1.

a)

$$E(\xi) = \int_{9.5}^{10.5} x \cdot 6(x-9.5)(10.5-x)\,dx = \ldots = \boxed{10}$$

$$E(\xi^2) = \int_{9.5}^{10.5} x^2\, 6(x-9.5)(10.5-x)\,dx = \ldots = 100{,}05$$

$$\Rightarrow Var(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = 100{,}05 - 10^2 = 0{,}05$$

$$\Rightarrow S(\xi) = \sqrt{Var(\xi)} = \sqrt{0{,}05} = \boxed{0{,}224}$$

b) $P(9.8 \le \xi \le 10.1 \mid 9.9 \le \xi \le 10.2)$

$$= \frac{P(\{9.8 \le \xi \le 10.1\} \cap \{9.9 \le \xi \le 10.2\})}{P(9.9 \le \xi \le 10.2)} = \frac{P(9.9 \le \xi \le 10.1)}{P(9.9 \le \xi \le 10.2)}$$

$$= \frac{\int_{9.9}^{10.1} 6(x-9.5)(10.5-x)\,dx}{\int_{9.9}^{10.2} 6(x-9.5)(10.5-x)\,dx} = \ldots \approx \boxed{0{,}685}$$

c) $P(\xi \le 10.1) = \int_{9.5}^{10.1} 6(x-9.5)(10.5-x)\,dx = 0{,}648$

$\Rightarrow \eta$ är $Bin(n=60,\ p=0{,}648)$

$np(1-p) = 60 \cdot 0{,}648 \cdot (1-0{,}648) = 13{,}686 > 10$

$\Rightarrow \eta$ är approx $N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(38{,}88,\ 3{,}699)$

$$\Rightarrow P(\eta \le 43) = P\left(\frac{\eta - 38{,}88}{3{,}699} \le \frac{43-38{,}88}{3{,}699}\right) \approx \Phi(1{,}11) \approx \boxed{0{,}87}$$

2.1

Skatta först σ med s

$$s = \sqrt{\frac{1}{6-1} \sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{där} \quad \bar{x} = \frac{1}{6}(250{,}1 + \dots + 251{,}4)$$

$$= 249{,}967$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{\frac{1}{5}\left((250{,}1-249{,}967)^2 + \dots + (251{,}4-249{,}967)^2\right)} \approx 1{,}42501$$

$$\chi^2_{0{,}95} = 1.145$$

$$\Rightarrow \text{Intervallet blir} \quad \left[0, \sqrt{\frac{5 \cdot 1.42501^2}{1.145}}\right] = \boxed{[0,\ 2{,}978]}$$

Vi ser att 5 ligger utanför intervallets gränser.
Det verkar alltså som att maskinen inte behöver undersökas.

3.

ξ_1 är $N(100, 10)$, ξ_2 är $N(100, 10)$

ξ_1 & ξ_2 är oberoende.

$\eta_1 = 100\xi_1$ $\qquad \eta_2 = 50\xi_1 + 50\xi_2$.

a) $P(\xi_1 \leq 95) = P\left(\frac{\xi_1 - 100}{10} \leq \frac{95-100}{10}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= 1 - \Phi(1/2) = 1 - 0,6915 = \boxed{0,3085}$

b) $P(\eta_1 \geq 12000) = 1 - P(\eta_1 \leq 12000) = 1 - P(\xi_1 \leq 120)$

$= 1 - P\left(\frac{\xi_1 - 100}{10} \leq \frac{120 - 100}{10}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772$

$= \boxed{0,0228}$

c) $P(\eta_2 \geq 12000) = P(50(\xi_1 + \xi_2) \geq 12000)$

$= P(\xi_1 + \xi_2 \geq 240) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 \leq 240)$

$= \left\{ \xi_1 + \xi_2 \text{ är } N(200, \sqrt{200}) \right\} = 1 - P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 - 200}{\sqrt{200}} \leq \frac{240 - 200}{\sqrt{200}}\right)$

$= 1 - \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{200}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{2} \cdot 10}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi(\sqrt{2})$

$\approx 1 - \Phi(1,41421) = 1 - 0,9207 = \boxed{0,0793}$

d) P(Ivars värd mer än 1000kr mer än Ingrids portfölj)

$= P(\eta_1 - \eta_2 \geq 1000) = P(100\xi_1 - 50\xi_1 - 50\xi_2 \geq 1000)$

$= P(50\xi_1 - 50\xi_2 \geq 1000) = P(\xi_1 - \xi_2 \geq 20)$

$= \left\{ \begin{array}{l} E(\xi_1 - \xi_2) = 100 - 100 = 0 \\ Var(\xi_1 - \xi_2) = Var(\xi_1) + (-1)^2 Var(\xi_2) = Var(\xi_1) + Var(\xi_2) = 100 + 100 = 200 \\ \Rightarrow S(\xi_1 - \xi_2) = \sqrt{200} \Rightarrow \xi_1 - \xi_2 \text{ är } N(0, \sqrt{200}) \end{array} \right\}$

Fortsättning →

3 $\underline{\text{fórm.}} = P\left(\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{\sqrt{200}} \geq \frac{20}{\sqrt{200}} \right) = 1 - \Phi(\sqrt{2}) =$

$= 1 - 0{,}9207 = \boxed{0{,}0793}$

4

Lösning: Den färdiga ANOVA-tabellen bör se ut såhär:

Variationskälla	SS	df	MS	F
Mellan modeller	573.41	2	286.705	1.33
Inom modeller	2584.68	12	215.39	
Totalt	3158.09	14		

Vi använder de fem stegen.

Steg 1. Låt μ_1, μ_2 och μ_3 beteckna de genomsnittliga livslängderna för de tre modellerna. Våra hypoteser blir $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ och $H_1 : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$.

Steg 2. Vi väljer signifikansnivå $\alpha = 0.05$. (Man är fri att välja signifikansnivå men det är bara 0.05 som finns i tabellen så om man väljer någon annan nivå får man problem.)

Steg 3. Testvariabeln vi vill använda är

$$F = \frac{MSB}{MSE} = \frac{(SSB)/(k-1)}{(SSE)/(n-k)}$$

som är F-fördelad med 2 och 12 frihetsgrader.

Steg 4. Vi vill ta fram vårt observerade värde på F. För att göra det så fyller vi i ANOVA-tabellen succesivt.

Med hjälp av formelsamlingen tar vi först fram A, B och C. Vi har $k = 3$, $n = 15$ och $n_j = 5, \forall j$.

$$A = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 = 13433.74$$

$$B = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} \left(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2 = 10849.06$$

$$C = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2 = 10275.65$$

Vi har då $SSB = B - C = 573.41$ och $SSE = A - B = 2584.68$ som vi skriver in i tabellen. Vi har även $SST = SSB + SSE = 3158.09$. Eftersom det är tre grupper och fem observationer i varje grupp så blir frihetsgraderna 2 och 12.

Vi har nu att $MSB = SSB/df = 286.705$ och $MSE = SSE/df = 215.39$. Slutligen får vi att $F = MSB/MSE = 1.33$.

Steg 5. Vi tittar i F-fördelningstabellen med 2 och 12 frihetsgrader och ser att det kritiska värdet är 3.89. Eftersom vårt observerade värde är lägre än det kritiska värdet så förkastar vi inte H_0 på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Slutsats: Vi kan inte utesluta att de olika modellerna har samma genomsnittliga livslängd.

5.) Låt T = totala vikten.

$$T = \sum_{i=1}^{860} \xi_i \quad \text{där } \xi_i = \text{vikten för brev nr. } i.$$

$$\mu = E(\xi_i) = 25\cdot 0{,}1 + 50\cdot 0{,}5 + 75\cdot 0{,}3 + 100\cdot 0{,}1 = 60 \text{ gram}$$

$$E(\xi_i^2) = 25^2\cdot 0{,}1 + 50^2\cdot 0{,}5 + 75^2\cdot 0{,}3 + 100^2\cdot 0{,}1 = 4000$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = E(\xi_i^2) - \left(E(\xi_i)\right)^2 = 4000 - 60^2 = 400$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{400} = 20 \text{ gram}$$

Centrala Gränsvärdes Satsen $\Rightarrow$ T är approx $N(860\cdot 60, \sqrt{860}\cdot 20)$
$= N(51600, 586.5)$

$$P(\text{säcken går sönder}) = P(T > 52500) =$$

$$= 1 - P(T \le 52500) = 1 - P\Big(\underbrace{\frac{T - 51600}{586.5}}_{=Z} \le \frac{52500 - 51600}{586.5}\Big)$$

$$= 1 - P(Z \le 1{,}53)$$

$$1 - \Phi(1{,}53) = 1 - 0{,}937 = \boxed{0.063}$$

Svar

6.) a) Teckentabell för CD:

CD
+
+
+
+
−
−
−
−
−
−
−
−
+
+
+
+

$$\Rightarrow l_{CD} = \frac{7{,}0+7{,}1+8{,}2+8{,}3+8{,}4+8{,}3+9{,}7+9{,}8}{8} - \frac{(8{,}6+8{,}4+9{,}6+9{,}8+6{,}8+6{,}5+8{,}0+8{,}3)}{8} = \boxed{0{,}1}$$

b) Välj till exempel

$E = ABC \quad F = BCD \quad G = ACD \quad H = ABCD$

$\Rightarrow I_1 = ABCE \quad I_2 = BCDF \quad I_3 = ACDG \quad I_4 = ABCDH$

$I_5 = I_1 I_2 = A\cancel{BC}E\cancel{BC}DF = AEDF \quad I_6 = I_1 I_3 = \cancel{A}B\cancel{C}E\cancel{AC}DG = BDEG$

$I_7 = I_1 I_4 = \cancel{ABC}E\cancel{ABC}DH = DEH \quad I_8 = I_2 I_3 = B\cancel{CD}F\,A\cancel{CD}G = ABFG$

$I_9 = I_2 I_4 = \cancel{BCD}F\,A\cancel{BCD}H = AFH \quad I_{10} = I_3 I_4 = \cancel{ACD}G\,\cancel{A}B\cancel{CD}H = BGH$

$I_{11} = I_1 I_2 I_3 = \cancel{ABC}E\,\cancel{BCD}F\,ACDG = CEFG$

$I_{12} = I_1 I_2 I_4 = \cancel{ABC}E\cancel{BCD}F\cancel{ABC}\cancel{D}H = BCEFH$

$I_{13} = I_1 I_3 I_4 = \cancel{ABC}E\cancel{ACD}G\,A\cancel{B}C\cancel{D}H = ACEH$

$I_{14} = I_2 I_3 I_4 = \cancel{BC}\cancel{D}F\,\cancel{AC}DG\,\cancel{AB}CDH = CDFGH$

$I_{15} = I_1 I_2 I_3 I_4 = \cancel{ABC}E\cancel{BC}DF\cancel{AC}DG\,ABC\cancel{D}H = ABDEFGH$

Kortaste ordet har längd 3 $\Rightarrow$ upplösningen = $\underline{III}$.

7.) $P(A\cap C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{obeavende}}}{=} P(A)P(C) = 0{,}01 \cdot 0{,}02 = 0{,}0002$

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$= 0{,}01+0{,}01+0{,}02-0{,}003-0{,}0002-0{,}003+0$$

$$= \boxed{0{,}0338}$$

$$P(\xi=0) = 1-P(A\cup B\cup C) = 1-0{,}0338 = \boxed{0{,}9662}$$

$$P(\xi=2) = P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(A\cap C) =$$

$$= 0{,}003+0{,}003+0{,}0002 = \boxed{0{,}0062}$$

$$P(\xi=1) = 1-P(\xi=0)-P(\xi=2) = 1-0{,}9662-0{,}0062$$

$$= \boxed{0{,}0276}$$

8

a)

Låt ξ_A = livslängden för komponent A, ξ_B = livsl. för B, ξ_C = livsl. för C.

ξ_A är $Exp(\lambda)$ där $\lambda = \frac{1}{1,5}$

$$P(\xi_A \geq 2) = \int_2^\infty \frac{1}{1,5} e^{-\frac{x}{1,5}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{1,5}}\right]_2^\infty = e^{-\frac{2}{1,5}} \approx 0,264$$

Samma sak för ξ_B och ξ_C

P(systemet fungerar efter 2 år)

$$= P(\{\xi_A \geq 2\} \cup (\{\xi_B \geq 2\} \cap \{\xi_C \geq 2\}))$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Additionssatsen}}}{=} P(\xi_A \geq 2) + P(\{\xi_B \geq 2\} \cap \{\xi_C \geq 2\}) - P(\{\xi_A \geq 2\} \cap \{\xi_B \geq 2\} \cap \{\xi_C \geq 2\})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{oberoende}}}{=} P(\xi_A \geq 2) + P(\xi_B \geq 2) P(\xi_C \geq 2) - P(\xi_A \geq 2) P(\xi_B \geq 2) P(\xi_C \geq 2)$$

$$= 0,264 + 0,264^2 - 0,264^3 = \boxed{0.315}$$

b) Bestäm $P(\eta \leq x)$: (← fördelningsfunktionen)

Vi har $\{\eta \geq x\} = \{\xi_A \geq x\} \cup (\{\xi_B \geq x\} \cap \{\xi_C \geq x\})$

På samma sätt som i a) fås att

$$P(\eta \geq x) = P(\xi_A \geq x) + P(\xi_B \geq x) P(\xi_C \geq x) - P(\xi_A \geq x) P(\xi_B \geq x) P(\xi_C \geq x)$$

$$= P(\xi_A \geq x) + P(\xi_A \geq x)^2 - P(\xi_A \geq x)^3$$

$$= \left\{ P(\xi_A \geq x) = \int_x^\infty \frac{1}{1,5} e^{-\frac{t}{1,5}} dx = \ldots = e^{-\frac{x}{1,5}} \right\}$$

$$= e^{-\frac{x}{1,5}} + e^{-\frac{2x}{1,5}} - e^{-\frac{3x}{1,5}} \Rightarrow$$

Forts →

$$P(\eta \le x) = 1 - P(\eta \ge x) = \boxed{1 - e^{-\frac{x}{1,5}} - e^{-\frac{2x}{1,5}} + e^{-2x}}$$

gäller om $x \ge 0$

Om $x < 0$ är fastis $P(\eta \le x) = 0$

Frekvens funktionen $f(x) = F'(x)$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{1,5}}}{1,5} + \frac{2}{1,5} e^{-\frac{2x}{1,5}} - 2e^{-2x} \quad \text{för } x \ge 0$$

och $f(x) = 0$ om $x < 0$.

3

Lösning: Låt p vara den riktiga sannolikheten att få par eller bättre om man blir tilldelad en pokerhand slumpmässigt.

(a) *Steg 1* $H_0 : p = 0.5$, $H_1 : p \neq 0.5$.

Steg 2 Signifikansnivån var bestämd till $\alpha = 0.01$.

Steg 3 Testvariabeln vi använder är

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}.$$

Steg 4 I vårt fall är $p_0 = 0.5$, $\hat{p} = 116/200$ och $n = 200$. Vårt värde på testvariabeln blir då tillslut $Z = 2.263$.

Steg 5 Det kritiska värdena tas fram genom att titta i normalfördelningstabellen. $\Phi(2.57) = 0.9949$ och $\Phi(2.58) = 0.9951$ så vi använder $\pm z^c = \pm 2.575$. Eftersom vår observerade testvariabel $Z = 2.263$ ligger mellan de kritiska värdena så kan vi inte förkasta H_0 på signifikansnivå $\alpha = 0.01$.

Slutsats: Kalle kan inte utesluta att chefen faktiskt har rätt.

(b) Eftersom vi inte förkastade nollhypotesen på signifikansnivå $\alpha = 0.01$ så vet vi att p-värdet är större än 0.01. Generellt sätt förkastar nollhypotesen på signifikansnivå α om och endast om p-värdet är mindre än α.

(c) Typ-1-fel begås när man förkastar en sann nollhypotes. Eftersom vi inte förkastade nollhypotesen i vårt fall så kan vi inte ha begått ett typ-1-fel. Typ-2-fel begås när man inte förkastar en falsk nollhypotes. Eftersom vi inte förkastade nollhypotesen så skulle vi kunna ha begått ett typ-2-fel.