2. Grundläggande sannolikhetslära

Två räkna sannolikheter

Relativa frekvensen: Antag att man kan upprepa försöket många gånger. Då är sannolikheten att en händelse A inträffar approximativt

$$P(A) = \frac{\textbf{antal gånger } A \textbf{ inträffar}}{\textbf{antal försök}}$$

Ex: Man har observerat att bland 1000 nyfödda barn har man 485 flickor. Då kan man säga att sannolikheten för att en slumpmässigt vald gravid kvinna föder en flicka är 0.485.

Klassiskt (inga experiment behövs): Om alla utfall av försöket är lika sannolika är

$$P(A) = \frac{\text{antal gynsamma fall för } A}{\text{antal möjliga fall}}$$

Ex: Antag att det är lika sannolikt att man har en flicka än att man har en pojke. Vad är sannolikheten att i en tvåbarnsfamilj både två barn är flickor?

Den klassiska sannolikheten kan användas om

- varje utfall har samma sannolikhet att inträffa

Frekvenstolkningen kan användas om

- upprepbara försök

- resultaten slumpmässiga och oberoende av varandra

Axiomer:

1) $P(\Omega) = 1$, där Ω är hela utfallsrummet

2) $0 \geq P(A) (\leq 1)$ för varje händelse A. Speciellt är $P(A) = 0$ om A är $\emptyset$

3) Om A och B är disjunkta händelser, är

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ex: Fördelningen av blodtyp i USA är följande: 41% A, 9% B, 4% AB och 46% O. En person körs till sjukhuset och hans blodtyp måste bestämmas. Vad är sannolikheten att blodtypen är A, B eller AB?

Sats 2.1 (additionssatsen): Sannolikheten av en unionhändelse $A \cup B$ är

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ex: Man analyserar havsvatten. Från tidigare studier vet man att 38% av samplen (nära ett industriområde) innehåller giftiga mängder av bly eller kvicksilver, 32% giftiga mängder av bly och 16% giftiga mängder av kvicksilver. Vad är sannolikheten att ett prov (taget på måfå på samma ställe nära industriområdet) kommer att innehålla giftiga mängder av bara bly (inte kvicksilver)?

2.3 Kombinatorik

Ordningen är viktig (permutation)

Ex: På hur många olika sätt kan man ordna 2 böcker? 50 böcker?

Multiplikationsprincipen: Antag att man skall göra k stycken operationer. Den första kan göras på n_1 sätt, den andra på n_2 sätt, ... och den $k$te på n_k sätt. Då är det totala antalet sätt att göra de k operationerna

$$n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Ex: På menyn finns det 3 soppor, 5 förrätter, 8 huvudrätter och 4 efterrätter. Hur många fullständiga menyer kan man välja?

Generellt: Om man har n olika element av k sorter, n_1 av den första sorten, n_2 av den andra och ... n_k av den $k$te, dåkan de n elementen kombineras på

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

olika sätt

Generellt: En grupp av k kan väljas bland n element (utan återläggning mellan val ochh utan hänsyn tilll ordning av de utvalda elementen) på

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

("n över k") olika sätt

Obs: $0! = 1$

Ex 2.11: Beräkna sannolikheten att få 2 kvinliga och en manlig student om man väljer 3 studenter helt slumpmässigt bland 50 stycken (24 kvinliga och 26 manliga) och om ordningen inte är viktig?

Ex 2.16: Man spelar poker och drar fem kort slumpmässigt från en kortlek. Beräkna sannolikheten att få två par, dvs. två kort av två valörer vardera och ett kort av en tredje?

Generellt: Antag att A och B är två händelser så att $P(A) \neq 0$. Den betingade sannolikheten av B givet A definieras

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Händelser A och B är oberoende om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Händelserna A_1, A_2 och A_3 är oberoende om och endast om de är parvist oberoende, dvs. att

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ för $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3,$

och

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Obs! Tre händelser kan vara parvist oberoende men inte oberoende.

Totala sannolikhetslagen: Antag att A_1, $A_2,\ldots,$ A_n är händelser sådana att $P(A_i) > 0$ för $i = 1,,,n$, A_i och A_j är disjunkta för varje $i \neq j$ och $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Då är för vilken händelse B som helst

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

Bayes sats: Låt A och B vara två händelser och $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Då är

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Om man antar att $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$ och samtliga antaganden i den totala sannolikhetslagen gäller, då är

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$