Ex: Man kastar två tärningar och är intresserad av två händelser:

$A =$ första tärningen ger en trea

$B =$ summan av de två är 8.

Man kan i stället för händelserna A och B titta på stokastiska variabler:

$X =$ antalet ögon på den första tärningen

$Y =$ summan av de två.

En stokastisk variabel är en variabel vars värde bestäms av utfallet vid ett slumpmässigt försök

Definition: En stokastisk variabel ξ är en reelvärd funktion, som får sitt värde från ett stokastiskt försök

Ex: Antag att ξ är en stokastisk variabel (s.v.) som ger antalet barn med bruna ögon av föräldrar som har en blå-gen och en brun-gen vardera. Totalt har de två barn.

Ex: Livslängden av en glödlampa, ξ, kan antas vara en stokastisk variabel.

Ex: Man kastar en tärning. Låt ξ vara antal kast tills man får en sexa för första gången.

Diskreta stokastisk variabel

En stokastisk variabel är diskret om den kan anta ändligt många (eller uppräkneligt oändligt många) olika värden.

Låt ξ vara en diskret stokastisk variabel. Funktionen

$$f(x) = P(\xi = x)$$

kallas sannolikhetsfunktionen (frekvensfunktionen) för ξ.

f är en sannolikhetsfunktion om och endast om

1) $f(x) \geq 0$

2) $\sum_{\text{alla } x} f(x) = 1$

Fördelningsfunktionen för ξ definieras

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{t \leq x} P(\xi = t) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

Ex 3.1: Man kastar en tärning och registrerar antal prickar som tärningen visar. Låt ξ vara antalet prickar vid ett kast. Utfallsrummet? Sannolikhetsfunktionen? Fördelningsfunktionen?

Ex 3.2: I ett elnät finns två spolar, A och B. Sannolikheten att spole A skall gå sönder en slumpmässigt vald dag är 0.002. Motsvarande sannolikhet för spole B är 0.005. Antag att de två spolarna går sönder oberoende av varandra. Bestäm sannolikhetsfunktionen och fördelnin för antal trasiga spolar.

3.1 Väntevärde för en diskret s.v.

Väntevärdet av en diskret stokastisk variabel definieras

$$\mathbf{E}[X] = \mu = \sum_{\text{alla } x} x\, P(X = x).$$

Några regler angående väntevärdet:

1) $\mathbf{E}[c] = c$, om c är konstant

2) $\mathbf{E}[cX] = c\mathbf{E}[X]$, c konstant

3) $\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$

3.2 Variansen och standardavvikelsen

Ex: Man vill jämföra ett nytt och ett gammalt läkemedel som används för att skaffa konstant hjärtslagshastighet efter en mild hjärtinfart. Låt X vara antalet hjärtslag per minut om det gamla läkemedlet används och Y om det nya läkemedlet används.

x	40	60	68	70	72	80	100
$P(\xi = x)$	0.01	0.04	0.05	0.80	0.05	0.04	0.01

y	40	60	68	70	72	80	100
$P(\nu = y)$	0.40	0.05	0.04	0.02	0.04	0.05	0.40

Låt ξ vara en s.v. med väntevärde μ. Variansen av ξ definieras

$$Var(\xi) = \sigma^2 = \mathbf{E}[(\xi - \mu)^2].$$

Den kan beräknas på följande sätt

$$Var(\xi) = \mathbf{E}[\xi^2] - \mathbf{E}[\xi]^2 = \mathbf{E}[\xi^2] - \mu^2.$$

Standardavvikelsen av ξ är

$$\sigma = \sqrt{Var(\xi)} = \sqrt{\sigma^2}$$

Ex. Man kastar en tärning. Låt ξ vara antalet prickor. $Var(\xi)$?

Några regler angående variansen:

1) $Var(c) = 0$, om c är konstant

2) $Var(c\xi) = c^2 Var(\xi)$, c konstant

3) Om ξ och ν är oberoende då är
$Var(\xi + \nu) = Var(\xi) + Var(\nu)$

Likformig fördelning

Alla utfall har samma sannolikhet att inträffa. Då är sannolikhetsfunktionen

$$P(\xi = x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, ..., n,$$

där n är antalet möjliga fall.

Hypergeometrisk fördelning

Ex. 3.7: Det finns 17 kulor i en urna och 5 av dem är vita. Man drar 9 kulor från urnan (utan återläggning). Antag att ξ är antalet vita kulor i urvalet. Sannolikhetsfördelningen för ξ?

Generellt: Man drar n objekt utan återläggning (och utan att tänka på ordningen) bland N objekt. Bland de N objekten finns det Np av typen man är intresserad av och $N - Np$ andra. Den stokastiska variabel ξ , som säger hur många intressanta objekt det finns bland de n man drar har hypergeometrisk fördelning, som har sannolikhetsfunktionen

$$P(\xi = x_i) = \frac{\begin{pmatrix} Np \\ x_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N - Np \\ n - n_i \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, x_i = 0, 1, ..., n$$

3.5 Binomialfördelning

När kan man använda binomialfördelning som en model?

1) n $(n \geq 1)$ oberoende försök

2) Det finns två möjliga utfall, success och failure

3) Sannolikheten för succé, är samma på varje försök. Om succésannolikheten är p, då är sannolikheten för "failure" $q = 1 - p$.

4) Låt ξ vara antalet succéer bland n försök. Då är ξ en stokastisk variabel som har binomialfördelning. Man säger att ξ är binomialfördelad med parametrar n (antalet oberoende försök) och p (succésannolikheten), $\xi \sim Bin(n, p)$.

Sannolikhetsfunktionen av ξ är

$$P(\xi = x) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) p^x (1-p)^{n-x},$$

för x=0,1,...,n

Ex. 3.11: Antag att man köper en fröpåse som innehåller 15 frön. På påsen står det att fröna har en 90%-ig groddbarhet. Vad är sannolikheten att åtminstone 14 frön från den inköpta påsen gror?

Väntevärdet och variansen för $\xi \sim Bin(n, p)$:

- $\mathbf{E}[\xi] = np$
- $Var(\xi) = np(1 - p)$

Poissonfördelningen

Kan användas för att approximera binomialfördeln
då succésannolikheten är liten

Några exempel om användning

- antal skrivfel per sida i en bok
- antal personer, som lever längre än 100 år, i en kommun
- antal kunder som besöker en affär under en viss dag

Om ξ är Poissonfördelad s.v., är dess sannolikhetsfunktion

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, ...,$$

där $\lambda > 0$ är en parameter och väntevärdet för fördelningen

Poissonfördelningen används också när man beskriver antalet gånger en händelse inträffar på ett visst tidsintervall, t.ex. antalet jordbävningar per månad

$\rightarrow$ **Poissonprocess**

Väntevärdet och variansen för $\xi \sim Poi(\lambda)$

$$\mathbf{E}[\xi] = Var(\xi) = \lambda$$