4. Kontinuerliga fördelningar

En stokastisk variabel är **kontinuerlig** om den kan anta vilket värde som helst på ett (eller flera) intervall i $\mathbf{R}$ och sannolikheten för vilket som helst specifikt värde är noll.

För att räkna sannolikheter använder man **frekvensfunktionen** av den stokastiska variabeln ξ. För en frekvensfunktion gäller det att

1) $f(x) \geq 0$ för $x \in \mathbf{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

3) $P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ för $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$

En funktion f är en frekvensfunktion om och endast om 1) och 2) gäller.

Obs! Från 3) får man att i kontinuerliga fallet är sannolikheten av vilket som helst specifikt värde lika med noll, dvs. att
$P(\xi = a) = P(a \le \xi \le a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$.

Obs!

1) Den totala arean under frekvensfunktions-kurvan är lika med 1. Sannolikheten att ξ är mellan a och b är arean av den delen av kurvan som är mellan a och b.

2)
$$\begin{aligned} P(a \le \xi \le b) &= P(a \le \xi < b) \\ &= P(a < \xi \le b) \\ &= P(a < \xi < b) \end{aligned}$$

därför att $P(\xi = a) = P(\xi = b) = 0$.

Ex. 4.5: Antag att livslängden i timmar, ξ, för en fiberoptisk kabel, som används för invärtes fotografering, kan beskrivas med hjälp av en kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & x \geq 100 \\ 0, & \text{annars} \end{cases} .$$

Beräkna sannolikheten att exakt 3 av 5 sådana kablar måste ersättas inom 150 timmars användande om vi antar att kablarna går sönder oberoende av varandra.

Väntevärdet av en kontinuerlig stokastisk variabel ξ är

$$\mathbf{E}[\xi] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

Om $H(\xi)$ är en funktion av ξ, är

$$\mathbf{E}[H(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f(x)\, dx.$$

Variansen är (som i diskreta fallet)

$$Var(\xi) = \sigma^2 = \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^2] = \mathbf{E}[\xi^2] - (\mathbf{E}[\xi])^2$$

och standardavvikelsen är

$$\sigma = \sqrt{Var(\xi)}$$

Medianen (mellersta värdet) Md är den punkt som delar ytan under frekvensfunktionen i två lika stora delar, dvs. att

$$P(\xi < Md) = P(\xi > Md) = 0.50$$

Exponentialfördelningen

En stokastisk variabel ξ med frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

är exponentialfördelad med parametern $\lambda > 0$

Weibullfördelningen

Används t.ex. för livslängden (ursprungligen för livslängden för lager)

En stokastisk variabel ξ med frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha} \exp(-x^{\beta}/\alpha), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

är Weibullfördelad med parametrar $\alpha > 0$ och $\beta > 0$

Normalfördelningen

En stokastisk variabel ξ med frekvenssfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

där $\mu \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$, är normalfördelad med parametrar μ och σ, $\xi \sim N(\mu, \sigma)$.

Parameter μ är **väntevärdet** av ξ och σ är **standardavvikelsen** av ξ.

Ex: En av de viktigaste orsaken för föroreningen av luften är kolväte (hydrocarbon) från bilar. Låt den stokastiska variabeln ξ vara mängden av kolväte (i gram) från en bil per km.

Antag att ξ är normalfördelad med väntevärde 1g och standardavvikelse 0.25g.

Standardiserad normalfördelning

Låt ξ vara normalfördelad med väntevärde μ och standardavvikelse σ. Då har den stokastiska variabeln $\frac{\xi-\mu}{\sigma}$ så-kallad standardiserad normalfördelning, dvs. normalfördelning med väntevärdet $\mu = 0$ och standardavvikelsen $\sigma = 1$.

Ex: (fortsätter) Vad är sannolikheten att en bil vald på måfå släpper mellan 0.9g och 1.54g kolväte per km?

Ex: Låt ξ vara mängden av bestrålning man kan absorbera innan man dör av bestrålningen. Anta att $\xi \sim N(500, 150)$. Över vilken bestrålningsnivå kan bara 5% av dem som blir bestrålade överleva?