

Övningstentamen 25 nov 2010

Uppgift 1: En uppsättning dokument skall skickas till en speciell adress. Det är viktigt att dokumenten kommer fram samma dag de skickas. För att maximera chansen att de kommer fram i tid tar man 3 kopior av dokumenten. Därefter anlitas 3 olika leveransföretag som får var sin kopia för leverans till den aktuella adressen. Anta att företagens möjligheter att leverera dokumenten till den bestämda adressen är oberoende av varandra. Företag A är känt för att leverera produkten samma dag i 98% av sina uppdrag. Motsvarande siffra för företag B är 88% och för företag C 91%.

- Bilda sannolikhetsfördelningen för antal uppsättningar av dokumenten som kommer fram samma dag.
- Beräkna väntevärde och varians för antal uppsättningar av dokumenten som kommer fram samma dag. (6 poäng)

Uppgift 2: Anta att tiden tills ett fel uppstår på en viss känslig robot är exponentialfördelad med $\lambda = 2$. Tiden mäts i timmar.

- Vad är sannolikheten att en robot arbetar i minst en timma utan att något fel uppstår?
- Anta att en fabrik har 3 sådana robotar. Hur stor är sannolikheten att minst två av robotarna arbetar i minst en timma utan att något fel uppstår?

(6 poäng)

Uppgift 3: Cover Story har en månadsvis ranking av populariteten hos kändisar. Man räknar hur många gånger personerna förekommer på sidorna hos hundratals amerikanska tidningar. Beräkningen av rankingen bygger på hur många gånger en kändis har funnit på någon tidningssida. Rankingens blir då en slumpmässig variabel som kan approximeras med en normalfördelning. Sångerskan Cher hade år 1991 en genomsnittlig ranking på 5.2 poäng. Vidare gällde att Chers ranking 80% av året låg under 7.0 poäng. Vilken standardavvikelse hade hennes ranking detta år?

(6 poäng)

Uppgift 4: Genomsnittligt antal poäng på ett IQ-test antas vara 100 med populationsstandardavvikelsen 15. Anta att man tar ett slumpmässigt urval om 200 personer. Vad är sannolikheten att urvalsmedelvärdet på antal poäng blir lägre än 103?

(6 poäng)

Uppgift 5: En forskare tror att halten fosfor och halten kväve i vattnet i en damm påverkar tillväxten av alger. Han genomför ett faktorförsök med följande nivåer på fosforhalten och kvävehalten.

	Låg nivå (-)	Hög nivå (+)
Fosfor (F)	0.06 mg/liter	0.30 mg/liter
Kväve (K)	2.00 mg/liter	10.00 mg/liter

Fortsättning uppgift 5 på nästa sida

Fortsättning uppgift 5

Efter att ha genomfört 8 försök, ett i vardera av 8 jämförbara dammar, fick han följande resultat:

F	K	Alg population		\bar{y}	s^2
-	-	0.312	0.479	0.3955	0.01394
+	-	0.391	0.481	0.436	0.00405
-	+	0.412	0.465	0.4385	0.00665
+	+	0.376	0.451		

- Beräkna det medelvärde och den standardavvikelse som saknas i tabellen ovan.
- Beräkna huvudeffekter och 2-faktorsamspelet.
- Beräkna ett 95%-igt referensintervall och avgör vilka effekter som är signifikanta.
- Skriv upp en lämplig matematisk modell genom att utnyttja resultaten i deluppgifterna a-c.

(8 poäng)

Lösningar till övningstentamen 25 nov 2010

Uppgift 1: $P(A) = 0.98$ $P(B) = 0.88$ $P(C) = 0.91$

ξ = antal kopior som kommer fram samma dag $\Omega = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

a)	$\xi = x$	$P(\xi = x)$
	0	$P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.02 \cdot 0.12 \cdot 0.09 = \mathbf{0.000216}$
	1	$P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C) = 0.98 \cdot 0.12 \cdot 0.09 +$ $+ 0.02 \cdot 0.88 \cdot 0.09 + 0.02 \cdot 0.12 \cdot 0.91 = \mathbf{0.014352}$
	2	$P(A \cap B \cap C^C) + P(A \cap B^C \cap C) + P(A^C \cap B \cap C) = 0.98 \cdot 0.88 \cdot 0.09 +$ $+ 0.98 \cdot 0.12 \cdot 0.91 + 0.02 \cdot 0.88 \cdot 0.91 = \mathbf{0.200648}$
	3	$P(A \cap B \cap C) = 0.98 \cdot 0.88 \cdot 0.91 = \mathbf{0.784784}$

b)

$$E(\xi) = \sum_{x=0}^3 x \cdot P(\xi=x) = 0 \cdot 0.000216 + 1 \cdot 0.014352 + 2 \cdot 0.200648 + 3 \cdot 0.784784 = 2.77$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\xi) &= \sum_{x=0}^3 x^2 \cdot P(\xi=x) - [E(\xi)]^2 = 0^2 \cdot 0.000216 + 1^2 \cdot 0.014352 + \\ &+ 2^2 \cdot 0.200648 + 3^2 \cdot 0.784784 - 2.77^2 = 0.2071 \end{aligned}$$

Uppgift 2: ξ = tiden i timmar fram tills det uppstår ett fel $\xi = \text{Exp}(\lambda = 2)$

a) $P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi < 1) = 1 - (1 - e^{-1 \cdot \lambda}) = e^{-2} \approx 0.1353$

b) η = antal robotar vars tid fram tills det uppstår ett fel är längre än 1 timma
 η är Bin $(n, p) = \text{Bin}(3, 0.1353)$ $\Omega = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

$$\begin{aligned} P(\eta \geq 2) &= P(\eta = 2) + P(\eta = 3) = \binom{3}{2} 0.1353^2 \cdot (1-0.1353)^1 + \\ &+ \binom{3}{3} 0.1353^3 \cdot (1-0.1353)^0 \approx 0.04996 \end{aligned}$$

Uppgift 3: ξ = rankingen hos sångerskan Cher, ξ är $N(5.2, \sigma)$

$$P(\xi < 7.0) = 0.80 \Rightarrow P\left(Z < \frac{0.7 - 5.2}{\sigma}\right) = 0.80$$

$$\text{Normalfördelningstabellen ger att } P(Z < 0.84) \approx 0.80 \Rightarrow \frac{0.7 - 5.2}{\sigma} \approx 0.84 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.7 - 5.2}{0.84} \approx \sigma \Rightarrow \sigma \approx 2.143$$

Uppgift 4: ξ = värdet på ett IQ-test ξ är $N(\mu, \sigma) = N(100, 15)$

$$E(\xi) = E(\xi) = \mu = 100$$

$$\text{Var}(\xi) = \frac{\text{Var}(\xi)}{n} = \frac{\sigma^2}{200} = \frac{15^2}{200} = 1.125$$

$$P(\xi < 103) = P(Z \leq \frac{103 - 100}{\sqrt{1.125}}) = P(Z \leq 2.83) \approx 0.9977$$

Uppgift 5:

F	K	FK	Alg population		\bar{y}	s^2
-	-	+	0.312	0.479	0.3955	0.01394
+	-	-	0.391	0.481	0.436	0.00405
-	+	-	0.412	0.465	0.4385	0.00665
+	+	+	0.376	0.451		

$$a) \quad \bar{x} = \frac{0.376 + 0.451}{2} = 0.4135$$

$$s = \sqrt{\frac{0.376^2 + 0.451^2 - \frac{(0.376 + 0.451)^2}{2}}{2-1}} \approx 0.05303$$

$$b) \quad l_F = \frac{0.4360 + 0.4135}{2} - \frac{0.3955 + 0.4385}{2} = 0.00775$$

$$l_K = \frac{0.4385 + 0.4135}{2} - \frac{0.3955 + 0.4360}{2} = 0.01025$$

$$l_{FK} = \frac{0.4135 + 0.3955}{2} - \frac{0.4360 + 0.4385}{2} = -0.03275$$

c) σ är okänd och måste uppskattas från varianserna, s^2 , \Rightarrow

\Rightarrow använd t-fördelningen

$$s_p^2 = \frac{0.01394 + 0.00405 + 0.00665 + 0.002813}{4 \cdot 2 - 4} = 0.00686 \quad \text{med 4 df}$$

$$0 \pm t \cdot \frac{2 \cdot s_p}{\sqrt{N}} \Rightarrow 0 \pm 2.78 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{0.00686}}{\sqrt{8}} \Rightarrow 0 \pm 0.1628$$

Ingen av effekterna är signifikant.

Fortsättning uppgift 5 på nästa sida

Fortsättning uppgift 5:

$$d) \quad \hat{y} = \ell_M = \frac{0.3955 + 0.4360 + 0.4385 + 0.4135}{4} \approx 0.4209$$