Matematisk statistik LKT325 (Kemiprogrammet) Tentamen 2017-01-10

Tid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Kursboken **Matematisk Statistik** av Ulla Dahlbom. Formelsamlingen **Tabell- och formelsamling i matematisk statistik, försöksplanering och kvalitetsstyrning** av Håkan Blomqvist. Boken och formelsamlingen får ej innehålla extra anteckningar, men understrykningar, sticks och markeringar är tillåtna. **Chalmersgodkänd räknare.**
Examinator: Johan Tykesson
Telefonvakt: Johan Tykesson, 0703182096. Rond ca 9.30 och 11.30.
Betygsgränser: för betyg 3 krävs minst 20 poäng, för betyg 4 krävs minst 30 poäng, för betyg 5 krävs minst 40 poäng.

Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
OBS: text på fyra sidor!

1. (7 poäng) En kemi-ingenjör vill släppa en pappershelikopter från cirka 10 meters höjd. Släpphöjden blir inte exakt 10 meter, utan kan istället betraktas som en kontinuerlig stokastisk variabel ξ med frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 6(x-9.5)(10.5-x) & \text{för } 9.5 \leq x \leq 10.5 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

   (a) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för ξ.

   (b) Beräkna den betingade sannolikheten

$$P(9.8 \leq \xi \leq 10.1 | 9.9 \leq \xi \leq 10.2).$$

   (c) Antag att man gör 60 oberoende släpp av helikoptern. Låt η vara antalet gånger som släpphöjden blir mindre än 10.1 meter. Beräkna approximativt $P(\eta \leq 43)$. Motivera approximationen.

2. (4 poäng) En chipsfabrik tillverkar påsar med dillchips. Vi antar att påsarnas vikter är normalfördelade med okänt väntevärde μ och okänd standardavvikelse σ. Man vill att standardavvikelsen inte skall vara för stor. Man har som regel att om standardavvikelsen är större än 5 gram så måste man stoppa maskineriet och undersöka om något är fel. Man gör 6 mätningar och får följande mätvärden (i enheten gram):

250.1	251.3	249.5	250.0	247.5	251.4

   Beräkna ett 95% en-sidigt konfidensintervall för σ baserat på de 6 mätningarna. Bör maskineriet undersökas? Basera svaret på konfidensintervallet du beräknade.

3. (1+1+2+2 poäng) Antag att det finns två slags aktier: aktier i företag A och aktier i företag B. Låt ξ_1 vara värdet for en aktie i företag A vid en viss tidpunkt, och låt ξ_2 vara värdet for en aktie i företag B vid samma tidpunkt. Vi antar att ξ_1 och ξ_2 är oberoende stokastiska variabler, och att de båda är normalfördelade med väntevärde 100 kronor och standardavvikelse 10 kronor. Ivar har en aktieportfölj som består av 100 aktier i företag A. Ingrid har en aktieportfölj som består av 50 aktier i företag A och 50 aktier i företag B. Värdet av Ivars aktieportfölj kallar vi η_1 och det gäller alltså att $\eta_1 = 100\xi_1$. Värdet av Ingrids aktieportfölj kallar vi η_2 och det gäller alltså att $\eta_2 = 50\xi_1 + 50\xi_2$.

   (a) Beräkna $P(\xi_1 \leq 95)$.
   (b) Beräkna $P(\eta_1 \geq 12000)$.
   (c) Beräkna $P(\eta_2 \geq 12000)$.
   (d) Beräkna sannolikheten att Ivars portfölj är värd mer än 1000 kronor mer än Ingrids portfölj.

4. (5 poäng) En tillverkare av stoppur producerar tre olika modeller. De olika modellerna har olika många avancerade tilläggsfunktioner. De skiljer sig därför även i pris. Vissa konsumenter är bara intresserade av basfunktionerna och vill därför veta huruvida modellerna har olika långa livslängder om man bara använder start, stopp och nollställ. En undersökning gjordes där man mätte hur många cykler (start-stopp-nollställ) det tog innan stoppuren slutade fungera. Resultatet blev följande.

Modell I	Modell II	Modell III
6.1	13.6	13.4
12.5	19.8	20.9
16.5	25.2	25.1
25.1	46.2	29.7
30.5	61.1	46.9

Tabell 1: Antal cykler i tusental för de olika försöken.

Här är en påbörjad ANOVA-tabell för undersökningen.

Variationskälla	SS	*df*	MS	F
Mellan modeller	...	...	...	...
Inom modeller	2584.68	...	...	
Totalt	3158.09	...		

Komplettera ANOVA-tabell och utför korrekt analys för att undersöka om den genomsnittliga livslängden för de olika modellerna skiljer sig åt. Var noga med att berätta vilken hypotes ni testar.

5. (5 poäng) En brevbärare lägger brev i en postsäck. Antag att ett slumpmässigt utvalt brev väger 25 gram med sannolikhet 0.1, 50 gram med sannolikhet 0.5, 75 gram med sannolikhet 0.3 och 100 gram med sannolikhet 0.1. Om man lägger i mer än 52.5 kilogram med brev i postsäcken går den sönder. Antag att brevbäraren lägger i 860 stycken slumpmässigt utvalda brev i säcken. Beräkna approximativt sannolikheten att säcken går sönder. Motivera approximationen.

6. (2+4 poäng) En chipsfabrik undersöker hur olika faktorer påverkar smaken på pepparchips. Man betraktar följande faktorer: A (potatissort), B (mängden peppar), C (mängden salt), samt D (grov eller finräfflade chips). Man gjorde ett fullständigt faktorförsök med de olika faktorerna inställda på två olika nivåer (+ eller -). Man fick följande resultat vid de 16 försöken, där resultatet är ett slags smakindex.

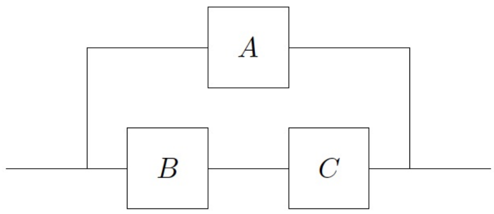
Nr.	A	B	C	D	Resultat y
1	-	-	-	-	7.0
2	+	-	-	-	7.1
3	-	+	-	-	8.2
4	+	+	-	-	8.3
5	-	-	+	-	8.6
6	+	-	+	-	8.4
7	-	+	+	-	9.6
8	+	+	+	-	9.8
9	-	-	-	+	6.8
10	+	-	-	+	6.5
11	-	+	-	+	8.0
12	+	+	-	+	8.3
13	-	-	+	+	8.4
14	+	-	+	+	8.3
15	-	+	+	+	9.7
16	+	+	+	+	9.8

(a) Beräkna samspelseffekten l_{CD}.

(b) Antag att man även var intresserad av de fyra faktorerna E, F, G och H. Antag att man gör ett reducerat faktorförsök med totalt 16 försök där faktorerna A, B, C och D är inställda enligt ovan. Välj själv generatorer för det reducerade faktorförsöket. Beräkna alla ord, dvs alla "I", med ditt val av generatorer. Bestäm även upplösningen för det reducerade faktorförsöket. För full poäng krävs att upplösningen är åtminstone tre.

7. (4 poäng) Antag att det för en viss slags laptop kan uppkomma 3 olika slags fel: (A) chassit är trasigt, (B) wifi anslutningen funkar inte, samt (C) touchpaden är trasig. Det gäller att A och C är oberoende av varandra. Dessutom gäller det att $P(A) = 0.01$, $P(B) = 0.01$, $P(C) = 0.02$, $P(A \cap B) = 0.003$ och $P(B \cap C) = 0.003$. Till sist gäller det också att de tre felen aldrig kan inträffa allihop samtidigt (kanske de mest defekta datorerna sorterats bort i ett tidigt skede i produktionen). Antag nu att man väljer ut en laptop slumpmässigt. Låt ξ vara antalet olika slags fel som finns på denna laptop. Beräkna $P(A \cup B \cup C)$, $P(\xi = 0)$, $P(\xi = 1)$ och $P(\xi = 2)$.

8. (8 poäng) Betrakta systemet i figuren. För att det skall fungera måste det finnas en väg från vänster till höger genom fungerande komponenter. Livslängden för varje enskild komponent kan betraktas som en exponentialfördelad stokastisk variabel med väntevärde 1.5 år. De tre komponenterna antas dessutom vara oberoende av varandra.



   (a) Vad är sannolikheten att systemet fungerar efter 2 år?

   (b) Eftersom de enskilda komponenternas livslängder är kontinuerliga stokastiska variabler, blir även systemets livslängd en kontinuerlig stokastisk variabel. Låt η beteckna systemets livslängd. Ta fram fördelningsfunktionen för η.

9. (5 poäng) Kalle gillar att spela poker och han är även duktig på matematik. Han har just fått jobb på ett nätcasino där han ska räkna på sannolikheter inom pokerspel. Hans nya chef hävdar att om man blir tilldelad en pokerhand slumpmässigt så är chansen exakt 50% att man får par eller bättre, dvs proportionen av alla pokerhänder med par eller bättre är 0.5. Kalle tycker att det verkar märkligt att denna proportion skulle vara exakt 0.5 så han vill göra ett test för att se om det verkligen kan stämma. Han delar 200 pokerhänder slumpmässigt till sig själv och får par eller bättre i 116 av händerna.

   (a) Hjälp Kalle att utföra hypotestestet. Använd signifikansnivå $\alpha = 0.01$.

   (b) Vad vet vi om p-värdet för testet? Är det större eller mindre än $\alpha = 0.01$? Ledning: ni behöver inte ta fram p-värdet för att svara på frågan.

   (c) Vilken/vilka typ(er) av fel kan ha begåtts? Typ-1-fel och/eller typ-2-fel?

Lycka till!