Lösning till LKT325 31/8-2018 08:30-12.30

1. Vid planeringen av ett bostadsområde med 1000 hushåll (lägenheter) vill man dimensionera tillgången till parkeringsplatser. Låt ξ_j vara antal bilar i hushåll nr j, $j = 1, 2, \ldots, 1000$.

$$\eta := \sum_{j=1}^{1000} \xi_j \in \mathrm{N}(800, 0.6 \cdot \sqrt{1000}).$$

   (a) Sannolikheten att det kommer vara minst 820 bilar i bostadsområdet är

$$1 - \Phi\left(\frac{820 - 800}{0.6 \cdot \sqrt{1000}}\right) = \{\text{Tabell för N(0,1)}\} = 0.14592.$$

   Svar: Sannolikheten att det skall finnas minsta 820 bilar är 15%.

   (b) Sätt parkeringsplatser måste bostadsområdet till n. Då gälller

$$0.90 = P(\eta \leq n) = \Phi\left(\frac{n - 800}{6\sqrt{10}}\right) \Longleftrightarrow \frac{n - 800}{6\sqrt{10}} = 1.28 \Longleftrightarrow n = 824.3$$

   Svar: Antal P-platser skall vara minst 825 för att sannolikheten att alla bilar får plats är (minst) 90%.

   Lämpliga approximationer kan användas.

2. (a) Bestäm konstanten $C\ldots$

$$1 = C\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 2C\int_{0}^{1}(1-x^2)dx = 2C\left(x - x^3/3\right)_0^1 = 2C \cdot \frac{2}{3} \Longleftrightarrow C = \frac{3}{4}.$$

   (b) Väntevärdet $\mu = 0$ och varians

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = 2 \cdot \frac{3}{4}\int_{0}^{1}(x^2 - x^4)dx = \ldots \frac{1}{5}\,.$$

   Standardavvikelsen är $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

3. Givet sex oberoende mätningar som gav värdena $22, 20, 22, 30, 26, 24$, som ger $\overline{x} = 24.0$ och $s = 3.57771\ldots$ av en normalfördelad stokastisk variabel. Ett (symmetriskt) 90%:s konfidensintervall för μ

   (a) då $\sigma = 1.0$ med $\lambda_{0.05} = 1.65$:

$$\left[\overline{x} - \frac{\lambda_{0.05} \cdot 1.0}{\sqrt{6}}, \overline{x} + \frac{\lambda_{0.05} \cdot 1.0}{\sqrt{6}}\right] = [23.3, 24.7]$$

   (b) och då σ okänd:

$$\left[\overline{x} - \frac{t_{5,0.05} \cdot 3.57771}{\sqrt{6}}, \overline{x} + \frac{t_{5,0.05} \cdot 3.57771}{\sqrt{6}}\right] = [21.0, 26.9]$$

4. Följande sannolikheter är för händelserna A och B kända:

$$P(A) = 0.6, \quad P(A \cup B) = 0.8, \quad P(A \cap B) = 0.2.$$

   (a) Sannolikheten

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0.8 + 0.2 - 0.6 = 0.4.$$

   (b) Sannolikheten

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5.$$

   (c) Är A och B oberoende?

$$P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3 \neq 0.2$$

   och alltså beroende (ej oberoende).

5. (a) Beräkna antal möjliga registreringsnummer i det nuvarande systemet...

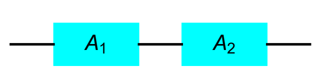
$$22^3 \cdot 10^3 = 10\,648\,000 \approx 10^6.$$

   (b) Antalet reg. nr, med det nya systemet är 32^4 $(32 = 22 + 10)$ och

$$32^4 = 2^{20} = 1\,048\,576 < 22^3 \cdot 10^3$$

   enligt (a). Alltså färre reg.nr med det nya systemet.

6. Oberoende och exponentialfördelade med förväntade livslängder på 2 år respektive 4 år. Elsystemet fungerar bara om båda komponenterna fungerar. Motsvarande värden på λ är $\lambda_1 = 1/2$ respektive $\lambda_2 = 1/4$.



(a) Sätt livslängden för komponent A_1 till ξ_1 och livslängden på komponent A_2 till ξ_2. Sannolikheten att systemet fungerar efter ett år är

$$P(\xi_1 > 1 \vee \xi_2 > 1) = \{\text{ober.}\} = e^{-\lambda_1 \cdot 1} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot 1} = e^{-1/2-1/4} = e^{-0.75} \approx 0.472.$$

(b) Sannolikheten att systemet fungerar, om komponent A_2 fungerar (efter ett år) är

$$P(\min(\xi_1, \xi_2) > 1|\xi_1 > 1) = \{\text{ober.}\} = P(\xi_2 > 1) = 0.78.$$

(c) Fördelningens stok. var. är $\eta := \min(\xi_1, \xi_2)$ och

$$\begin{aligned} P(\min(\xi_1, \xi_2) > t) &= P(\xi_1 \vee \xi_2 > t) = \{\text{ober.}\} = P(\xi_1 > t) \cdot P(\xi_2 > t) = \\ &= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \Leftrightarrow P(t \leq \eta) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \end{aligned}$$

Fördelningen för elsystemets livslängd är $\eta \in \exp(3/4)$.

7. (a) Svar: $l_{AC} = -0.5$ och $l_{ABC} = -2.5$.

(b) Orden blir $ABCD$, BCE, ACF, ADE, BDF, $ABEF$ och $CDEF$. Därför blir upplösningen III och alias till B blir ACD, CE, $ABCF$, $ABDE$, DF, AEF och $BCDEF$.

8. Den fullständiga ANOVA-tabellen bör se ut så här:

Variationskälla	SS	df	MS	F
Mellan jordsorter	9.658	3	3.21935	9.63
Inom jordsorter	6.688	20	0.33438	
Totalt	16.346	23		

Vi använder de fem stegen.

Steg 1. Låt μ_1, μ_2, μ_3 och μ_4 beteckna hur mycket plantorna växer i genomsnitt med respektive jordsort. Våra hypoteser blir $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ och H_1 : alla μ_i är inte lika.

Steg 2. Vi väljer signifikansnivå $\alpha = 0.05$. (Man är fri att välja signifikansnivå men det är bara 0.05 som finns i tabellen så om man väljer någon annan nivå får man problem.)

Steg 3. Testvariabeln vi vill använda är

$$F = \frac{MSB}{MSE} = \frac{(SSB)/(k-1)}{(SSE)/(n-k)}.$$

I vårt fall är $k - 1 = 4 - 1 = 3$ och $n - k = 24 - 4 = 20$ så vår testvariabel är F-fördelad med 3 och 20 frihetsgrader.

Steg 4. Vi vill ta fram vårt observerade vä rde på F. För att göra det så fyller vi i ANOVA-tabellen succesivt. Vi vet att $SST = SSB + SSE$ så vi vet att $SST = 9.658 + 6.688 = 16.346$. Eftersom det är fyra grupper och sex observationer i varje grupp blir frihetsgraderna 3 och 20. Vi vet också att $MSB = SSB/df = 3.21935$ och att $MSE = SSE/df = 0.33438$. Tillslut får vi att $F = MSB/MSE = 9.63$.

Steg 5. Vi tittar i F-fördelningstabellen med 3 och 20 frihetsgrader och ser att det kritiska värdet är 3.10. Eftersom vårt observerade värde är större än det kritiska värdet så förkastar vi H_0 på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Slutsats: Vi kan dra slutsatsen att jordtypen påverkar hur mycket Annas plantor växer.

9. (a) Låt μ beteckna den genomsnittliga vikten i tillverkarens chipspåsar.

Steg 1 Eftersom du vill påvisa att den genomsnittliga vikten är mindre än 200 gram så vill vi utföra ett ensidigt test. Hypoteserna blir alltså: $H_0 : \mu \geq 200$ och $H_1 : \mu < 200$.

Steg 2 Signifikansnivån var bestämd till $\alpha = 0.05$.

Steg 3 Vi får givet att vikten i chipspåsarna kan anses vara normalfördelade. Testvariabeln vi vill använda är alltså

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

som är $N(0, 1)$-fördelad.

Steg 4 I vårt fall är $\bar{x} = 196$, $\mu_0 = 200$, $\sigma = \sqrt{13}$ och $n = 16$. Vår observerade teststatistika blir då -1.2308.

Steg 5 Det kritiska värdet tas fram genom att titta i normalfördelningstabellen: -1.645. Eftersom vår observerade teststatistika är större (närmre 0) än det kritiska värdet så kan vi inte förkasta H_0 på signifkansnivå $\alpha = 0.05$.

Slutsats: Vi kan inte utesluta att tilllverkarens påstående stämmer.

(b) Testets styrka ges av

$$\begin{aligned} 1 - \beta =& P(\text{Förkasta nollhypotesen givet att } \mu = 190) = P(Z < -1.645) = \\ =& P\left(\frac{\bar{X} - 200}{13/\sqrt{14}} < -1.645\right) = P\left(\frac{\bar{X} - 190}{13/\sqrt{14}} - \frac{10}{13/\sqrt{14}} < -1.645\right) = \\ =& P\left(\frac{\bar{X} - 190}{13/\sqrt{14}} < -1.645 + \frac{10}{13/\sqrt{14}}\right) = P\left(\frac{\bar{X} - 190}{13/\sqrt{14}} < 1.23\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi nu vet att $\bar{X}$ är normalfördelad med väntevärde 190 och standardavvikelse $13/\sqrt{14}$ så vet vi att

$$\frac{\bar{X} - 190}{13/\sqrt{14}}$$

är normalfördelad med väntevärde 0 och standardavvikelse 1. Vi kan därför titta i direkt normalfördelningstabellen och få fram att

$$P\left(\frac{\bar{X} - 190}{13/\sqrt{14}} < 1.23\right) = 0.8907.$$

Svar: testets styrka är 0.8907.