LMA521 20160113

1.

a) ξ = restiden för student A. ξ är $N(35, 3)$

$P(\text{anländer innan } 8.10) = P(\xi < 40) = P(\xi \leq 40)$

$= P\left(\frac{\xi - 35}{3} \leq \frac{40-35}{3}\right) = \Phi(5/3) \approx \Phi(1.67) = 0,9525$

η = antal dagar hon kommer i tid.

η är $Bin(n=5, p=0,9525)$

$P(\eta \geq 4) = P(\eta = 4) + P(\eta = 5) = \binom{5}{4} 0,9525^4 (1-0,9525)$

$+ \binom{5}{5} 0,9525^5 (1-0,9525)^0 = 5 \cdot 0,9525^4 \cdot (1-0,9525)$

$+ 0,9525^5 = 0,195 + 0,784 = \boxed{0,979}$

b) ξ = restiden för student A. ξ är $N(35, 3)$

γ = restiden för student B. γ är $N(34, 2)$

Söker: $P(\gamma < \xi) = P(\gamma - \xi < 0)$

Vi har $\gamma - \xi$ är $N(34-35, \sqrt{3^2+2^2}) = N(-1, \sqrt{13})$

$\Rightarrow P(\gamma - \xi < 0) = P\left(\frac{\gamma - \xi - (-1)}{\sqrt{13}} < \frac{0-(-1)}{\sqrt{13}}\right)$

$= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) = \Phi(0,277) \approx \boxed{0,61}$

2.] Låt η = antalet elever som kommer t. föreläsningen.

a] Då är η $Bin(n=200, p=0.87)$

Vi ser $np(1-p) = 200 \cdot 0.87 \cdot 0.13 = 22.62 > 10$.

Så η är approx $N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(174, 4.76)$

$$P(\eta > 179) = 1 - P(\eta \leq 179) = 1 - P\left(\frac{\eta - 174}{4.76} \leq \frac{179-174}{4.76}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1.05) = 1 - 0.8531 = \boxed{0.1469}$$

b] Vill bestämma d så att $P(\eta \leq d)$ större än 0,95

så litet som möjligt

$$P(\eta \leq d) = P\left(\frac{\eta - 174}{4.76} \leq \frac{d-174}{4.76}\right) = \Phi\left(\frac{d-174}{4.76}\right)$$

$$= 0.95 \iff \frac{d-174}{4.76} = 1.645 \iff d = 1.645 \cdot 4.76 + 174$$

$$= 181.8$$

$\Rightarrow$ Välj $d = 182$

Svar: $\boxed{182}$ platser bör finnas.

3.) a) $E(\xi) = \int_0^1 x \frac{6}{7}(1+x-x^2)dx =$

$= \frac{6}{7}\int_0^1 x+x^2-x^3 dx = \frac{6}{7}\left[x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 \right]_0^1 =$

$= \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{7}\left(\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{3}{12}\right)$

$= \frac{6}{7}\cdot\frac{7}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$E(\xi^2) = \frac{6}{7}\int_0^1 x^2+x^3-x^4 dx = \frac{6}{7}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1$

$= \frac{6}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{7}\left(\frac{20}{60}+\frac{15}{60}-\frac{12}{60}\right)$

$= \frac{6}{7}\,\frac{23}{60} = \frac{23}{70}$

$\Rightarrow Var(\xi) = \frac{23}{70} - \frac{1}{4} = \ldots = \frac{11}{140} \approx 0{,}0786$

3b) $Var(1-2\xi) = Var(-2\xi) = (-2)^2\, Var(\xi)$

$= 4\,Var(\xi) = 4\cdot 0{,}0786 = \boxed{0{,}3144}$

4.

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(243{,}4 + \dots + 246{,}3) = 245{,}9$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{5}\left((243{,}4-\bar{x})^2 + \dots + (246{,}3-\bar{x})^2\right)} = 1{,}765$$

a) Ett 95% konf int för μ ges av:

$$\bar{x} \pm t_{0{,}05}(5)\cdot\frac{s}{\sqrt{6}} = 245{,}9 \pm 2{,}57\cdot\frac{1{,}765}{\sqrt{6}} =$$

antalet frihetsgrader $= 5 = 6-1$.

$$= 245{,}9 \pm 1{,}852$$

b) Väljer att göra ett 1-sidigt intervall.
(2-sidigt går också bra)

Intervallet blir $(\alpha = 0{,}01)$

$$\left[0, \left(\sqrt{\frac{(6-1)s^2}{\chi^2_{0{,}99}}}\right)^2\right] = \left[0, \frac{5\cdot s^2}{\chi^2_{0{,}99}}\right] = \left[0, \frac{5\cdot 1{,}765^2}{0{,}5543}\right]$$

$$= [0, 28.1]$$

5.)

Låt ξ = antalet blå som dras från urna A.

$$P(\xi=0) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{3}{21}$$

$$P(\xi=1) = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{12}{42}\cdot 2 = \frac{24}{42} = \frac{12}{21}$$

$$P(\xi=2) = 1 - P(\xi=0) - P(\xi=1) = 1 - 3/21 - 12/21 = \frac{16}{21}$$

Låt η = antalet gröna som dras från urna B. Fördelningen för η beror på vad ξ blev.

Om $\xi=0$ är η $Hyp(8, 4, \frac{6}{8})$

$\xi=1$ är η $Hyp(8, 4, 5/8)$

$\xi=2$ är η $Hyp(8, 4, 4/8)$

Så $$P(\eta=2 \mid \xi=0) = \frac{\binom{6}{2}\binom{2}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{\left(\frac{6!}{2!4!}\right)\cdot 1}{\left(\frac{8!}{4!4!}\right)} = \frac{\frac{5\cdot 6}{2}\cdot 1}{\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$$

$$P(\eta=2 \mid \xi=1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{\left(\frac{5!}{2!\,3!}\right)\cdot 3}{70} = \frac{\left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)\cdot 3}{70} = \frac{30}{70} = 3/7.$$

$$P(\eta=2 \mid \xi=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{\left(\frac{4!}{2!2!}\right)\left(\frac{4!}{2!2!}\right)}{70} = \frac{36}{70} = \frac{18}{35}$$

$$\Rightarrow P(\eta=2) = \frac{3}{14}\cdot\frac{3}{21} + \frac{3}{7}\cdot\frac{12}{21} + \frac{18}{35}\cdot\frac{6}{21} = \ldots = 0{,}42$$

forts →

Observera nu att

$$P(E) = P(\xi = 2) = \boxed{6/21 \; (\approx 0{,}29)}$$

$$P(F) = P(\eta = 2) = \boxed{0{,}42}$$

$$P(F \mid E) = P(\eta = 2 \mid \xi = 2) = \boxed{18/35 \approx 0{,}51}$$

$$P(E \mid F) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes sats}}}{=} \frac{P(F \mid E)\, P(E)}{P(F)} \approx \frac{0{,}51 \cdot 0{,}29}{0{,}42} \approx \boxed{0{,}35}$$