublesome knowledge and threshold concepts

Learning, in terms of becoming part of a disciplinary community, always puts particular demands on students who have to find ways of coping with the disciplinary idiosyncrasies of learning in their chosen subject area. And coming to understand something in any particular subject is highly dependent on students' abilities to interpret information presented in the teaching in ways that are in accord with the WTPs endorsed in that subject. Not surprisingly, this process of trying to match the WTPs of the subject sometimes has students running into difficulty, as illustrated by the many studies on students' conceptions, and misconceptions, of science concepts (for a bibliography, see Duit, 2006). As Perkins (1999) points out, certain aspects of certain subject matter are bound to cause trouble for students' learning. But for students such 'troublesome knowledge' may be troublesome in different ways. For instance, the procedure through which a subject area obtains knowledge about a particular phenomenon may be taken so much for granted that it is reduced to a ritualized routine, void of meaning and subject-matter content. Such ritualized knowledge may cause trouble, for instance, when students of economics make use of theoretical abstractions and models in discussing real world phenomena, without recognizing the empirical complexity of the situation underlying the abstraction. Knowledge may also be inert in the sense that students may have a conceptual understanding of certain concepts in economics, but fail to see how this understanding links with circumstances beyond the text book or the exam. These are just a couple of examples of the ways in which certain kinds of knowledge can obstruct student learning, and Perkins (1999) provides several more examples. The point here is that the knowledge developed within a particular discipline, by way of being embedded in the logical structure of that discipline, sets up certain conditions for learning, which may act as thresholds for students in their struggle to develop understanding. Accordingly, recent research into student learning has been putting effort into identifying *threshold concepts* (Meyer & Land, 2003, 2005) within certain academic disciplines. A threshold concept can be described as a 'conceptual gateway' or 'portal' that leads to a new way of thinking about a particular subject area (Meyer & Land, 2005). In particular, threshold concepts have been characterised as transformative, irreversible, integrative, bounded and potentially troublesome (Meyer & Land, 2006). The transformative aspect of threshold concepts has to do with the process of developing understanding of such concepts and the qualitative changes in students' conceptions of the subject matter entailed by this process. Moreover, threshold concepts are integrative insofar as the process of reaching an understanding of them involves pulling together bits and pieces of conceptual material and integrating them into a conceptual whole. The irreversibility aspect of threshold concepts concerns the fact that, once understanding has been achieved, the change in perspectives involved in understanding makes it virtually impossible for students to eradicate the conceptions thus developed. Davies and Mangan (2007) furthermore note that the transformatory, integrative and irreversibility aspects of threshold concepts are interwoven in the sense that:

> 'A [threshold] concept that integrates prior understanding is necessarily transformative because it changes a learner's perception of their existing understanding. If a concept integrates a spectrum of prior understanding it is more likely to be irreversible because it holds together a learner's thinking about many different phenomena. To abandon such a threshold concept would be massively disruptive to an individual's whole way of thinking' (Davies & Mangan, 2007, p. 712).

While the defining features of threshold concepts are still being debated (Davies & Mangan, 2007; Entwistle, 2007a; Meyer & Land, 2006), the transformative and integrative aspects stand out as perhaps the most important aspects in the sense that they imply changes in students' learning processes and understanding. However, so far most of the research on threshold concepts has focused on teachers' experiences of difficulties that students have in grasping particular concepts within different subject areas, and on the disciplinary role of those concepts (Meyer & Land, 2006). Consequently, less effort has been put into investigating the transformative and integrative aspects of threshold concepts, that is, the nature of coming to understand threshold concepts in particular subject areas. As most students are likely to meet such concepts in the course of their studies at university, threshold concepts may provide a good opportunity to explore emerging conceptual understanding among university students. So understanding how students understand and deal with threshold concepts confronting them in various subjects may be crucial to finding ways to help students to learn more meaningfully and effectively in those subject areas.

Aim

The present paper picks up on the topic of what it means to come to understand a particular subject area and explores it in relation to findings emerging from a recently launched research project aiming to study the dynamics of students' conceptual understandings within engineering, economics and medicine. Here, the focus will be on the first phase of the project, which set out to explore the nature of engineering students' understandings of two mathematical threshold concepts: limit and integral. The aim is to explore students' understanding in relation to limit and integral and to discuss the findings in relation to the transformative aspects of those threshold concepts and in particular to clarify in what sense developing an understanding of threshold concepts involves a transformation of understanding in relation to ways of thinking in the subject.

Theoretical framework

Contextualised understanding and knowledge objects

From a broad constructivist stance student learning in higher education can be seen as involving simultaneous processes of approximation and feedback. Students try out interpretations of the learning material, and on the basis of the response they get from teachers and other significant influences of the learning environment develop ideas about the meaning of the learning material and of what it means to study and learn a particular subject (Halldén, 1999; Hounsell, Hounsell, Litjens, & McCune, 2005; Scheja, 2002). Research on learning and conceptual change (e.g. Halldén, 1999) has described this belief formation process as a process of *contextualisation* through which students develop individual understandings of learning material by putting it in a particular context or framework where it makes sense for the learners in the perceived circumstances (Halldén, 1999; Ryve, 2006; Scheja, 2002). It is through such contextualisation processes that students gradually may learn to differentiate the preconditions for developing conceptual understanding in various subject areas (Halldén, Scheja, & Haglund, 2007). From this perspective, it follows that learning is dependent on the students' ability to interpret information presented in the teaching in ways that are in accord with the ways of thinking endorsed in that particular teaching setting, or more broadly, the particular subject domain concerned. By contextualising the subject matter—by actively and cognitively structuring the learning material in an individual context to make sense of it for themselves—students may either succeed in accommodating the demands of the learning environment, or end up struggling with their understanding. Research into higher education has shown that learning processes of this kind can lead to highly personalised and contextualised understandings of topics brought to the fore in the teaching (Entwistle & Entwistle, 2005; Lundholm, 2005; Wistedt, 1998). In particular, studies (Entwistle & Marton, 1994; Entwistle & Entwistle, 2003) have suggested that when students are required to exhibit and use their own understandings—for instance, in revising for exams or carrying out intellectually demanding learning tasks—and have carried out the work thoroughly, they can describe these understandings as individual and flexible structures in their minds, in the form of a ‘knowledge object’. From the student’s perspective the knowledge object is perceived as being almost visual, and can be used as a form of mnemonic to structure thinking and to tailor explanations to the specific requirements of an exam question (Entwistle & Marton, 1994; see also Entwistle, 1995; Entwistle & Entwistle, 2003; Entwistle & Entwistle, 2005). Although the term ‘knowledge object’ might conjure up the image of a closed and fixed entity which can be transferred from one situation to another, it refers to a highly flexible and contextualised understanding that some students seem to develop only through intensive academic study (Entwistle, 2007a). In many ways, the notion of a knowledge object seems to capture the essence of the personal subject-based and transferable ‘conceptual understanding’ which, at an institutional level, is often held up as an important and anticipated learning outcome for students in their academic studies (Allan, 1996). However, that a student develops a knowledge object through intensive and thorough contextualisation of the learning material in a particular subject does not necessarily mean that this knowledge object corresponds fully with the WTPs endorsed in that subject. Students’ intentions and personal beliefs about their own learning capabilities in relation to perceived demands of the teaching-learning environment will strongly influence the way in which they tackle a particular learning task or, more broadly, set about learning a particular subject. The knowledge object and the individual contextualisations linked to that knowledge object are thus highly personal and leave room for certain variation in terms of the understanding achieved. So the theoretical framework adopted in the present study implies a constructivist view of learning as a contextualisation process through which students’ may develop understandings of topics in the subject area concerned. These understandings may be of varying degrees of solidity, sometimes appearing in the form of knowledge objects, and sometimes, and perhaps more often, in the form of relatively loosely interwoven structures of understanding. The notion of contextualisation serves to invite reflection on individual variations in the process through which these understandings emerge, and so can be seen as a key concept in capturing the process of coming to understand subject matter topics brought to the fore in the teaching.

Conceptual and procedural knowledge in mathematics education

Apart from being related to the discussion of students’ construction of understanding in higher education, the present study is specifically tied to an ongoing discussion on what is involved in coming to understand the foundations of mathematical reasoning. Within mathematics education a basic distinction has been proposed between 'conceptual knowledge' and 'procedural knowledge' (Hiebert, 1986). While conceptual knowledge implies that the mathematical knowledge acquired by the learner is particularly well-connected and rich in conceptual content, procedural knowledge can be described in terms of knowledge of rules or procedures for solving mathematical problems. Earlier, Skemp (1976) had suggested a similar distinction between two types of understanding that could be sought in mathematics—'relational' and 'instrumental'. Relational and instrumental understanding are notions which map onto the distinction between procedural and conceptual knowledge in the sense that instrumental understanding implies having procedural knowledge—knowledge of how to do something—whereas relational understanding involves conceptual knowledge of what to do, how to do this and why. More recently, the concepts describing different types of knowledge and understanding has come under considerable scrutiny. For instance, Star (2005) has argued that the popular use of the notions of procedural and conceptual knowledge tend to confuse knowledge types with qualities and vice versa. Instead he suggests that conceptual knowledge is best understood as 'knowledge of concepts or principles' and procedural knowledge as 'knowledge of procedures'. This reconceptualisation enables the recognition of variations not only between procedural and conceptual knowledge but also within those knowledge categories, thus allowing more fine grained distinctions between deep, rich and well-connected procedural knowledge and superficial and weakly connected conceptual knowledge. Recent research (Baroody, Feil, & Johnson, 2007) has taken this argument further and proposes a model describing the progression of and relation between the different sorts of knowledge and understanding described in mathematics education research. According to Baroody, Feil, and Johnson (2007) the development of students' knowledge and understanding can be described along a continuum. At the one end of this continuum there is understanding that is lacking in conceptual knowledge, unconnected and coupled with superficial procedural knowledge. At the other end of the continuum we find understanding that is richly connected and involves elaborated procedural and conceptual knowledge. The model described by Baroody, Feil, and Johnson (2007) implies a gradual progression of understanding involving interplay between procedural and conceptual knowledge. In the beginning of the learning process procedural and conceptual knowledge are seen as present but largely unconnected. However, as learning progresses these aspects become increasingly connected with procedural knowledge supporting the development of conceptual knowledge within an integrated conceptual schema. So, this model describing the development of knowledge and understanding implies that procedural and conceptual knowledge are seen as mutually supportive aspects of coming to understand mathematics. This position, however, runs contrary to other research stances (e.g. Skemp, 1976; Pesek & Kirshner, 2000) which have argued that procedural knowledge tend to obstruct the development of conceptual knowledge, and hence that teaching should concentrate on fostering conceptual rather than instrumental understanding. In response to this ongoing discussion on the development understanding in mathematics, an earlier study (Pettersson & Scheja, 2007) on students' conceptual understanding of calculus provides support to Baroody, Feil, and Johnson's (2007) less confrontational view on the relationship between procedural and conceptual knowledge. Drawing on students' oral and written explanations of the concepts of integral and limit, our earlier work suggested that the students' understandings of those concepts, while at first appearing fragmented and scattered, did in fact form part of an 'algorithmic contextualisation' of the two concepts. The students focused on limit and integral mainly in terms of procedures to be carried out and explained these concepts in ways which indicated that they saw the 'operations' of these concepts as defining features and as a basis for understanding them. But analyses of extensive interviews with the students also revealed a largely unexplored potential for understanding the conceptual aspects of limit and integral, and a potential for expanding their algorithmic contextualisations of calculus to include both procedural and conceptual dimensions of understanding. It is this emergent understanding that is further explored in the present study.

Methodological remarks

An intentional approach to learning

Methodologically, this study draws on a constructivist framework— Intentional Analysis— developed in research on learning and conceptual change (Booth et al., 1999; Halldén, 1988; Halldén, Scheja, & Haglund, 2007; Wistedt, 1994a, 1994b). Bringing into focus individual students' meaning making or understanding processes this framework provides a basis for producing the fine grained analyses needed to capture the working elements of those processes. A series of early research studies (Halldén, 1988; Wistedt, 1994a, 1994b) on students' interpretations of learning tasks pointed up important individual differences in students' interpretations of learning tasks. In particular, this research made it clear that learners who were assigned the same learning task often ended up working on completely different problems, trying to learn something different from what they were actually being taught. Further analyses of these individual differences made it clear that these variations were explained by the fact that students' used different frames of references in interpreting the learning tasks and so arrived at different understandings of those tasks. Consequently, a central distinction was introduced between ‘task’ and ‘problem’ (Halldén, 1988), defining task as the information presented to the students by the teacher with the intention that they are to focus on certain aspects of this information and to learn something, and problem as the students’ “personal interpretation of the task given” (Halldén, 1988, p. 125). Obviously, such a distinction between task and problem has methodological implications. One such implication is that it involves a shift from a teacher-oriented to a learner-oriented perspective on student learning. This shift also brings with it the important recognition that students who are confronted with the same learning task might end up working on different problems and so try to learn completely different things. Moreover, and importantly, a perspective that recognises these potential individual differences is moving away from the ‘negative scholarly rationalism’ (Rommetveit, 1978) that has beset much of the previous research on students’ misconceptions of science concepts (cf. Säljö, 1991). While much of this research has focused on the shortcomings and mistakes that students make in relation to learning tasks, the present methodological stance seeks to understand what learning activities students do in fact engage in when confronted with learning tasks in various teaching settings. The basic epistemological assumption underlying such an endeavour is that individual behaviour, including both verbal and non-verbal acts, is permeated with intentionality and so can be rationalised and understood in terms of meaningful actions in relation to the circumstances at hand. Trying to understand students’ studying and learning activities in such an intentional framework involves looking for what make those activities meaningful for the individual students, given the circumstances. Any attempt to try to rationalise individual actions necessarily falls back on an assumed maxim of coherence that forms part of a wider *principle of charity* (Davidson, 2001). Basically this principle asserts that in order to make sense of, for instance, students’ ways of dealing with specific learning tasks or more generally, the demands of the learning environment as a whole, we have to assume that the students’ actions rely on a certain degree of coherence and cogency, and hence that there are certain features in the learning environment that are more salient than others. Saying that some features stand out as salient for students does not, however, imply that students see the surrounding world in the same way. It is just a way of saying that individuals—despite individual differences—overlap in how they view the world, and that this shared world-view enables mutual understanding (cf. Schutz, 1967). It is against the background of such an assumed coherence that it is possible to construct interpretations of what students’ say and do in a particular subject area—interpretations which are aimed at clarifying students’ efforts to accessing the ways of thinking and practising endorsed in that subject area.

Method

Data collection

The data were collected among undergraduate students of engineering at a Swedish university college. A class of 20 undergraduate students of engineering who were taking a basic course in mathematics were, at the end of the course, invited to reflect on their understanding of the two calculus concepts limit and integral. Initially the students were asked to explain in writing, as clearly as possible, the meaning of those concepts. But the students were also asked whether they would be willing to discuss their understandings in a subsequent interview to discuss their understandings. A small sub-sample of the class volunteered for interviews, and about a week after the initial data collection four semi-structured individual interviews were carried out, which explored in greater detail the students' understandings of the concepts of limit and integral respectively. The students were informed that participation in the study was optional and formed part of a research project focusing on mathematical understanding, and so had nothing to do with their approaching calculus exam. The students were also informed that information that they passed on in the interviews would be dealt with in a way that would inform and enrich the research process, without jeopardising their personal integrity and identity. The interviews were tape-recorded and transcribed in full, with the students' informed consent. Each interview lasted between 30 and 40 minutes and probed the students' understandings of the two concepts in some detail. Both authors were present during the interviews. One of the authors, with formal training in mathematics, led the interview asking questions exploring the students' understanding of the two concepts. The other author, an educationalist, followed and facilitated the interview dialogue providing communicative support and asking complementary questions pertaining to the students' understanding in relation to their everyday studying.

Data analysis

This sort of research on student learning is essentially about modelling students' processes of understanding, and for the purposes of the present study extracts from the individual interviews carried out with students will serve to illustrate the nature of the students' understandings of the concepts of limit and integral. Drawing on the methodological framework described earlier, the analyses of the interviews began by structuring the individual students' utterances into sections relating to the question of what understanding the threshold concepts of limit and integral entails in terms of transformation in relation to ways of thinking in the subject. The analysis then proceeded to elaborate on the meaning of those sections by constructing narratives of what the students' utterances were communicating in terms of understanding. These narratives, foregrounding the intentionality of the students' accounts, naturally meant that some parts of the interviews were brought to the fore while others receded into the background. To ensure that the narratives were consistent with what was being said in the whole of the interview, repeated readings of the transcripts were carried out and checked against the narratives. The next step of the analysis involved constructing models of the sorts of understanding reflected in the narratives. These models were then compared with each section in the interview that related to how the students had understood the two concepts. An important part of this process of constructing analytic models of the content of the interviews involved identifying not just what the students were talking about, but also identifying the contextualisation (Halldén, 1999) implied by these accounts, that is, the particular context in which the students were reflecting on the two concepts. Below, a brief summary of the students' contextualisations will be presented, followed by a discussion of what these may imply in terms of developing an understanding of the two calculus threshold concepts. This discussion will also address in what sense threshold concepts are transformative and how such processes are related to the development of ways of thinking in mathematics.

Results

An algorithmic contextualisation of calculus

The interviews invited the students to reflect on their understandings of the two calculus concepts and in the analyses of the students' accounts there was a particularly marked emphasis on understanding the two concepts in terms of procedures to be carried out. More precisely, in communicating their understanding of the two concepts the students put a strong emphasis on how the concepts are used in problem solving, as illustrated by the following quote from two of the students, *P* and *V*, addressing the topic of how limit and integral are connected to other mathematical concepts:

> **P**: '***you use limits to define*** *a derivative. I haven't thought more about it than that ... I've only* ***used limit to do that*** [---] *You find the area under the graph* ***by using the integral*** […]*'*
>
> **V**: *'[To compute the integral]* ***you use the derivative****, the anti-derivative of a function* […] ***you use the anti-derivative*** *of the function* ***to get*** *[the integral]'* (emphases added).

This emphasis on how the concepts are used “to do” something, to achieve something, was repeatedly brought to the fore in the interviews. Setting such procedural accounts in a wider framework of individual learning it was clear that the students’ were seeing these concepts from within a particular *algorithmic contextualisation*. In particular, the students described the concepts as tools or operations to be used algorithmically, following stepwise procedures for coping with typical calculus problems. While such an approach to understanding the two concepts meant putting more emphasis on procedural than conceptual aspects of the concepts, it seemed to be highly functional for the students, who reported having so far been successful in their studies and also expressed confidence in their understanding of limit and integral.

Shifting contextualisations

However, while the interviews made it clear that the students were contextualising the two concepts algorithmically, the students’ accounts also indicated that this understanding was by no means fixed and final. In fact, faced with the topics brought up by the interviewers and with probing questions to match, the students’ narratives began to change ever so slightly, taking on a more reflective tone, addressing conceptual topics previously not considered. This change was particularly clear when the interviewer asked the students about the relationships between integral and limit and other mathematical concepts, as illustrated in the following extract from the interview with one of the students previously quoted, *P* (I=interviewer):

> ‘**I**: *Are all integrals areas and are all areas integrals?*
> **P**: *No.*
> **I**: *Can you say a bit more about it? When, for instance, is it impossible to use an integral to compute the area…?*
> **P:** *It’s when the integral…to take an example, if you…or yeah, maybe so. If you have a …if you have, like, a broken graph or something… But then again, you could calculate with that…and find the different areas and then add them together. I have to think about whether you can do that for all integrals. I’ve never thought about that before...*’

P is asked whether all integrals can be seen as areas and vice versa. His initial and resolute response is that integral and area is not the same thing. His utterance *‘It’s when the integral…’* implies that not all areas can be computed using integrals. He goes on to try to exemplify his point by suggesting the notion of a ‘broken graph’ (*‘To take an example, if you…or yeah, maybe so. If you have a broken graph or something…’*). But in explaining that the integral of such a 'broken graph' cannot be computed, *P* suddenly comes up with a counter argument (*'But then again, you could calculate with that…and find the different areas and then add them together'*). So *P* goes from being quite sure to being slightly unsure about the true relationship between area and integral. In view of his apparent algorithmic contextualisation of the two concepts it seems reasonable to assume that *P* has not previously thought about the possibilities and limitations of the use of integrals (*'I've never thought about that before…'*). The probing questions from the interviewer evidently put *P* in a position where he has to challenge his mainly procedural understanding of the concepts at hand, and in so doing *P* appears to shift from an algorithmic contextualisation to a contextualisation foregrounding ideas relating to the conceptual dimensions of calculus. Interestingly, *P*'s way of phrasing the final sentence in the extract hints at the possibility that he is projecting his thinking not just towards the topic of calculus, but towards a mathematical way of thinking, resting on logical conditions of the form 'for all x…': *'I have to think about whether you can do that* ***for all integrals****. I've never thought about that before…'* (emphasis added), thus suggesting a more profound change in viewpoints.

Another example of a similar change in the students' accounts comes from an interview with the other student previously quoted, *V*, who was asked to comment on the relationship between integral and area.

> **I**: *Okay, you've written the smaller delta x the better the approximation.*
> **V**: *Mm…*
> **I**: *Mm…but is it always an approximation?*
> **V**: *Yeah, it's an approximation. Because…the function is not a straight line, so you can't…compute as with a rectangle…there are lines…[if] the distances are straight and stuff, you can measure them. But the function bends, it goes up or down, and then you've got to make approximations all the time.*
> **I**: *So, you can never get the exact, precise area under the [curve]?*
> **V**: *No, not according to the definition, but apparently if you make really, really small…* [draws very thin strips under the function]
> **I**: *…delta x*
> **V**: *…delta x, until infinity, that would be the best approximation there is.*
> **I**: *Mm…if you do that infinitely?*
> **V**: *Yeah, then you take delta x. […] …it's infinitely…I mean it's so tiny that it's almost impossible to see…it's nano-metres, no it's micro nano…scales…*

From the extract above it is clear that *V* is pondering the connection between integral and area in terms of the summation of rectangles, which forms part of the definition of integral. Simply put, an integral can be described as a computation of an area. To compute the area of an irregular region the area can be divided into strips where the strips approximately are rectangles. So the sum of the respective rectangle areas is an approximation of the area of the region, and it follows that the thinner the strips are, the better the approximation. The integral is defined to be the value that the sums of the areas are approaching when the breadth of the strips are approaching zero. *V* talks about choosing smaller and smaller rectangles in order to reach a better approximation. Given a piecewise linear function it is possible to arrange the division of intervals and use such a summation to compute the exact value of the area. But this does not apply to all curves. Although *V* refers to the definition, he mainly talks about the summation of rectangles, and seems to view the definition as a process or movement through which thinner and thinner strips provide better and better approximations of the area. However, the definition actually uses the power of a limit to transform the approximation into an exact value. However, when the interviewer probes *V*'s understanding ('*So, you can never get the exact, precise area under the [curve]?*), it appears to dawn on *V* that something is missing. He does seem to recognise that there is an exact value to be found (*'but apparently, if you…'*), but at the same time insists that the integral is an approximation and so does not explicitly mention the exact value. Instead he suggests that there is a 'best approximation' which could be achieved by creating an infinite number of strips so thin that they are virtually impossible to see ('*I mean it's so tiny that it's almost impossible to see…it's nano-metres, no it's micro nano…scales…*'). Clearly, *V*'s idea that there exists a 'best approximation', and that such an approximation can be arrived at by bringing together an infinite number of infinitesimal strips raises the question of how this 'best' result can be conceptualised (*'**it**'s so tiny* […] ***it****'s nano-metres* […] *micro nano…scales'* [emphases added]). So, reflecting on the connection between integral and area turns into a conceptual challenge in which *V* closes in on the tension between the existence of an exact value and the notion of integral as 'the best' approximation. And from the fervour with which *V* explains his understanding, making a drawing to clarify his thinking, this topic appears to have him shifting from a purely algorithmic contextualisation to a contextualisation inviting conceptual consideration on the relationship between integral and area.

Discussion

Research on threshold concepts has suggested that defining features of such concepts are that they are transformative because they change the learners' perceptions of their existing understanding and of the subject itself, and integrative insofar as this transformation involves bringing together disparate pieces of information into a conceptual whole (Davies & Mangan, 2007; Entwistle, 2007a; Meyer & Land, 2006). While the transformative and integrative aspects of threshold concepts seem to be crucial in grasping the process of understanding those concepts, so far little effort has gone into exploring what this transformation actually means in different subject areas. The aim of this study was to explore students' understanding in relation to central calculus concepts and to discuss the findings in relation to the transformative aspects of those threshold concepts and to clarify in what sense developing an understanding of threshold concepts involves a transformation of understanding in relation to ways of thinking in the subject. Focusing on how the students' contextualised the two concepts the analysis described how their initial way of contextualising limit and integral began to change as a result of the interviewer's probing questions. In particular, in explaining their understandings of limit and integral and their connections to other mathematical concepts the students began to shift in their views on the topics discussed, from an algorithmic contextualisation of the two calculus concepts—foregrounding the application of techniques and procedures in solving mathematical problems—to a contextualisation inviting reflection on the conceptual dimensions of limit and integral. Previous research (e.g. Halldén, 1988, 1999; Wistedt & Brattström, 2005) on students' contextualisations of learning tasks has focused on how students interpret those learning tasks and as a result of their varying interpretations set about working on different problems, sometimes problems of quite a different kind than those presented in the teaching. These studies have often emphasised the individual variation in students' ways of contextualising topics brought to the fore and what this variation implies in terms of opportunities for learning the subject. But in the modelling of students' understanding of subject matter the notion of contextualisation also serves to point up the different layers of interpretation involved in the process of coming to understand. To clarify, *P*'s and *V*'s initial contextualisation of limit and integral can be seen as algorithmic in the sense that it emphasises procedures and techniques which allow the students to think about these concepts in algorithmic terms. So in analytic terms the contextualisation describes an act of interpretation on the part of the student which sets the frames for understanding the concepts in question. Accordingly, as the interview progresses and the students are faced with probing questions on relations between integral and limit and other mathematical concepts the framing of the entire topic changes. In response to the probing questions and in order to address conceptual aspects raised by them, both *P* and *V* modify their initial contextualisation of the topic at hand, opening up areas of conceptual reflection quite new to them.

The point to be made here is that this shift in contextualisations can be seen as a clarification of the transformative aspects involved in understanding threshold concepts. The students' contextualisation set the frames for developing conceptions of integral and limit. Such conceptions may differ, for example, in terms of being focused on procedural or conceptual aspects of the two concepts (Hiebert, 1986; cf. Skemp, 1976). But in response to perceived demands of the situation, for instance, in light of an interviewer's probing questions, learners may well begin to change the way in which they contextualise subject matter, thus allowing alternative conceptions to come into play which can influence the development of understanding (cf. Scheja, 2006 on experiences of 'delayed understanding'). For instance, looking at the examples presented here, by being presented with questions that indirectly demanded a contextualisation of limit and integral that emphasised not only procedural but also conceptual aspects of those concepts (Baroody, Feil, & Johnson, 2007) the students made a contextual shift to try to adapt to such a way of thinking. So, transformation in relation to developing an understanding of limit an integral can be described in terms of changes in students' contextualisation of those threshold concepts.

But it is not just the concepts that are important here. As research on conceptual change (Caravita & Halldén, 1994) has shown, the development of conceptions happens at different levels of abstraction, leaving room for a multitude of transformations to occur. So far the research on threshold concepts has argued that understanding of a particular subject area comes from developing an understanding of threshold concepts (Meyer & Land, 2006). However, drawing on the notion of conceptions existing at different levels, developing an understanding of mathematics involves, not just conceptions of procedures and techniques that can be applied to solve mathematical problems, but also more fundamental epistemological conceptions of the nature of the discipline itself. If these conceptions are seen as interacting in shaping students' conceptions of threshold concepts at an intermediate level, developing an understanding of threshold concepts would necessarily involve contextualising those concepts in relation to overarching conceptions of what the discipline is all about, which in turn would influence the understanding of threshold concepts and ways to deal with available procedures and techniques (se Figure 1).

Conceptions of the nature of the discipline

↕

Conceptions of threshold concepts

↕

Conceptions of procedures and techniques

Figure 1: Conceptions existing at different levels of abstraction, simultaneously interacting to shape the students' conceptions of the subject area.

Of course learning is always dependent on the students' ability to contextualise information presented in the teaching in ways that allow students to get access to the ways of thinking and practising (WTP) endorsed in that particular teaching setting, or more broadly, the particular subject area concerned. As already mentioned, the variations in students' contextualisations of concepts and learning tasks may be considerable and while some will provide access to the WTPs other will cause trouble for students (Perkins, 1999) and disrupt the development of a solid understanding. In the present study there is a subtle but interesting example of how *P*, in addressing the question whether all integrals are areas and vice versa, uses a particular phrasing—*'I have to think about whether you can do that for all integrals'*—that forms part of a logical discourse strongly connected to the WTPs endorsed in mathematics. Such indications of efforts to access the WTPs of mathematics, while trying to grasp a particular threshold concept within the sub-area of calculus, provides an illustration of the complexity of conceptions involved in the transformation of understanding. The present study has tried to clarify at least part of this complexity by linking students' efforts to understand threshold concepts within mathematics to the notion of contextualisation. The notion of contextualisation invites reflection on individual variations in the process through which students understandings of subject matter emerge in interaction with the learning environment. It also enables descriptions of the extent to which students are able to access the WTPs of mathematics as including both procedural and conceptual aspects. The key to understanding lies in the ability to shift contexts. It is through such contextual shifts students will be able to differentiate the role that different contextualisations have in solving and providing insights into mathematical problems (cf. Halldén, Scheja, & Haglund, 2007). Through such contextual shifts the students will also be made aware of the boundaries of the discipline thus gradually building an awareness of the WTPs endorsed within mathematics.

There are, of course many other aspects that may have an impact on students' development of understanding, including students' differing backgrounds and approaches to studying (Entwistle, 2007b; McCune, 2001), teachers' approaches to teaching (Prosser & Trigwell, 1999) and in particular the quality of the feedback provided by teachers in particular teaching settings (Anderson, 2005; Hounsell, Hounsell, Litjens, & McCune, 2005). The learning environment itself, with its socio-cultural constraints and specific ways of organising teaching and learning activities can also influence the sorts of understanding that students seek and achieve (Entwistle, 2007b). While recognising that all these aspects form part of the complex interplay between various influences affecting students' learning and understanding, we have restricted the present discussion to focus on the transformation of understanding as it happens in relation to students' attempts to grasp threshold concepts in mathematics. So returning to the question of transformative aspects of threshold concepts it is, obviously, not the threshold concepts in themselves that are transformative. Rather, the transformation involves a transformation of the students' conceptions as these develop through shifting contextualisations of the concepts. In relation to calculus studies, the transformative aspects may thus be conceptualised in terms of contextual shifts allowing the development of conceptions at different levels of abstraction simultaneously interacting to shape the students awareness of the ways of thinking and practising in the subject.

Acknowledgements

The authors would like to thank the Research Group on Conceptual Development (RCD) at the Department of Education, Stockholm University for valuable feedback on an earlier draft of this paper. This research was made possible through financial support to Max Scheja from the Swedish Research Council's Committee for Educational Sciences, and to Kerstin Pettersson from the Swedish National Graduate School in Mathematics Education funded by the Bank of Sweden Tercentenary Foundation.

References

Allan, J. (1996). Learning outcomes in higher education. *Studies in Higher Education*, *21*(1), 93-108.

Anderson, C. D. B. (2005). Enabling and shaping understanding through tutorials. In: F. Marton, D. Hounsell, & N. Entwistle (Eds.), *The Experience of Learning: Implications for teaching and studying in higher education* (3rd [Internet] edition) (pp. 184-198). Edinburgh: University of Edinburgh, Centre for Teaching, Learning and Assessment.

Baroody, A., Feil, Y., & Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2), 115-131.

Booth, S., Wistedt, I., Halldén, O., Martinsson, M., & Marton, F. (1999). Paths of learning. The joint constitution of insights. In L. Burton (Ed.), *Learning mathematics. From hierarchies to networks* (pp. 62-83). London: Falmer Press.

Caravita, S., & Halldén, O. (1994). Reframing the problem of conceptual change. *Learning and Instruction*, *4*, 89-111.

Case, J., & Marshall, D. (2004). Between deep and surface: Procedural approaches to learning in engineering education contexts. *Studies in Higher Education*, *29*(5), 605-615.

Davidson, D. (2001). *Inquiries into truth and interpretation* (2nd ed.). Oxford: Oxford University Press.

Davies, P., & Mangan, J. (2007). Threshold concepts and the integration of understanding in economics. *Studies in Higher Education*, *32*(6), 711-726.

Duit, R. (2006). *Bibliography: Students' and teachers' conceptions of science education*. Full version, February 2006 [http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/stcse/stcse.html]

Entwistle, A., & Entwistle, N. (1992). Experiences of understanding in revising for degree examinations. *Learning and Instruction*, *2*(1), 1-22.

Entwistle, N. (1995). Frameworks for understanding as experienced in essay writing and in preparing for examinations. *Educational Psychologist*, *30*, 47-54.

Entwistle, N. (2005). Learning outcomes and ways of thinking across contrasting disciplines and settings in higher education. *The Curriculum Journal*, *16*(1), 67-82.

Entwistle, N. (2007a). Conceptions of learning and the experience of understanding: Thresholds, contextual influences, and knowledge objects. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the problem of conceptual change in learning and instruction* (pp. 123-145). Amsterdam: Elsevier.

Entwistle, N. (2007b). Research into student learning and university teaching. In N. Entwistle, & P. Tomlinson (Eds.), *Student learning and university teaching* (pp. 1-18) (Psychological Aspects of

Education – Current Trends Monograph Series). Leicester: The British Psychological Society.

Entwistle, N., & Entwistle, A. (2005). Revision and the experience of understanding. In F. Marton, D. Hounsell, & N. Entwistle (Eds.), *The Experience of Learning: Implications for teaching and studying in higher education* (3rd [Internet] edition) (pp. 145-155). Edinburgh: University of Edinburgh, Centre for Teaching, Learning and Assessment.

Entwistle, N., & Entwistle, D. (2003). Preparing for examinations: The interplay of memorising and understanding, and the development of knowledge objects. *Higher Education Research and Development*, *22*, 19-42

Entwistle, N., & Marton, F. (1994). Knowledge objects: understandings constituted through intensive academic study. *British Journal of Educational Psychology*, *64*, 161-178.

Entwistle, N., & Ramsden, P. (1983). *Understanding student learning*. London: Croom Helm.

Halldén, O. (1988). Alternative frameworks and the concept of task. Cognitive constraints in pupils' interpretations of teachers' assignments. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *32*, 123-140.

Halldén, O. (1999). Conceptual change and contextualisation. In W. Schnotz, S. Vosniadou, & M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 53-65). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Halldén, O., Scheja, M., & Haglund, L. (2007). The contextuality of knowledge: An intentional approach to meaning making and conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *Handbook of research in conceptual change*. In press.

Hiebert, J. (Ed.) (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hounsell, D., Hounsell, J., Litjens, J., & McCune, V. (2005). Enhancing guidance and feedback to students: Findings on the impact of evidence-informed initiatives. Paper presented at the 11th Conference for Research on Learning and Instruction, 23-27 August, Nicosia, Cyprus.

Lundholm, C. (2005). Learning about environmental issues: postgraduate and undergraduate students' interpretations of environmental contents in education. *International Journal of Sustainability in Higher Education*, *6*(3), 242-253.

Marton, F., & Säljö, R. (1976a). On qualitative differences in learning I. Outcome and process. *British Journal of Educational Psychology*, *46*, 4-11.

Marton, F., & Säljö, R. (1976b). On qualitative differences in learning II. Outcome as a function of the learner's conception of the task. *British Journal of Educational Psychology*, *46*, 115-127.

Marton, F., & Säljö, R. (2005). Approaches to learning. In F. Marton, D. Hounsell, & N. Entwistle (Eds.), *The Experience of Learning: Implications for teaching and studying in higher education* (3rd [Internet] edition) (pp. 39-58). Edinburgh: University of Edinburgh, Centre for Teaching, Learning and Assessment.

McCune, V. (2001). The development of students' approaches to learning and studying in the first year of higher education. Paper presented at the 9th European Conference for Research on Learning and Instruction, Fribourg, 28 August – 1 September 2001.

McCune, V., & Hounsell, D. (2005). The development of students' ways of thinking and practising in three final-year biology courses. *Higher Education*, *49*, 255-289.

Meyer, J. H. F., & Land, R. (2003). Threshold concepts and troublesome knowledge: Linkages to ways of thinking and practising within the disciplines. In C. Rust (Ed.), *Improving Student Learning: Improving Student Learning Theory and Practice – Ten Years On*. Oxford: Oxford Centre for Staff and Learning Development.

Meyer, J. H. F., & Land, R. (2005). Threshold concepts and troublesome knowledge (2): epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning. *Higher Education*, 49, 373-388.

Meyer, J. H. F., & Land, R. (Eds.) (2006). *Overcoming barriers to student understanding: Threshold concepts and troublesome knowledge*. London: Routledge.

Perkins, D. (1999). The many faces of constructivism. *Educational Leadership*, *57*(3), 6-11.

Perry, W. G. (1970). *Forms of ethical and intellectual development in the college years. A scheme*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Perry, W. G. (1988). Different worlds in the same classroom. In P. Ramsden (Ed.), *Improving learning: new perspectives* (pp. 141-161). London: Kogan Page.

Pesek, D., & Kirshner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*, 524-540.

Pettersson, K., & Scheja, M. (2007). Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of calculus (manuscript submitted for publication).

Prosser, M., & Trigwell, K. (1999). *Understanding learning and teaching: The experience in higher education*. Buckingham: Society for Research into Higher Education and Open University Press.

Rommetveit, R. (1978). On the negative rationalism in scholarly studies of verbal communications and dynamic residuals in the construction of human intersubjectivity. In M. Brenner, P. Marsh, & M. Brenner (Eds.), *The social contexts of method* (pp. 16-32). London: Croom Helm.

Ryve, A. (2006). Making explicit the analysis of students' mathematical discurses – Revisiting a newly developed methodological framework. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 191-210.

Scheja, M. (2002). *Contextualising studies in higher education. First-year experiences of studying and learning in engineering.* PhD thesis, Department of Education, Stockholm University.

Scheja, M. (2006). Delayed understanding and staying in phase: Students' perceptions of their study situation. *Higher Education*, *52*, 421-445.

Schutz, A. (1967). *The phenomenology of the social world*. New York: Northwestern University Press.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*, 404-411.

Säljö, R. (1979). *Learning in the learner's perspective I. Some common-sense conceptions.* Reports from the Department of Education (no. 76), University of Gothenburg.

Säljö, R. (1982). *Learning and understanding. A study of differences in constructing meaning from a text*. Gothenburgh: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Säljö, R. (1991). Piagetian controversies, cognitive competence, and assumptions about human cognition. *Educational Psychology Review, 3*(2), 117-126.

White, R. T. (1994). Commentary. Conceptual and conceptional change. *Learning and Instruction*, *4*, 117-121.

Wistedt, I. (1994a). Everyday common sense and school mathematics. *European Journal of Psychology of Education*, *9*(1), 139-147.

Wistedt, I. (1994b). Reflection, communication and learning mathematics: A case study. *Learning and Instruction*, *4*, 123-138.

Wistedt, I. (1998). Assessing student learning in gender inclusive tertiary mathematics and physics education. *Evaluation and Program Planning*, *21*, 143-153.

Wistedt, I., & Brattström, G. (2005). Understanding mathematical induction in a co-operative setting: Merits and limitations of classroom communication among peers. In A. Chronaki, & I. M. Christiansen (Eds.), C*hallenging perspectives on mathematics classroom communication* (pp. 173-203). Greenwich, CT: Information Age Publish.

Artikel 3

Accepterad för publicering i
Nordisk Matematikdidaktik (NOMAD)

Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang

En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift

Kerstin Pettersson

Studiens syfte är att visa hur en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang kan gestalta sig i en problemlösningsprocess. Studien visar att universitetsstudenter redan under sitt första år av matematikstudier förmår utnyttja en sådan växelverkan. En grupp studenter har arbetat med en analysuppgift som berör begreppen funktion och derivata samt inkluderar ett induktionsbevis. Studenterna utnyttjar i den kreativa processen intuitiva idéer och formella resonemang i ett dynamiskt samspel. Växlingarna har ett flertal funktioner: att kontrollera intuitiva uppfattningar, att skaffa nya utgångspunkter för problemlösningsprocessen, att ekonomisera resonemang och att driva arbetet vidare.

Formella resonemang som bottnar i definitioner och satser är en fundamental del av matematiken, men ett kreativt matematiskt resonemang kan inte enbart vila på formalism (Fischbein, 1987). För att hitta vägar till lösningen av ett matematiskt problem behövs även ett samspel med intuitiva idéer (Hanna, 1991). I den här studien står studenters begreppsuppfattningar i fokus så som de kommer till uttryck i arbetet med en matematisk uppgift. Syftet är då inte främst att kartlägga eller kategorisera studenternas uppfattningar av de begrepp som aktualiseras i arbetet (för en översikt av studier inom en sådan tradition, se Duit, 2006). I sådana studier jämförs de förekommande begreppsuppfattningarna med vetenskapligt vedertagna uppfattningar och studierna får därmed en mer eller mindre tydlig normativ prägel. I denna studie har ett annat perspektiv valts, ett perspektiv som syftar till att lyfta fram hur studenter nyttjar de begreppsuppfattningar de har och hur de, trots begränsningar i din begreppsrepertoar, besitter en avsevärd potential för matematiskt arbete. Resultaten visar att universitetsstudenter redan under sitt första år av matematikstudier förmår utnyttja ett samspel mellan intuitiva idéer och formella resonemang på ett sätt som i mångt och mycket liknar den process som vi kan finna hos tränade matematiker.

Teoretiska utgångspunkter

Formella resonemang och intuitiva idéer

Den formella sidan av matematiken utgörs av axiom, definitioner, satser och bevis. Med kedjor av logiska slutledningar byggs den formella delen av matematiken upp utgående från grundläggande definitioner och axiom. Genom logisk slutledning kan ytterligare egenskaper hos de matematiska objekten härledas och samband mellan de matematiska objekten undersökas. Formella resonemang utgör en viktig del av matematikens struktur för att fastlägga och förtydliga resultat. *Formella resonemang*, så som de definieras i denna text, *är logiska slutledningar som vilar på formella definitioner och satser*.

Resonemang som inte är formella, det vill säga inte fullt ut redovisar den logiska slutledningen eller dess utgångspunkter, kan betecknas som informella resonemang. Distinktionen formell–informell används till exempel av Pinto och Tall (1999) där resonemang klassificeras som informella då resonemangen inte utgår från de formella definitionerna utan baseras på individens begreppsuppfattning där de formella delarna utelämnas och resonemangen tar stöd i intuitiva idéer. Var gränsen går mellan ett informellt och ett formellt resonemang är delvis beroende av kulturella och kontextuella omständigheter. Att inte absolut kunna avgöra om ett resonemang är tillräckligt preciserat för att utgöra ett formellt resonemang kan uppfattas som en brist. Fokus för denna studie är dock hur studenter rör sig i spannet mellan formella resonemang och resonemang som tar stöd i intuitiva idéer.

Intuition är, enligt Fischbein (1987, 1999), något som skapas och utvecklas i studenters möten med till exempel matematiska objekt. I dessa möten skapas en mental representation av objektet. Denna representation är inte statisk utan produceras och reproduceras i de sammanhang där den aktualiseras. En inre föreställning skapas där matematiska begrepp uppfattas på ett sådant sätt att det blir möjligt att omedelbart och utan medveten tillgång till alla detaljer tolka och använda begreppen. Resonemang kan då göras utan att man behöver vila på de formella definitionerna. Fischbein definierar intuition som en slags kognition som för individen uppfattas som självklar. Intuition karaktäriseras dessutom av ytterligare egenskaper som omedelbarhet (uppfattas direkt i sin helhet), säkerhet (ger en övertygelse), extrapolerbarhet och globalitet (intuitiva idéer sträcker sig längre än det empiriska underlaget). Intuitiva idéer karaktäriseras också som tvingande i meningen att de genom sin självklarhet exkluderar andra tolkningsalternativ.

Med stöd i Fischbeins (1987, 1999) teorier definieras i denna studie *intuitiva idéer* som *en slags kognition som ger möjlighet till en omedelbar uppfattning där alla delar uppfattas direkt och tillåter resonemang utan att man behöver vila på det formella.* De mentala representationerna av denna kognition kan ses som inre föreställningar. Ibland kan dessa inre föreställningar också ges en yttre representation i exempelvis en skiss av en graf för en funktion som i någon mening utgör ett generiskt exempel. I dessa fall ligger den geometriska tolkningen eller den visuella representationen väldigt nära, och kanske till och med utgör, den intuitiva idén.

Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang

Fischbein (1994) påpekar att man vid analyser av studenters matematiska beteende måste beakta tre basala aspekter av den matematiska aktiviteten: den formella, den algoritmiska och den intuitiva aspekten. Interaktionen mellan dessa tre aspekter är enligt Fischbein mycket komplex. För att studera denna komplexa interaktion kontrasterar Fischbein de tre aspekterna parvis mot varandra. Jag har i denna studie valt att studera två av dessa aspekter, den formella och den intuitiva, och fokusera på samspelet dem emellan.

En av de relativt få undersökningar som behandlar hur studenter förhåller sig till dessa två aspekter är en studie redovisad av Pinto och Tall (1999, 2002). De klassificerar studenters lärandestrategier som tillhörande en av två kategorier: studenter skapar mening antingen genom att främst utgå från intuitiva idéer (*giving meaning*) eller utgående främst från formella definitioner och satser (*extracting meaning*). Studien visar att studenter har preferens för en av strategierna. En förklaring till detta kan vara att studenterna har sin styrka antingen i intuitiva uppfattningar eller i formella kunskaper. Moore (1994) visar i en studie att en anledning till att studenter misslyckas med att genomföra formella bevis är att de inte behärskar begreppens formella definitioner. En annan anledning är att studenterna saknar eller har för svaga intuitiva uppfattningar om begreppen. Hanna (1991) påpekar att det finns en fara i att studenter arbetar för formellt, det finns då en risk att de bara manipulerar symboler. Fischbein (1987) behandlar det omvända problemet med för starka intuitiva uppfattningar och påpekar att studenterna måste lära sig hantera samspelet mellan formellt bevisade förhållanden och intuitiva idéer.

Studenters preferenser för olika strategier kan eventuellt också förklaras av vilka lärsituationer studenterna mött under sin studietid. Studier av läroböcker (Lithner, 2004; Raman, 2002) visar att studenter genom dessa böcker inte erbjuds så många tillfällen att utveckla intuitiva uppfattningar om begreppen. En mycket stor del av uppgifterna i läroböcker är av algoritmisk karaktär och kan lösas genom imitation av typexempel. Detta gäller även uppgifter som ges i prov och tentamina (Bergqvist, 2006; Boesen, 2006). Framställningsform och urval av uppgifter i läroböcker och prov ger inte studenterna incitament att koppla samman formella definitioner med mer intuitiva karakteriseringar av begrepp.

Relationen mellan intuitiv och formell kunskap diskuteras ofta i termer av att en klyfta finns dem emellan (t.ex. Bergsten, 2004; Sirotic & Zazkis, 2007). Mamona-Downs (2001) och Farmaki och Paschos (2007) diskuterar hur ett lämpligt didaktiskt angreppssätt kan överbrygga denna klyfta och stödja studenter i en övergång från intuitiva antaganden till ett formellt resonemang. Bergsten (2004) menar att ”*the didactical choice is not between exploiting the gap between intuitive/informal and formal knowledge by building on the one side for the profit of the other, but to engage in a kind of ping-pong procedure of reconstruction and refinement*”. Det är just en sådan växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang som denna studie fokuserar. Med utgångspunkt i ett perspektiv där vi främst är intresserade av att söka den potential studenterna kan uppvisa sätts fokus på att visa hur växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang kan gestalta sig i en problemlösningsprocess. Kan förstaårsstudenter utnyttja en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang och vilken funktion har i så fall dessa växlingar?

Metod

Intentionell analys

Intuitiva idéer som de definieras i denna studie är mentala objekt som inte är direkt åtkomliga för observation. Med syftet att beskriva hur växlingar mellan intuitiva idéer och formella resonemang gestaltar sig behövs därför en analysmetod där studenternas idéer och resonemang kan tolkas med utgångspunkt från vad studenterna säger, skriver och gör. Med en konstruktivistisk grundsyn och ett kontextualiseringsperspektiv (Halldén, 1999; Nilsson, 2006) krävs en metod som ger en sammanvägning av kognitiva och situationella aspekter på skeendet. Med dessa ställningstaganden som grund har jag valt att använda *intentionell analys* (för en noggrann redovisning av metoden se Halldén, 2001; Halldén, Haglund, & Strömdahl, 2007; Pettersson, 2004; Ryve, 2006; Scheja, 2002; Wistedt & Brattström, 2005). Denna metod har stora likheter med den tolkande verksamhet som vi alla använder i vårt dagliga liv när vi försöker förstå människors agerande och bygger i huvudsak på von Wrights studier av vad som karakteriserar mänskligt handlande. Enligt von Wright (1971) måste man för att förstå vad en individs agerande betyder se det som ett medel för individen att uppnå ett mål. När vi ser någon springa på trottoaren samtidigt som en buss närmar sig tolkar vi situationen som att personen försöker hinna med bussen. Vi tillskriver individen en intention och det är i ljuset av denna intention som agerandet (springandet) blir meningsfullt och kan beskrivas som en handling (skynda sig till bussen).

Med hjälp av intentionell analys skapar vi en *modell* där det observerade agerandet tolkas genom att tillskriva intentioner. Vi modellerar verkligheten för att försöka förstå vad som händer på samma sätt som en tillämpad matematiker skapar modeller för bakterietillväxt, spridning av luftföroreningar eller andra problem man önskar studera. I modellen använder vi begreppet *handling*. Detta begrepp reserveras för arbetet inom modellen och ska inte förväxlas med beskrivningar av verkligheten som görs i termer av *agerande, beteende och aktiviteter*. Intentionalitet utgör ett grundantagande för modellen. Med intention menar vi inte här nödvändigtvis en medveten mental akt hos aktören. Genom att studera faktorer som kan tänkas påverka individen att agera på ett visst sätt kan vi tolka det som sker. I analysen söker vi ett fält av sammanlänkade fakta. Samma agerande, till exempel en serie enskilda beteenden som ”går mot ett fönster, lyfter handen, griper i handtaget, skjuter fönstret utåt, …” kan ges flera förklaringar: individen agerar så *för att* vädra eller *för att* släppa ut en fluga. Ett exempel på agerande hämtat från denna studie är ”ritar ett koordinatsystem, skissar en graf, markerar ett nollställe” vilket kan ges förklaringarna: individen agerar så *för att* pröva ett enstaka exempel eller *för att* illustrera en intuitiv idé. Detta *för-att*-motiv är avgörande för vilken beskrivning som passar in i modellen. Vi söker den handling som gör enskilda beteenden rimliga och meningsfulla i ljuset av en avsikt, ett mål som individen försöker uppnå. Intentionell analys innebär just att på detta sätt systematiskt göra en tolkning av det betraktade skeendet. Tolkningens giltighet, validitet, får mätas mot det stöd tolkningen får av det empiriska materialet som samlats till exempel genom observationer samt av relevant teoribildning.

Den intentionella analysen ger en möjlighet att väga samman kognitiva och diskursiva aspekter vid tolkningen av data. För tolkningar av studenters matematiska ageranden innebär det att vi kan analysera studenternas förmågor och föreställningar om begreppen samtidigt som vi tar hänsyn till studenternas uppfattningar om situationen. Genom att ta hänsyn även till dessa kontextuella faktorer kan vi få en mer nyanserad bild av individens kognitiva förmåga (Halldén, Haglund & Strömdahl, 2007).

En problemlösningssituation

För att studera samspelet mellan intuitiva idéer och formella resonemang har jag valt att försätta en grupp universitetsstudenter i en problemlösningssituation. Uppgiften som valts innefattar begrepp som funktion, nollställe och derivata. Detta är begrepp som studenterna mött redan före sina universitetsstudier och dessutom ytterligare arbetat med under det första årets matematikstudier på universitetet. Det innebär att det är rimligt att tro att studenterna har utvecklat intuitiva idéer för dessa begrepp. Uppgiften är inte av standardtyp så studenterna kan inte direkt utnyttja någon algoritmisk lösningsstrategi. Uppgiften ger dock en specifik uppmaning om att problemlösningen ska innehålla ett induktionsbevis. Induktionsbevis är en typ av bevisföring som studenterna mött i sina kurser under det första årets universitetsstudier. Övningar i hur sådana bevis ska utföras har ingått i kursernas övningsmaterial (Vretblad, 1995, s. 72-77). Den för studien valda uppgiften ger därmed goda förutsättningar för att både intuitiva idéer och formella resonemang ska utgöra delar av problemlösningsprocessen.

Låt f vara en funktion definierad på hela ***R****.*

a) *Hur många nollställen kan funktionen högst ha om för alla x gäller att* $f'(x) \neq 0$*?*

b) *Om istället* $f''(x) \neq 0$ *vad gäller då för antalet nollställen till funktionen?*

c) *Om vi har* $f^{(n)}(x) \neq 0$ *vad kan då sägas om antalet nollställen till funktionen?*
Använd induktion för att bevisa ert påstående.

I uppgiften finns inte mer angivet om funktionen än att den är definierad för alla reella tal. Att n:te derivatan är skild från noll för alla x kan tolkas som att funktionen är n gånger deriverbar för alla x men det är ingen helt självklar tolkning. Mitt val att inte tydligare specificera funktionen gör att det blir en del av problemlösningen att diskutera vilka förutsättningar som ska gälla.

Studien genomfördes med tre grupper av studenter som frivilligt anmält sig att medverka. I denna artikel närstuderas en av dessa, en grupp där datamaterialet erbjöd ett rikt underlag för att belysa den aktuella frågeställningen. Problemlösningen genomfördes utanför den schemalagda undervisningen och studenterna informerades om att studien skulle komma att ingå som en del i min forskning om studenters begreppsuppfattningar. Gruppen bestod av fyra studenter, två kvinnor och två män, här presenterade som Alex, Beth, Carl och

Diana. De fyra följde alla ett matematikprogram vid ett svenskt universitet. Tre av dem var, när studien genomfördes, i slutet av sitt första studieår och hade under året studerat tillsammans. En av gruppmedlemmarna, Beth, gick i en högre årskurs men läste vid problemlösningstillfället samma kurs i flervariabelanalys som de andra tre. Gruppen fick inga tidsramar för sitt arbete utan instruerades att arbeta så länge de själva önskade. De kom att arbeta i 115 minuter. Gruppens arbete dokumenterades genom videoinspelning utan närvarande observatör. Samtalet har transkriberats i sin helhet och även de anteckningar som studenterna gjorde ingår i underlaget för tolkningen av gruppens arbete.

Resultat

Innan en presentation av analysen av studenternas samtal ges här först en kort beskrivning av hur studenterna löser uppgiften. Fokus då blir hur studenterna genomför induktionsbeviset och därför följer en kort rekapitulering av den huvudsakliga idén för ett induktionsbevis. För en utförligare presentation av gruppens arbete, se Pettersson (2004).

Studenternas bevis

Studenterna formulerar tidigt i sin diskussion en korrekt hypotes:

***Hypotes**: Om* $f^{(n)} \neq 0$ *så har f högst n nollställen.*

Studenterna utnyttjar efter ett tag idén att studera vad som gäller då derivatan f' har *m* nollställen. De övertygar sig om att funktionen då kan ha högst $m+1$ nollställen. Detta kan ses som ett lemma:

***Lemma**: Om* f' *har m nollställen så har f högst m+1 nollställen.*

Studenterna använder argument från en figur (se fig. 3) samt hänvisar till satsen om mellanliggande värden. Ett påstående som följer av lemmat utnyttjas av studenterna; vi kan se det som en följdsats även om studenterna inte själva använder den benämningen:

***Följdsats**: Om* $f^{(p)}$ *har (högst) m nollställen så har* $f^{(p-1)}$ *högst m+1 nollställen.*

Studenternas slutliga bevis för hypotesen kan beskrivas som följer:

***Studenternas bevis:** Antag att* $f^{(p)} \neq 0$. *Med hjälp av det vi kallat följdsats följer då att* $f^{(p-1)}$ *har högst ett nollställe. Samma resonemang upprepat ger att* $f^{(p-2)}$ *har högst två nollställen. Upprepning på detta sätt ger till sist att f har högst p nollställen.*

Gruppen producerar inte någon skriftlig lösning men i deras resonemang finns alla ingredienser till ett fullständigt bevis.

Ett induktionsbevis

Låt oss kort rekapitulera den huvudsakliga idén för induktionsbevis:

> Låt P_n vara ett påstående för varje naturligt tal *n*, det vill säga för $n = 1,2,3...$. Påståendet *"P_n gäller för alla (positiva) naturliga tal"* sägs vara bevisat med induktion om påståendet P_n på något sätt härleds från de föregående, det vill säga från $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$.

I många fall, troligen i alla de fall studenterna mött tidigare, kan P_n härledas från P_{n-1} och beviset kan då genomföras på följande sätt: Verifiera först P_1 och visa sedan att P_{n-1} medför P_n. Detta ger tillsammans ett fullständigt bevis. För studenterna verkar detta ge känslan av en process som går från lägre till högre, eller "uppåt". I de fall när P_n är av formen $A_n \Rightarrow B_n$, vilket gäller i uppgiften i denna studie, är den naturliga bevisgången att först visa att A_n ger A_{n-1}. Föregående påstående $A_{n-1} \Rightarrow B_{n-1}$ ger därefter B_{n-1} och det återstår att visa att $B_{n-1} \Rightarrow B_n$. Studenternas arbete med att visa att A_n ger A_{n-1} verkar ge studenterna intrycket av en rörelse från högre till lägre, eller "neråt".

För att möjliggöra induktionsprocessen måste det finnas någon form av relation mellan de olika påståendena P_n. I många fall är den avgörande punkten att komma underfund med hur denna relation kan utnyttjas praktiskt i härledningen av P_n från P_{n-1} (eller eventuellt från $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$). I detta fall är nyckeln att $f^{(n)}$ är derivatan av $f^{(n-1)}$. Så snart denna nyckel har hittats gäller i de flesta fall studenterna mött att bevisen inte kräver några nya idéer utan endast viss teknisk färdighet för att genomföra de beräkningar som återstår. För denna uppgift krävs däremot ytterligare idéer för att beviset ska kunna genomföras, lemmat och följdsatsen är de idéer studenterna utnyttjar[1].

Formella resonemang

Studenterna har en klar bild av den formella gången i ett induktionsbevis.

Carl: *Då ska man ha ett basfall först, ... Börjar vi på f prim x eller börjar man på, det finns ingen f noll x va?*

Gruppen enas om att börja med $f'(x)$ och genomför ett resonemang som hänvisar till medelvärdessatsen. När gruppen kommer till induktionsantagandet har de formella kunskaper för hur detta ska göras men de känner sig inte bekväma med ett sådant antagande.

Carl: *Så vi antar alltså det här för något p då. För något p så gäller att $f^{(p)}(x) \neq 0$ och då så gäller att f har p stycken nollställen. Det här känns ju livsfarligt tycker jag, men det funkar ju, det är ju så…*

Här saknas preciseringen att det handlar om *högst p* nollställen. Vi skulle därmed kunna kritisera det formella resonemanget eftersom det brister i precision. Men vi kan senare i studenternas samtal se att preciseringen återkommer när den blir kritisk för resonemanget. Genom hela problemlösningsprocessen är studenterna bekymrade eftersom de upplever att det bevis de skapar inte följer den mall de mött i tidigare undervisning. De är vana att i induktionssteget arbeta från p till $p+1$. De upplever att deras bevis innehåller en rörelse i motsatt riktning. Särskilt en av studenterna, Beth, påpekar lärobokens mall gång på gång.

Beth: *Man antar väl det här liksom så, men sen så lägger man till, steget ovanför… men då ska det ändå bli liksom, antagandet liksom. Det är väl så… principen är.*

Beths kommentarer indikerar att hon uppfattar lärobokens mall för induktionsbevis som en algoritm som måste följas slaviskt. Detta stör och hämmar vid flera tillfällen gruppens problemlösningsprocess. Men studenterna diskuterar också hur bundna de måste vara av dessa krav på induktionsbeviset.

Carl: *När vi hade det på baskursen så var det ju väldigt viktigt vilket håll man gick åt, men det känns ju som att det egentligen inte ska spela någon roll, om man vet att man landar någonstans.*

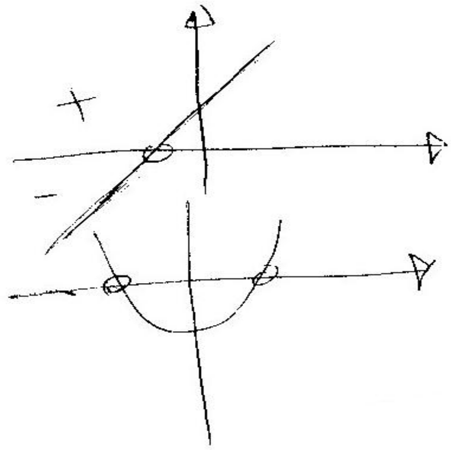
De formella kraven har också en positiv påverkan på gruppens arbete. Förutom att de leder till att studenterna kontrollerar och verifierar sina idéer så driver studenternas krav på formalisering också problemlösningsprocessen vidare. Kommentarer som ”*Hur kan man visa det då?”* och *”Och om man skulle göra detta formellt…”* leder till att studenterna breddar och fördjupar sitt sökande efter idéer.

Intuitiva idéer

I studenternas diskussioner behandlas begrepp som funktion, derivata, andraderivata, nollställe, växande och avtagande.

Diana: *Om derivatan inte får vara noll, så får derivatan alltså inte byta tecken.*
Beth: *Och då är den växande.*
Diana: *Ja, växande, eller avtagande.*
[…]
Diana: *Då betyder $f'' \neq 0$ att derivatan är växande eller avtagande.*
Carl: *Mm.*

Diana: *Vilket betyder att derivatan får byta tecken högst en gång.*
Alex: *Men den behöver inte byta tecken?*
Diana: *Nä, alltså högst en gång, det är ju det vi snackar om här.*
Beth: *Om den byter högst en gång då, hur ...*
Diana: *... och då ser derivatan ut så här,* (ritar, se fig. 1) *och då är den minus där och plus där.*
[…]
Diana: (ritar funktionen, se fig. 1) *Så blir det, va?*
Beth: *Då blir det högst…*
Alla unisont: ... två.



Figur 1. Dianas bild av derivatan och funktionen där derivatan byter tecken en gång och funktionen har två nollställen.

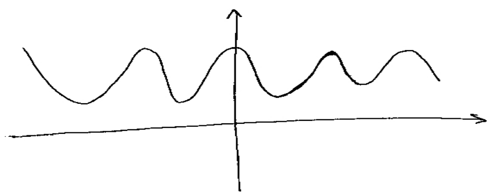
Diana ritar två grafer där den övre illustrerar derivatan (se fig. 1). Derivatan är först negativ (markeras av Diana med ett minustecken) och blir sedan positiv (markeras med plustecknet). Derivatan har ett nollställe (inringat). Den undre delen av figuren är Dianas bild av funktionen med funktionens två nollställen markerade. Det är inte med någon större noggrannhet hon placerar funktionens minimipunkt och inte heller y-axeln är placerad helt korrekt. Det är ändå en rimlig tolkning att denna snabbt ritade skiss speglar hur derivatans tecken och nollställe påverkar funktionens utseende.

Studenterna visar genom sina diskussioner att de har och utnyttjar intuitiva idéer för de begrepp som berörs. Studenterna uppfattar dessa begrepp på ett omedelbart och självklart sätt och tillåter sig att resonera runt dessa utan att vila på det formella.

Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang

I detta avsnitt ges två längre utdrag från gruppens samtal. Gruppen har innan det första utdraget arbetat i 15 minuter och under denna tid löst de inledande deluppgifterna. De har också formulerat en hypotes och börjat diskutera hur denna ska kunna bevisas men de är osäkra på hur den bevisidé de har ska kunna formaliseras. De övergår därför till en inventering av vad deras uppfattningar om begreppen derivator och funktioner kan tillföra problemlösningen.

[1] *Diana:*	*Men fortfarande, hur kan vi visa det? Vi kan derivera den där liksom, så får vi den där* (pekar i Carls anteckningar på $f^{(n)}(x) \neq 0$ respektive $f^{(n+1)}(x) \neq 0$)
[2] *Carl:*	*Mm.*
[3] *Diana:*	*Ja.*
[4] *Carl:*	*Ja, precis.*
[5] *Carl:*	*Och så, antingen är det färdigt eller så är det jättesvårt.* (skratt)
[6] *Beth:*	*Ja, vi har väl principen hur det liksom ska fungera…*
[7] *Diana:*	*Om den är skild från noll, vad innebär det då för derivatan? Och om* ***funktionen*** *är skild från noll, vad innebär det då? …om derivatan?* (ritar)
[8] *Carl:*	*Nej, just det…*
[9] *Diana:*	*Det säger ju ingenting, eller liksom, det säger ju…*
[10] *Carl:*	*Nej det säger ju inte någonting…*
[11] *Beth:*	*Nej, det kunde högst vara ett nollställe, men den kanske inte har något nollställe liksom, och derivatan ändå…*
[12] *Diana:*	*Nej.*
[13] *Alex:*	*Men, men...*
[14] *Alex:*	*Det säger väl visst någonting, om en funktion är…*
[15] *Diana:*	*Nej.*
[16] *Alex:*	*… skild från noll då säger det att, då korsar den inte…*
[17] *Beth:*	*Nej, den korsar inte.*
[18] *Alex:*	*Den korsar inte. Och då måste den vara antingen växande eller avtagande.*
[19] *Diana:*	*Den kan väl gå så här?* (ritar, se fig. 2) *x-axeln kan ju alltid ligga under, säger ju ingenting, funktionen kan ju hoppa och ha sig lite hur som helst här.*



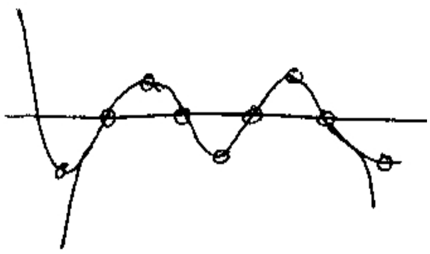
Figur 2. Dianas bild av en funktion som saknar nollställen.

I yttrande [7] försöker Diana relatera begreppen funktion och derivata. Hon frågar vad det innebär att funktionen är skild från noll. Flera av yttrandena innehåller obestämda referenser. Vad syftar *den* på i utsagan ”*Om den är skild från noll*”? I formuleringen av uppgiften studenterna arbetar med anges $f^{(n)}(x) \neq 0$, så det är rimligt att anta att det är *n*:te derivatan som åsyftas. Vi kan också se att Diana i yttrande [1] talar om $f^{(n)}(x)$. När hon sedan frågar vad detta innebär för derivatan är det rimligt att anta att det är derivatan av $f^{(n)}(x)$ som avses. Detta stöds av yttrande [1] eftersom derivatan av $f^{(n)}(x)$ är $f^{(n+1)}(x)$. Om så är fallet varför övergår Diana då till att fundera över vad avsaknad av nollställen hos funktionen har för effekt? En rimlig tolkning är att Diana döper om $f^{(n)}(x)$ och istället benämner detta *funktionen*. Att döpa om objekt är ett vanligt arbetssätt för matematiker och ger möjlighet till nya utgångspunkter för problemlösningen. För tolkning av ”*...om derivatan?*” blir det viktigt med intonationen. Transkriberingen är här inte tillräckligt tydlig, men en återgång till videofilmen styrker tolkningen att Diana menar ”*för derivatan*”. Det är inte fundering över ett nytt fall utan hon avser en fortsättning på frågeställningen om funktionens påverkan på derivatan. Med tolkningen att Diana har döpt om $f^{(n)}(x)$ till funktionen blir då ”*derivatan*” liktydig med $f^{(n+1)}(x)$. Genom att byta benämning kan Diana utnyttja de intuitiva idéer hon har för funktion och derivata. När hon ritar en bild av en graf (fig. 2) är det på ett omedelbart och självklart sätt, utan hänvisningar till formella definitioner och satser, som hon utnyttjar dessa intuitiva idéer.

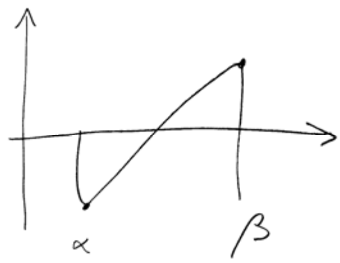
Dianas slutsats av undersökningen blir att ingen information kan fås på detta sätt. Carl och Beth håller med men Alex har invändningar. I yttrande [14] och [16] säger Alex ”*om en funktion är skild från noll då säger det att, då korsar den inte...*”. Här är referenserna mycket oklara. Det är rimligt att anta att *den* syftar på funktionen och att den inte korsar *x*-axeln. Att det är funktionens korsning med *x*-axeln som åsyftas stöds också av yttrande [19]. Men med denna tolkning blir yttrande [18] svårt att rimliggöra. ”*Och då måste den vara antingen växande eller avtagande.*” Om *den* fortfarande syftar på funktionen drar Alex en felaktig slutsats. En annan möjlig tolkning skulle vara att *den* syftar på derivatan. Att en funktion saknar nollställen ger inte att derivatan är växande eller avtagande, däremot gäller det omvända att om derivatan saknar nollställen så är funktionen antingen växande eller avtagande. En rimlig tolkning blir att Alex inte just här uppvisar begreppsuppfattningar för funktion och derivata som räcker i denna problemlösningssituation. För att validera tolkningen krävs dock mer data än vad som finns i det här redovisade utdraget.

Som ytterligare ett exempel på hur materialet har analyserats presenteras ett utdrag från senare delen av studenternas samtal. Gruppen har innan detta utdrag arbetat i 80 minuter. Här diskuterar studenterna ett delproblem, det som jag i beskrivningen av studenternas bevis benämnt lemma.

[1] *Carl:*	*Om p:te derivatan har n nollställen och, den primitiva funktionen till den har max n plus ett nollställen, om vi skulle veta det, …*
[2] *Beth:*	*Mm.*
[3] *Carl:*	*… och vi vet att, att n:te, eller p:te derivatan, den har inga nollställen, då vet vi i så fall att, nästa …*
[4] *Diana:*	*… har max ett.*
[5] *Carl:*	*… har max ett nollställe, och så måste vi med induktion kunna fortsätta och säga att om* ***den*** *har max en då har* ***den*** *max två,* ***den*** *max… och faktiskt säga nånting. Det måste vara en riktig induktion…*
[6] *Diana:*	*Ja ja, man vet att den implicerar ju den som i sin tur implicerar den som implicerar den och så.*
[7] *Carl:*	*Mm. Och sen så tycker jag att om man säger att, det här är, en funktion,* (ritar, fig. 3) *så om vi har nollställen på derivatan…*
[8] *Beth:*	*Mm.*
[9] *Carl:*	*… ja, dom där är inte så bra att ta med egentligen, dom skulle bara gå ner så där egentligen* (ändrar i den figur han ritat, se fig. 3). *Om vi har tre nollställen för derivatan då kan vi* ***högst*** *ha fyra stycken. Även om det här kanske inte var ett bra formellt bevis så känns det som att jag blir väldigt övertygad om att det* ***är*** *så, …*
[10] *Diana:*	*Ja.*
[11] *Beth:*	*Jo det är sant.*
[12] *Carl:*	*… och då så stämmer det och då så stämmer det alltihop.*
[13] *Diana:*	*Mm.*
[14] *Carl:*	*Och om man skulle göra det här formellt, …*
[15] *Diana:*	*Det där går ju att bevisa, liksom* ***den****…*
[16] *Carl:*	*… det är ju egentligen det där som är för ett nollställe, i intervall måste det ju vara, …*
[17] *Diana:*	*Mm.*
[18] *Carl:*	*… och att om en funktion är strängt växande eller strängt avtagande i ett intervall och den börjar på ena sidan...*
[19] *Diana:*	*Mm.*
[20] *Carl:*	*… så där* (ritar, se fig. 4). *Den måste ha ett nollställe då, om…*
[21] *Diana:*	*Ja, ja men det är ju liksom så här enligt så här…*
[22] *Carl:*	*… alfa till beta och medelvärdessatsen.*
[23] *Diana:*	*Ja…*
[24] *Carl:*	*… och sånt. Och att den måste…*
[25] *Diana:*	*Ja och mellanliggande värde.*
[26] *Carl:*	*Ja, mellanliggande värde också, ja just det.*
[27] *Diana:*	*Ja, och om derivatan är positiv så är den växande, och det vet vi och så det behöver vi inte, krångla med, tror jag. Men, ja…*
[28] *Beth:*	*Jag sitter helt tyst, för jag tycker de här grundgrejorna de förstår man ju, men man ska bevisa med induktionen nånting liksom, det känns som man bara bollar med samma saker och jag förstår inte hur man ska få det på rätt sätt då.*



Figur 3. Carls bild av en funktion där funktionens och derivatans nollställen är markerade.



Figur 4. Carl illustrerar satsen om mellanliggande värden.

Carl uttalar i [1] en hypotes: Om $f^{(p)}$ har n nollställen så har $f^{(p-1)}$ maximalt $n+1$ nollställen. Yttrande [3] lägger till att i detta fall ska n vara noll. Av detta ska då, enligt Carls yttrande [5], en slutsats kunna dras om antal nollställen för funktionen f. Slutsatsen formuleras inte men en rimlig tolkning är att slutsatsen är samma som den hypotes gruppen tidigt i sitt arbete slog fast: Funktionen f kan ha högst n nollställen. Carl säger i [5] att ”*det måste vara en riktig induktion*”. Han verkar övertygad men går ändå vidare.

I yttrande [9] ritar Carl en figur över en funktion (se fig. 3). Denna figur kan tolkas som ett generiskt exempel där en intuitiv idé kommer till uttryck. Exemplet kan generaliseras till godtyckligt antal nollställen. Funktionen är också vald så att möjliga fall täcks in. Det kan därför ses som en rimlig tolkning att Carl här inte bara prövar ett enda exempel utan ser det generella i exemplet. En tänkbar tolkning av agerandet kan då vara att Carl försöker övertyga sig själv om sanningshalten i hypotesen. Carl säger sig bli väldigt övertygad om att hypotesen stämmer men söker därefter ändå ett sätt att formalisera den intuitiva idén. Vid försöken att formalisera gör Carl i [16] ett uttalande där han påstår att nollställena måste ligga i intervall. Yttrandena [18]–[25] innehåller kopplingar mellan exemplets funktion uppdelad i intervall och formella satser som behandlar kontinuerliga funktioner på intervall. En rimlig tolkning är att studenterna här letar efter formella definitioner och satser där de inblandade objekten finns representerade. I yttrande [20] och [22] extraherar Carl ut väsentliga delar i det han först kallar medelvärdessatsen och senare, efter Dianas kommentar i yttrande [25], satsen om mellanliggande värden. I Dianas yttrande [27] säger hon att ”*om derivatan är positiv så är den växande*” och ”*det behöver vi inte krångla med*”. En tolkning av detta kan vara att hon har en intuitiv idé om växande funktioner och därför inte har behov av ett formellt bevis. En annan möjlig tolkning är att hon menar att sambandet mellan positiv derivata och en växande funktion i denna kontext anses vara en del av den gemensamma matematiska kunskapen och så grundläggande att bevis inte krävs.

Beth uttrycker i [28] en osäkerhet i den formella hanteringen av induktionsbeviset. Hon har, som redan nämnts, under diskussionen vidhållit att induktionen bör göras på ett visst sätt. Hennes kommentar gör att de andra studenterna blir osäkra. De övergår då i en inventeringsfas och försöker befästa sina intuitiva idéer med hjälp av formella definitioner och satser.

Slutsatser och diskussion

Växlingar och deras funktioner

Analys av det empiriska materialet visar, som redovisats ovan, att dessa förstaårsstudenter utnyttjar en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang. I ett intentionellt perspektiv är det emellertid inte bara intressant att belysa *hur* studenter resonerar kring en given uppgift utan också *varför* de resonerar som de gör, vilken mening deras agerande kan sägas ha. Med stöd i det empiriska materialet kan vi inte bara ge exempel på växlingar, vi kan också beskriva växlingarnas funktion.

Växling till formella resonemang för att få stöd och kontrollera intuitiva idéer

Vi ser vid ett flertal tillfällen att studenterna lämnar sina intuitiva idéer och söker stöd i formella definitioner och satser. Carl har till exempel genom ett generiskt exempel övertygat sig om den uppställda hypotesens korrekthet. Men han går vidare och försöker formalisera sina idéer. Studenterna söker vid detta och andra tillfällen kopplingar mellan sina idéer och formella resultat för att befästa hypotesers korrekthet med formella argument men också för att säkerställa de intuitiva idéerna och kontrollera sina intuitiva uppfattningar. Studenterna tar också vid flera tillfällen stöd i den formella struktur som de uppfattat att induktionsbeviset innefattar. Växlingen från intuitiva idéer till det formella beviset leder därmed det kreativa arbetet framåt. Den formella strukturen blir en ledstång som gör att studenterna tar sig vidare.

Växling till intuitiva idéer för att få nya utgångspunkter för problemlösningen

När studenterna kör fast i försöken att formalisera sina intuitiva idéer söker de möjligheter till nya intuitiva utgångspunkter genom att växla från formella resonemang till intuitiva idéer. I resultatavsnittet presenterades en diskussion mellan Diana och Alex. Alex lämnar i diskussionen uttrycket ”*funktionen är skild från noll*”. Detta språkliga uttryck hänvisar till matematikens formella symbolspråk; $f(x) \neq 0$. Han övergår till att tala om att funktionen ”*inte korsar*” *x*-axeln. Detta uttryck refererar till en geometrisk eller visuell representation. Dessa representationsformer är vanliga för intuitiva idéer. Alex rör sig i spannet från ett formellt resonemang mot ett mer intuitivt med stöd i den geometriska representationen. Alex växlar perspektiv till en mer intuitiv uppfattning som öppnar upp för ett geometriskt, eller visuellt, resonemang. I resultatavsnittet ser vi också hur Diana övergår från att tala om $f^{(n)}$ till att bara tala om ”*funktionen*”. Genom att byta benämning till ett mer allmänt begrepp skaffar sig Diana tillgång till fler intuitiva idéer.

Växlingar för att reducera komplexitet

Exemplet ovan är också ett exempel på hur studenterna ekonomiserar sina resonemang. Dessa växlingar består i att först utelämna för tillfället överflödiga detaljer för att senare ta tillbaka dessa preciseringar när de verkligen behövs. Det finns i materialet flera exempel där studenterna blir mindre stringenta i sina resonemang. När de arbetar med uppgiften kan vi se att de vid ett flertal tillfällen utelämnar preciseringar som till exempel att funktionen har *högst n* nollställen. Studenternas sätt att uttrycka sig kan vid första anblicken synas slarvigt och ofullständigt men vi kan senare i studenternas samtal se att dessa preciseringar återkommer när de verkligen behövs. Diana utnyttjar också tekniken att döpa om objekt. Det är ett effektivt sätt att reducera komplexiteten i ett problem och är ett vanligt arbetssätt för matematiker.

Växlingar för att driva problemlösningsprocessen vidare

Analysen av studenternas arbete med uppgiften visar att studenterna har intuitiva idéer om de begrepp som uppgiften behandlar, idéer som de också använder i den kreativa delen av problemlösningen. Studenterna säger sig bli mycket övertygade om att deras hypoteser är korrekta när de tar stöd i dessa intuitiva idéer. Trots att studenterna säger sig vara övertygade av de intuitiva idéerna ställer de ändå stora krav på formalisering av sina idéer. Studenternas arbete handlar till stor del om hur de ska ta sig från sina intuitiva idéer till ett formellt bevis. De arbetar för att kunna presentera ett bevis formaliserat på det sätt som de anser vara korrekt men blir inte riktigt nöjda eftersom de inte tycker att deras bevis passar in i den mall de tidigare mött. Det är studenternas egna krav på formalisering som vid flera tillfällen driver dem vidare trots att de uttalar att problemet är löst. Vid något tillfälle räddar det dem från att presentera ett felaktigt bevis för sin hypotes. Vid flera tillfällen gör studenternas formaliseringskrav att de tränger djupare in i uppgiften och letar efter nya vägar i bevisprocessen och därmed hittar nya idéer. Studenternas starka krav på formalisering, och det att de vid flera tillfällen inte lyckas formalisera sina idéer på det sätt de själva önskar, leder också till att de vid flera tillfällen vidgar sitt sökande och vill stämma av sina intuitiva idéer. Mycket tydligt övergår studenterna då i en inventeringsfas och försöker befästa sina intuitiva idéer med hjälp av formella definitioner och satser. Studenterna söker också nya infallsvinklar för sitt intuitiva tänkande genom att gå tillbaka till formella definitioner och satser. De inventerar sitt förråd av relaterade begrepp och tolkningar. Växlingar mellan intuitiva idéer och formella resonemang driver på detta sätt problemlösningsprocessen framåt.

Växelverkan trots ensidiga uppgifter

Det är viktigt att studenter lär sig utnyttja men också att kontrollera sin intuition. Intuitiva idéer är nödvändiga för den kreativa processen men det är de formella bevisen som studenterna måste luta sig mot eftersom intuitionen kan vara missledande. Precis som Fischbein (1987, s. 209) påpekar måste studenter lära sig hantera samspelet mellan intuitiva idéer och formellt bevisade förhållanden. Vi har i denna studie sett många exempel på att studenterna klarar att hantera detta samspel och detta trots att de i undervisningen mött läroböcker av den typ Lithner (2004) och Raman (2002) har studerat, det vill säga böcker som i mycket liten utsträckning ger studenterna tillfälle att skapa kopplingar mellan intuitiva uppfattningar och formella definitioner och satser. Studenterna har ändå skolats in i hur en matematisk argumentation förs där dessa kopplingar är viktiga för det matematiska arbetet.

Ett dynamiskt samspel

I studien har vi detaljstuderat en grupp studenters arbete. Studenterna använder i problemlösningsprocessen möjligheten att skifta mellan olika perspektiv. Vi har sett hur studenterna utnyttjar en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang. Studenternas arbete med uppgiften visar att de på ett mångdimensionellt sätt förmår nyttja sina begreppsuppfattningar. Det finns en stor dynamik i det matematiska arbetet som också känns igen från hur en professionell matematiker bedriver ett kreativt arbete (se t.ex. Burton, 1999a, 1999b). Redan under sitt första studieår förmår studenterna utnyttja detta dynamiska samspel. I en undervisningssituation borde en fokusering på denna potential kunna ge lärare goda möjligheter att möta studenter i utvecklande samtal.

Referenser

Bergqvist, E. (2006). *Mathematics and Mathematics Education: Two Sides of the Same Coin*. PhD Thesis, Umeå University, Department of Mathematics and Mathematical Statistics.

Bergsten, C. (2004). Exploiting the gap between intuitive and formal knowledge in mathematics. Regular lecture at ICME 10, Copenhagen 2004 (to appear in the proceedings).

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: Comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. PhD Thesis, Umeå University, Department of Mathematics and Mathematical Statistics.

Burton, L. (1999a). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 37, 121-143.

Burton, L. (1999b). Why is intuition so important for mathematicians but missing from mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, 19(3), 27-32.

Duit, R. (2006). *Biography -STCSE. Students' and teachers' conceptions and science education*. Leibniz Institute for Science Education at the University of Kiel.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). The interaction between intuitive and formal mathematical thinking: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(3), 353-365.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In Biehler, Scholz, Strässer & Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 231-245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematics reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 11-50.

Halldén, O. (1999). Conceptual change and contextualization. In Schnotz, Vosniadou, & Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 53-65). Amsterdam: Pergamon Elsevier.

Halldén, O. (2001). Social konstruktionism, konstruktivism och intentionell analys som heuristiskt verktyg i kvalitativ analys. I O. Halldén, M. Scheja, & H. Jakobsson Öhrn, *Intentionell analys.* Forskningsrapporter från Pedagogiska institutionen, nr 65, Stockholms universitet.

Halldén, O., Haglund, L., & Strömdahl, H. (2007). Conceptions and contexts: On the interpretation of interview and observational data. *Educational Psychologist*, 42(1), 25-40.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 405-427.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics,* 27, 249-266.

Nilsson, P. (2006). *Exploring probabilistic reasoning - A study of how students contextualise compound chance encounters in explorative settings.* PhD Thesis, Växjö University.

Pettersson, K. (2004). *Samspel mellan intuitiva idéer och formella bevis*: *En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift.* Licentiatuppsats, Göteborgs universitet, Matematiska vetenskaper.

Pinto, M., & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. *Proceedings of the 23rd Conference of PME,* 3, 281-288.

Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. *For the Learning of Mathematics,* 22(1), 2-10.
Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: Student behavior and textbook messages. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 135-150.
Ryve, A. (2006). *Approaching mathematical discourse: Two analytical frameworks and their relation to problem solving interactions.* PhD Thesis, Mälardalen University, Department of Mathematics and Physics.
Scheja, M. (2002). *Contextualising studies in higher education.* PhD Thesis, Stockholm University, Department of Education.
Sirotic, N., & Zakis, R. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49-76.
Wistedt, I., & Brattström, G. (2005). Understanding mathematical induction in a co-operative setting: Merits and limitations of classroom communication among peers. In A. Chronaki, & I. M. Christiansen (Eds.), *Challenging perspectives on mathematics classroom communication* (pp. 173-203). Greenwich, CT: Information Age Publish.
Vretblad, A. (1995). *Algebra och kombinatorik*. Malmö: Gleerups.
von Wright, G. H. (1971). *Explanation and understanding*. Ithaca, NY: Cornell University Press.

Summary

The aim of this study is to describe the interaction between intuitive ideas and formal reasoning in a creative problem-solving process. A group of four university students worked on a task in calculus. The task included the concepts of function and derivative and required the use of proof by induction. The discussion between the members of the group was analysed in accordance with the principles of intentional analysis, a method by which we regard the students' activities as intentional. The results show that the students both had and used intuitive ideas relevant to the concepts brought to the fore by the task. During the group discussion all components of a complete proof was included in the students' reasoning. The students created a proof by induction which matched the ordinary pattern for such a proof, but they did not themselves regard it as a proof fitting into the ordinary scheme of argumentation as they remembered it from text-books and teaching. The students put heavy demands upon the formalization of their ideas and these demands were sometimes hampering the problem-solving process, but they also encouraged the students to expand their search for a solution to the problem at hand. The students used intuitive ideas and formal reasoning in a dynamic interplay. The interplay had several functions: to control intuitive conceptions, to offer a new basis of the reasoning, to reduce the complexity of the problem and to urge forward the problem solving process.

Noter

[1] Studenterna utnyttjar i sitt bevis att $f^{(p)}$ är derivatan av $f^{(p-1)}$. Det gäller dessutom att $f^{(p)}$ är $(p-1)$:te derivatan av f'. Som en anmärkning kan nämnas att detta samband kan användas för ett alternativt bevis. För att härleda P_p från P_{p-1} antar vi då att $f^{(p)} \neq 0$. Då gäller att $(p-1)$:te derivatan av f' saknar nollställen. Från P_{p-1} kan vi då dra slutsatsen att f' har högst $p-1$ nollställen. Lemmat ger då att f har högst p nollställen.