Lösningsförslag , LKT325, 20190426

1. (a) Låt ξ var komponentens livslängd, d.v.s. $\xi \in \text{Exp}(1/200)$. Sannolikheten att komponentens livslängd överstiger 150 h är $P(\xi > 150) = e^{-150/200} = e^{-3/4} =: p$. Numeriskt är $p = 0.47\ldots$. 2p

   (b) Man har fem identiska komponenter som i (a). Sannolikheten att exakt tre av dessa fem har livslängd som överstiger 150 h är $\binom{5}{2} p^3(1-p)^2 = 0.29$. 3p

2. Ett nytt bostadsområde om 900 lägenheter. Man räknar med att för ett hushåll (= en lägenhet) gäller att sannolikheten att hushållet har 0, 1 och 2 bilar är 0.3, 0.6 respektive 0.1.

   (a) (b) Förväntat antal bilar för ett givet hushåll är

$$\mu = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8, \quad V = \sigma^2 = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 0.36$$

1p+1p

   (c) Man räknar med att göra 750 parkeringsplatser. Låt ζ vara summan av alla hushålls bilar. Då är, m.h.a. CGS, $\zeta \in \text{N}(0.8 \cdot 900, 0.6 \cdot 30) = \text{N}(720, 18)$. Sannolikheten att det finns p-platser till alla bilar är

$$P(\zeta \leq 750) = \Phi\left(\frac{750 - 720}{18}\right) = \Phi(5/3) = 0.95.$$

3p

   (d) Antal p-platser täcker 90% av behovet:

$$P(\zeta \leq n) = \Phi\left(\frac{n - 720}{18}\right) = 0.90 \Longleftrightarrow \frac{n - 720}{18} = \lambda_{0.10} = 1.3 \Longleftrightarrow n = 734.4$$

   Svar;. Man behöver 735 p-platser för att täcka behovet med sannolikheten 90%. 3p

3. Ett observerat stickprov $25.5, 24.5, 23.5, 23, 23.5$ av en normalfördelning är givet. Medelvärdet $\overline{x} = 24.0$ och standardavvikelsen skattas till $s = 1.0$.

   (a) Ett tvåsidigt konfidensintervall av fördelningens väntevärde: Vi behöver kvantilen $t_{4,0.025} = 2.78$. Detta ger kofidensintervall med gränser

$$\overline{x} \pm \frac{t_{4,0.025} \cdot s}{\sqrt{5}} \text{ d.v.s. } (22.7, 25.3).$$

2p

   (b) Ett 95% uppåt begränsat konfidensintervall av standardavvikelsen σ^2: $\chi^2_{4,0.05} = 0.71$. Övre gräns är

$$\sqrt{\frac{4 \cdot s^2}{\chi^2_{4,0.05}}} = \frac{2s}{\sqrt{0.71}} = 1.4$$

3p

   (c) Ett 90% tvåsidigt konfidensintervall av standardavvikelsen σ har samma övre gräns som i (a). Undre gräns är

$$\sqrt{\frac{4 \cdot s^2}{\chi^2_{4,0.95}}} = \frac{2s}{\sqrt{9.5}} = 0.39$$

   som ger intervallet $(0.39, 1.4)$. 2p

4. Givet sannolikheterna för två händelser A och B:

$$P(B|A) = \frac{2}{5}, \quad P(B|A^c) = \frac{7}{18} \text{ och } P(A^c \cap B^c) = \frac{11}{28}.$$

   Beräkna sannolikheterna...

   (a)

$$P(A): \quad P(A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c|A^c)} = \frac{P(A^c \cap B^c)}{1 - P(B|A^c)} = \frac{11/28}{11/18} = \frac{9}{14} \Longleftrightarrow P(A) = \frac{5}{14}.$$

3p

(b)

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} + \frac{9}{14} \cdot \frac{7}{18} = 1/7 + 1/4 = \frac{11}{28}.$$

3p

5. En pluton bestående av 30 soldater skall delas in i tio grupper vardera på tre soldater. Vi väljer först $\binom{30}{3}$ för första gruppen, $\binom{27}{3}$ för andra ända tills tiondes gruppen $\binom{3}{3}$. Enligt multiplikationsprincipen

$$\binom{30}{3} \cdot \binom{27}{3} \cdot \ldots \cdot \binom{3}{3} = \frac{30!}{(3!)^{10}}.$$

Detta tal skall divideras med 10! för att inte ta hänsyn till inbördes ordning, alltså är antal olika indelningar som finns

$$\frac{30!}{6^{10} \cdot 10!} = 1.2 \cdot 10^{18}.$$

5p

8. (4 poäng) **Lösning:** Den färdiga ANOVA-tabellen bör se ut så hä r:

Variationskälla	SS	df	MS	F
Mellan grupper	184.17	3	61.3886	2.5
Inom grupper	983.52	40	24.588	
Totalt	1167.69	43		

Vi använder de fem stegen.

Steg 1. Låt μ_1, μ_2, μ_3 och μ_4 beteckna genomsnittet för hur hårt han skjuter med de olika klubborna. Våra hypoteser blir $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ och $H_1 : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$.

Steg 2. Vi väljer signifikansnivå $\alpha = 0.05$. (Man är fri att välja signifikansnivå men det är bara 0.05 som finns i tabellen så om man väljer någon annan nivå får man problem.)

Steg 3. Testvariabeln vi vill använda är

$$F = \frac{MSB}{MSE} = \frac{(SSB)/(k-1)}{(SSE)/(n-k)}$$

som är F-fördelad med 3 och 40 frihetsgrader.

Steg 4. Vi vill ta fram vårt observerade värde på F. För att göra det så fyller vi i ANOVA-tabellen succesivt. Vi vet att $SST = SSB + SSE$ så vi vet att $SST = 184.17 + 983.52 = 1167.69$. Eftersom det är fyra grupper och tio observationer i varje grupp blir frihetsgraderna 3 och 40. Vi vet också att $MSB = SSB/df = 61.3886$ och att $MSE = SSE/df = 24.588$. Tillslut får vi att $F = MSB/MSE = 2.5$.

Steg 5. Vi tittar i F-fördelningstabellen med 3 och 40 frihetsgrader och ser att det kritiska värdet är 2.84. Eftersom vårt observerade värde är mindre än det kritiska värdet så förkastar vi inte H_0 på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Slutsats: Vi kan inte utesluta att han i genomsnitt skjuter lika hårt med alla klubborna. Han bär således inte lägga för stor vikt vid skotthastigheten när han bestämmer sig för vilken klubba han ska spela med.

9. (4 poäng)**Lösning:**

Låt μ beteckna den genomsnittliga mängd sopor som hämtas från lägenhetskomplexet varje vecka.

Steg 1 Eftersom vi bara är intresserade av huruvida mängden sopor överstigs eller inte så gör vi ett ensidigt test. Hypoteserna blir alltså: $H_0 : \mu \leq 1100$ och $H_1 : \mu > 1100$.

Steg 2 Vi bestä mmer signifikansnivå: $\alpha = 0.05$. Man är fri att välja signifikansnivå själv här.

Steg 3 Stickprovet är stort nog för att vi kan använda normalapproximationen, vi använder oss därför av testvariabeln

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

som är approximativt $N(0, 1)$-fördelad.

Steg 4 I vårt fall är $\bar{x} = 1146$, $\mu_0 = 1100$, $s = 106$ och $n = 52$. Vår observerade teststatistika blir då 3.13.

Steg 5 Det kritiska värdet tas fram genom att titta i normalfördelningstabellen: 1.645. Eftersom vår observerade teststatistika är större än det kritiska värdet så förkastar vi H_0 på signifkansnivå $\alpha = 0.05$.

Slutsats: Vi kan dra slutsatsen att det i genomsnitt hämtas mer än 1100 kg sopor från lägenhetskomplexet. Renhållningsbolaget borde ta mer betalt från bostadsföreningen!

6.1

a) $P(\xi_1 > -1) = 1 - P(\xi_1 \leq -1) = 1 - P(\underbrace{\frac{\xi_1 - 1}{1}}_{\sim N(0,1)} \leq \underbrace{\frac{-1-1}{1}}_{=-2})$

$= 1 - \Phi(-2) = 1 - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) = \boxed{0{,}9772}$

b) $P(\xi_1 \leq 1 \mid \xi_1 > -1) = \dfrac{P(\{\xi_1 \leq 1\} \cap \{\xi_1 > -1\})}{P(\xi_1 > -1)}$

$= \dfrac{P(-1 < \xi_1 \leq 1)}{P(\xi_1 > -1)} = \dfrac{P\left(\frac{-1-1}{1} < \frac{\xi_1 - 1}{1} \leq \frac{1-1}{1}\right)}{P(\xi_1 > -1)}$

$= \dfrac{\Phi(0) - \Phi(-2)}{P(\xi_1 > -1)} = \dfrac{0.5 - (1 - \Phi(2))}{P(\xi_1 > -1)} =$

$\underset{\text{enl. a)}}{\overset{\uparrow}{=}} \dfrac{0.5 - (1 - 0{,}9772)}{0{,}9772} \approx \boxed{0{,}4883}$

c) $P(\xi_1 + \xi_2 \leq 4) = \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + \xi_2 \sim N(1+2, \sqrt{1^2+1^2}) \\ \qquad = N(3, \sqrt{2}) \end{array} \right\}$

$= P\left(\underbrace{\frac{(\xi_1 + \xi_2) - 3}{\sqrt{2}}}_{\sim N(0,1)} \leq \underbrace{\frac{4-3}{\sqrt{2}}}_{\approx 0{,}71}\right) \approx \Phi(0{,}71) \approx \boxed{0{,}7611}$

7.

a) $l_A = \frac{(54,5+78,7+54,1+79,6)}{4} - \frac{(52,8+73,5+57,2+75,5)}{4} = 1,975$

$l_B = \frac{(73,5+78,7+75,5+79,6)}{4} - \frac{(52,8+54,5+57,2+54,1)}{4} = 22,175$

$l_C = \frac{(57,2+54,1+75,5+79,6)}{4} - \frac{(52,8+54,5+73,5+78,7)}{4} = 1,725$

b) $N = 8$ försök. $\alpha = 0,05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Det 95% referensintervallet blir $0 \pm 2 \cdot 1,96 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{8}} =$

$= 0 \pm 1,1087.$

Vi ser att l_A, l_B & l_C hamnar utanför intervallet.
Dessa är alltså signifikanta effekter.