

Tentamen i Matematisk statistik, LKT325, 2010-08-26

Uppgift 1: Beräkna sannolikheten $P(A \cap B)$ om $P(A^c|B) = 0.3$ och $P(B^c) = 0.6$
(6 poäng)

Uppgift 2: Sannolikheten för att behöva kassera en balk p.g.a. dålig hållfasthet bedöms till 0.05. Antag att felen antas vara oberoende. Beräkna sannolikheten att minst två balkar av 20 måste kasseras, dels genom att använda den exakta fördelningen och dels genom att använda en lämplig approximation.
(6 poäng)

Uppgift 3: Anta att ett företag producerar 0.1% defekta enheter. Felen uppstår oberoende av varandra. Kvalitetskontrollen genomförs genom att man regelbundet väljer ut 100 enheter och kontrollerar dem.

- Vad är sannolikheten att man vid en kontroll inte får någon defekt enhet?
 - Antag att man genomför en kontroll vid tre olika tillfällen. Vad är sannolikheten att man vid åtminstone två av de tre tillfällena inte får några defekta enheter?
- (6 poäng)

Uppgift 4: Den tid i timmar det tar för en viss platschef att intervjua arbetssökanden är exponentialfördelad med $\lambda=1/2$. Antag att två personer har kallats till intervju. Den första intervjun påbörjas kl 08.00. När den andra platssökande kommer kl 08.15, hur stor är sannolikheten att hon måste vänta innan hon själv kommer in till intervju?
(5 poäng)

Uppgift 5: Bredden på en viss typ av innerdörrar kan antas vara normalfördelad med väntevärdet 1.00 m och standardavvikelsen 0.003 m. Dessa dörrar skall passas in i en viss typ av dörrkarmar, vars bredd är normalfördelade med väntevärdet 1.003 m och standardavvikelsen 0.002 m. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald dörr inte passar in i dörrkarmen?
(6 poäng)

Uppgift 6: Resebyrån "Lustresor" använder en viss sorts 2-våningsbuss för sina långfärder. Bussen innehåller 43 sittplatser för passagerare. Dessutom finns ett bagageutrymme för passagerarnas resväskor. Handbagaget får passagerarna ta med sig in i bussen. Antag att en människa i genomsnitt väger 76 kg med en standardavvikelse på 10 kg. Motsvarande värden för resväskor och handbagage är i genomsnitt 20 kg respektive 5 kg med standardavvikelserna 5 kg respektive 2 kg. En dag kör en fullsatt buss till utlandet.

- Hur stor är risken att den sammanlagda vikten av passagerare, resväskor och handbagage överstiger 4.5 ton?
- Resebyrån funderar på att bygga om sin buss. En ombyggd buss kommer att få en lastkapacitet där den totala vikten av passagerare, resväskor och handbagage inte bör överstiga 5.0 ton. Man vill därför att sannolikheten att detta inträffar blir mindre än 0.001. Hur många passagerare skall man planera att ta med i den ombyggda bussen?

(7 poäng)

Uppgift 7: I ett måleri utfördes experiment för att minimera ojämnheter i färgen detaljer med lackskador. I försöket användes relativ luftfuktighet (A), omgivande lufttemperatur (B) och pump (C). Resultatet, y , är promille av ytan med ojämnheter i färgen.

	Låg nivå (-)	Hög nivå (+)
Relativ luftfuktighet, A	40 %	50 %
Omgivande temperatur, B	70° F	95° F
Pump, C	på	av

Följande resultat erhöles:

A	B	C	y
-	-	-	21
+	-	-	23
-	+	-	42
+	+	-	39
-	-	+	19
+	-	+	26
-	+	+	35
+	+	+	38

Följande effekter beräknades

$$l_A = 2.25 \quad l_B = 16.25 \quad l_C = -1.75 \quad l_{AB} = -2.25 \quad l_{ABC} = -0.25$$

- Använd ovanstående för att beräkna de resterande samspelseffekterna.
 - Anta att du vet att σ i varje enskilt försök är 1.8. Beräkna ett 99%-igt referensintervall för effekterna.
 - Använd referensintervallet till att avgöra vilka effekter som är signifikanta.
 - Ange en lämplig matematisk formel som visar hur ovanstående faktorer påverkar lackskadornas omfattning (genom huvudeffekter och samspelseffekter).
- (8 poäng)

Uppgift 8: Ett bilföretag uppmanar alla kunder, som köper nya bilar, att lämna in dessa på första service efter 500 mil. Företagets verkstadspersonal påstår att kunderna i genomsnitt kommer när bilen gått längre än 500 mil. För att undersöka om detta är sant kontrolleras 50 slumpmässigt utvalda bilar. Dessa har i genomsnitt körts 535 mil med en standardavvikelse på 45 mil. Testa verkstadspersonalens påstående på 5%:s signifikansnivå.

(6 poäng)

Lycka till!

Lösningar till tentamen Matematisk statistik, 2010-08-26

Uppgift 1: Använd sambandet $P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = P(B)$ där

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A^C \cap B) = P(A^C | B) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$$

$$\text{Alltså, } P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) - P(A^C \cap B) = 0.4 - 0.12 = 0.28$$

Uppgift 2:

Exakt beräkning: $\xi =$ antal balkar som måste kasseras ξ är $\text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(20, 0.05)$

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi < 1) = 1 - \left[\binom{20}{0} 0.05^0 \cdot 0.95^{20} + \binom{20}{1} 0.05^1 \cdot 0.95^{19} \right] \approx 0.264$$

Beräkning mha approximation: $n > 10$ och $p < 0.1$ Använd $\text{Po}(\lambda = np) = \text{Po}(1)$

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi < 1) = 1 - \left[\frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} \right] \approx 0.264$$

Uppgift 3: $\xi =$ antal defekta enheter $\xi = \text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(100, 0.001)$

$$\text{a) } P(\xi = 0) = \binom{100}{0} 0.001^0 \cdot 0.999^{100} \approx 0.905$$

b) $\eta =$ antal gånger som det inte finns några defekta enheter
 $\eta = \text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(3, 0.905)$

$$P(\xi \geq 2) = \binom{3}{2} 0.905^2 \cdot 0.095^1 + \binom{3}{3} 0.905^3 \cdot 0.095^0 \approx 0.975$$

c) $\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ är $\text{Bin}(3n, p) = \text{Bin}(300, 0.001)$

$$P(\zeta \leq 1) = \binom{300}{0} 0.001^0 \cdot 0.999^{300} + \binom{300}{1} 0.001^1 \cdot 0.999^{299} \approx 0.963$$

Uppgift 4: ξ är Exponential med $\lambda = 1/2$

$$P(\xi > 1/4) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}) = e^{-1/8} \approx 0.882$$

Uppgift 5: $\xi =$ bredden på en dörr $\xi = N(\mu, \sigma) = N(1.00, 0.003)$

$\eta =$ bredden på motsvarande dörrkarm $\eta = N(\mu, \sigma) = N(1.003, 0.002)$

Bilda en ny stokastisk variabel $\zeta = \eta - \xi$ där

$$\zeta = N(\mu, \sigma) = N(1.003 - 1.00, \sqrt{0.002^2 + 0.003^2}) \approx N(0.003, 0.0036)$$

Om dörren är för stor för dörrkarmen $\Rightarrow \eta - \xi < 0$

$$P(\zeta < 0) = P(Z < \frac{0 - 0.003}{0.0036}) \approx \Phi(-0.83) = 1 - \Phi(0.83) \approx 1 - 0.7967 = 0.2033$$

Uppgift 6:

$$\begin{aligned}\xi^A &= \text{vikten av en människa} & E(\xi^A) &= 76 \text{ kg} & S(\xi^A) &= 10 \text{ kg} \\ \xi^B &= \text{vikten av en resväska} & E(\xi^B) &= 20 \text{ kg} & S(\xi^B) &= 5 \text{ kg} \\ \xi^C &= \text{vikten av ett handbagage} & E(\xi^C) &= 5 \text{ kg} & S(\xi^C) &= 2 \text{ kg}\end{aligned}$$

$$\eta_{43} = \text{vikten av 43 människor} + 43 \text{ resväskor} + 43 \text{ handbagage} = \xi_1^A + \xi_2^A + \dots + \xi_{43}^A + \xi_1^B + \xi_2^B + \dots + \xi_{43}^B + \xi_1^C + \xi_2^C + \dots + \xi_{43}^C$$

$$E(\eta_{43}) = 43 \cdot 76 + 43 \cdot 20 + 43 \cdot 5 = 4343$$

$$\text{Var}(\eta_{43}) = 43 \cdot 10^2 + 43 \cdot 5^2 + 43 \cdot 2^2 = 5547$$

$$\begin{aligned}a) \quad P(\eta_{43} > 4500) &= 1 - P(\eta_{43} < 4500) = 1 - P\left(Z < \frac{4500 - 4343}{\sqrt{5547}}\right) \approx 1 - \Phi(2.11) \approx \\ &\approx 1 - 0.9826 = 0.0174\end{aligned}$$

b) $\eta_n = \text{vikten av } n \text{ personer} + n \text{ resväskor} + n \text{ handbagage}$

$$E(\eta_n) = n \cdot 76 + n \cdot 20 + n \cdot 5 = 101n$$

$$\text{Var}(\eta_n) = n \cdot 10^2 + n \cdot 5^2 + n \cdot 2^2 = 129n$$

$$\begin{aligned}P(\eta_n > 5000) < 0.001 &\Rightarrow P\left(Z > \frac{5000 - 101n}{\sqrt{129n}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{5000 - 101n}{\sqrt{129n}}\right) < 0.001 \\ \Rightarrow P\left(Z < \frac{5000 - 101n}{\sqrt{129n}}\right) &> 0.999\end{aligned}$$

Tabellen ger $P(Z < 3.1) = 0.9990$ och $P(Z < 3.11) = 0.99910$

Alltså gäller att och $P(Z < 3.11) > 0.9990$

$$\frac{5000 - 101n}{\sqrt{129n}} = 3.11 \Rightarrow 5000 - 101n = 3.11 \sqrt{129n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 101n + 3.11 \sqrt{129n} - 5000 = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Sätt } \sqrt{n} &= t \Rightarrow t > 0 \Rightarrow 101t^2 + 3.11 \sqrt{129} t - 5000 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t^2 + \frac{3.11 \sqrt{129}}{101} t - \frac{5000}{101} &= 0 \Rightarrow t = -\frac{3.11 \sqrt{129}}{2 \cdot 101} \pm \sqrt{\frac{3.11^2 \cdot 129}{2^2 \cdot 101^2} + \frac{5000}{101}}\end{aligned}$$

$$t > 0 \Rightarrow t \approx -0.174 + 7.038 = 6.864 \Rightarrow n \approx 6.864^2 \approx 47.11$$

$$\underline{n = 47} \Rightarrow P\left(Z < \frac{5000 - 101 \cdot 47}{\sqrt{129 \cdot 47}}\right) = P(Z < 3.25) = 0.9994$$

uppfyller villkoret större än 0.999

$$\underline{n = 48} \Rightarrow P\left(Z < \frac{5000 - 101 \cdot 48}{\sqrt{129 \cdot 48}}\right) = P(Z < 1.93) = 0.9734$$

uppfyller inte villkoret större än 0.999

Man bör inte tillåta fler än 47 passagerare.

Uppgift 7:

$$a) \quad l_{AC} = \frac{21+42+26+38}{4} - \frac{23+39+19+35}{4} = 2.75$$

$$l_{BC} = \frac{21+23+35+38}{4} - \frac{42+39+19+26}{4} = -2.25$$

b) $\sigma = 1.8$, d.v.s. σ är känd \Rightarrow använd normalfördelningen
ett 99%-igt referensintervall

$$0 \pm 2.58 \cdot \frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \Rightarrow 0 \pm 2.58 \cdot \frac{2 \cdot 1.8}{\sqrt{8}} \Rightarrow 0 \pm 3.28$$

c) Enbart faktor B ger en signifikant effekt

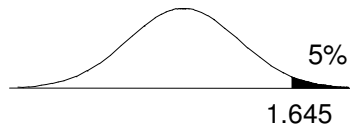
$$d) \quad \hat{y} = l_M + \frac{l_B}{2} \cdot x_B \Rightarrow \hat{y} = 30.375 + \frac{16.25}{2} \cdot x_B$$

$$\text{där } l_M = \frac{21+23+42+39+19+26+35+38}{8} = 30.375$$

Uppgift 8:

Steg 1: $H_0: \mu \leq 500$
 $H_1: \mu > 500$

Steg 2: $\alpha = 0.05$



Steg 3: Välj testvariabeln $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$

Steg 4: Urval gav

$$t = \frac{535 - 500}{45 / \sqrt{50}} = 5.50$$

Steg 5: H_0 kan förkastas. Undersökningen tyder på att bilarna i genomsnitt har kört längre än 500 mil.