Veckoblad 2

Kapitel 3 i Matematisk statistik, Dahlbom U.

Nya begrepp: Diskret stokastisk variabel. Sannolikhetsfördelningen beskrivs av sannolikhetsfunktionen $P(\xi=x)$ eller fördelningsfunktionen $P(\xi\leq x)$ väntevärde [$E(\xi)$ eller μ], varians [$Var(\xi)$ eller σ^2] eller standardavvikelse [$S(\xi)$, $\sqrt{Var(\xi)}$ eller σ]. Standardfördelningarna [$Hyp(N, n, p)$, $Bin(n, p)$, $Po(\lambda)$]. Parameter i fördelningen $(\mu, \sigma, p, \lambda)$.

Snabbrepetition:

1. En sannolikhetsfördelning beskriver hur totala sannolikhetsmassan 1 har fördelats ut över ett antal punkter (ändligt eller uppräkneligt oändligt antal i det diskreta fallet)

2. För en allmän diskret fördelning gäller att

   Sannolikhet: $P(\xi = x_k)$

   Fördelningsfunktion: $F(x_k) = P(\xi \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} P(\xi = x_i)$

3. Väntevärdet är det samma som tyngdpunkten i fördelningen. Och beräknas med hjälp av formeln

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\xi = x_i)$$

   Om fördelningen är symmetrisk ligger den i mitten. Ex. vis är vid kast med tärning väntevärdet 3.5.

4. Variansen (eller standardavvikelsen) är ett mått på sannolikhetsmassans spridning. En s.v. som bara kan anta ett värde har variansen noll. Ju större del av sannolikhetsmassan som fördelningen har förlagd långt bort från väntevärdet, desto större varians.

5. Enl. sats 3.2 på sid 73 gäller att variansberäknas enligt

$$Var[\xi] = E[(\xi-\mu)^2] = E[\xi^2] - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(\xi = x_i) - [E(\xi)]^2 \quad \text{(Steiners sats).}$$

6. Om ξ är en diskret stokastisk variabel med sannolikhetsfunktionen $p(\xi = x)$ på utfallsrummet Ω, då gäller för varje reellvärd funktion g att

$$E[g(\xi)] = \sum_{\Omega} g(x) \cdot p(x)$$

7. Medelvärde $\bar{x}$ och varians s^2 i ett **observerat stickprov** är skattningar av fördelningens väntevärde μ och varians σ^2. Detta kommer vi till i kapitel 7.

Övningar att räkna: 3.1, 3.2, 3.7, 3.10, 3.11

Standardfördelningarna för en diskret stokastisk variabel är

Likformig fördelning: ξ är Likf(N)

N = antal möjliga utfall med lika sannolikheter.

Sannolikhet: $P(\xi = x) = \dfrac{1}{N}$

Exempel: Antal ögon vid ett tärningskast.

Hypergeometrisk fördelning: ξ är Hyp(N, n, p)

N = begränsad mängd.
Np = antal element av ett visst slag.
p = andel element av ett visst slag.
n = antal slumpmässigt utvalda element ur mängden N.

Sannolikhet: $P(\xi = x) = \dfrac{\binom{Np}{x} \cdot \binom{N-Np}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

Väntevärde: $E(\xi) = n \cdot p$ Varians: $Var(\xi) = n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \dfrac{N-n}{N-1}$

Exempel: Plocka kulor ur en urna utan återläggning.

Övningar att räkna: 3.13, 3.15, 3.17

Binomialfördelningen: ξ är Bin(n, p)

n = antal oberoende upprepningar av ett försök.

p = sannolikheten att händelsen A (eller A^C) inträffar i ett sådant försök.

Sannolikhet: $P(\xi = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$

Väntevärde: $E(\xi) = n \cdot p$ Varians: $Var(\xi) = n \cdot p \cdot (1 - p)$
Exempel: Antal klavar vid 20 oberoende kast av ett mynt.

Övningar att räkna: 3.14, 3.23

Poissonfördelningen: ξ är $Po(\lambda)$

λ = genomsnittligt antal händelser i ett intervall.

Sannolikhet: $P(\xi = x) = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^x}{x!}$

Väntevärde: $E(\xi) = \lambda$ Varians: $Var(\xi) = \lambda$
Exempel: Antal båtar som anlägger i en hamn under ett dygn.

Övningar att räkna: 3.24, 3.27

Övningar att räkna på approximationer: 3.25, 3.26

8. I en s.k. Poissonprocess med intensiteten c är antalet bilar som kommer i ett intervall av längden t Po(ct) och antalet bilar i disjunkta intervall oberoende. Intervallen mellan ankomsterna är exponentialfördelade. (Vi kommer till denna fördelning i kap.4)

9. Summan av två variabler som är oberoende och Poissonfördelade med parametrarna λ_1 resp. λ_2 är Po($\lambda_1+\lambda_2$)

10. Lägg märke till villkoren vid approximationerna mellan de olika fördelningarna sid 89. Väntevärdet bibehålls dock alltid.

Övningar att räkna: 3.25, 3.26