Hypotesprövning - styrka

24 februari 2009

Vi har tidigare pratat om signifikansnivån, α, som är sannolikheten att förkasta en nollhypotes när den är sann. Nu ska vi titta lite närmare på det andra felet man kan göra, nämligen att inte förkasta nollhypotesen när mothypotesen är sann. Tabellen nedan ger de fyra situationer som kan uppstå vid en hypotesprövning.

	H_0 sann	H_1 sann
Förkastar inte H_0	Rätt, risk $1-\alpha$	Fel, risk β
Förkastar H_0	Fel, risk α	Rätt, risk $1-\beta$

Vanligtvis brukar man inte beräkna β utan $1-\beta$ som kallas för styrkan och är ett mått på möjligheten att förkasta en falsk nollhypotes. Styrkan vill vi ha så nära 1 som möjligt. Styrkan kallas även för styrkefunktionen eftersom den som vi snart kommer att se beror av det sanna populationsvärdet på den parameter vi vill testa. Styrkefunktionen beräknas för ett fixt värde på α och om man väljer ett lägre α så kommer styrkan att minska. Alltså när vi minskar risken att förkasta en sann nollhypotes kommer vi samtidigt att minska möjligheten att förkasta en falsk nollhypotes. Oftast gör man styrkeberäningar före data samlas in. Syftet är att bestämma om ett hypotestest kommer att förkasta en falsk nollhypotes eller inte. Hur styrkefunktionen beräknas ser vi på genom ett exempel. Det går naturligtvis bra att upprepa beräkningarna för andra situationer.

En kaffeproducent säljer 500 g kaffepaket. Paketen fylls med en procedur som ger att vikten hos ett kaffepaket är normalfördelad med medelvärde 500 g och standardavvikelse 7,65 g (vilket innebär att man precis uppfyller EUs krav på att högst 2,5 % av förpackningarna får underskrida 485 g). Nu misstänker tillverkaren att ett parti har för låg vikt och han tänker ta ett stickprov på 50 paket för att avgöra detta. Tillverkaren vill testa

$$H_0\colon \mu = 500$$
$$H_1\colon \mu < 500$$

Tillverkaren kan tänka sig att ha en signifikansnivå på 5 %. Före mätningen ska styrkan på testet beräknas. Testvariabeln är

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Vi antar här att standardavvikelsen är känd. Testvariabeln är standardnormalfördelad och vi kan som vanligt slå upp ett kritiskt värde. I detta fall är det kritiska värdet -1,64, d.v.s.

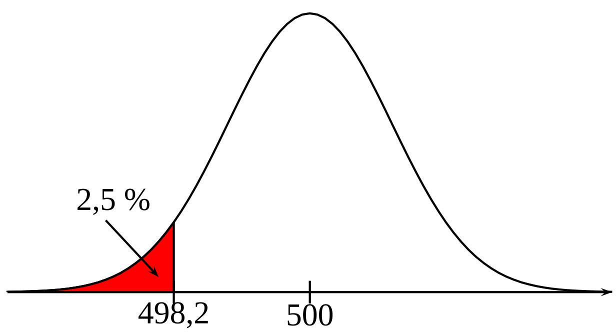
sannolikheten är 5 % att observera ett värde på testvariabeln som är lägre än -1,64. Egentligen kan vi lika gärna jobba med ett kritiskt värde på stickprovsmedelvärdet,

$$z_{\text{krit}} = \frac{\bar{x}_{\text{krit}} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x}_{\text{krit}} = \mu_0 + z_{\text{krit}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Med våra värden insatta får vi

$$\bar{x}_{\text{krit}} = 500 + (-1{,}64) \cdot \frac{7{,}65}{\sqrt{50}} = 498{,}2.$$

Vi förkastar alltså nollhypotesen om det uppmätta stickprovsmedelvärdet underskrider 498,2 g. I figur 1 visas fördelningen för stickprovsmedelvärdet (innan det är mätt) när nollhypotesen är sann med kritiskt värde inritat.

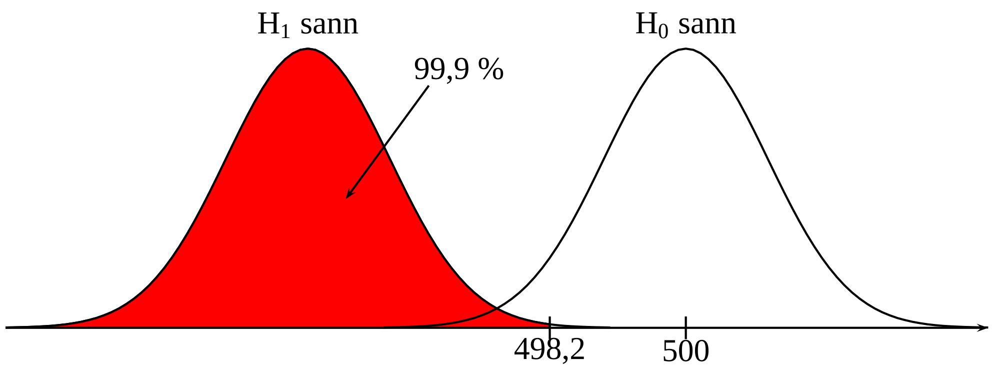


Figur 1: Signifikansnivån

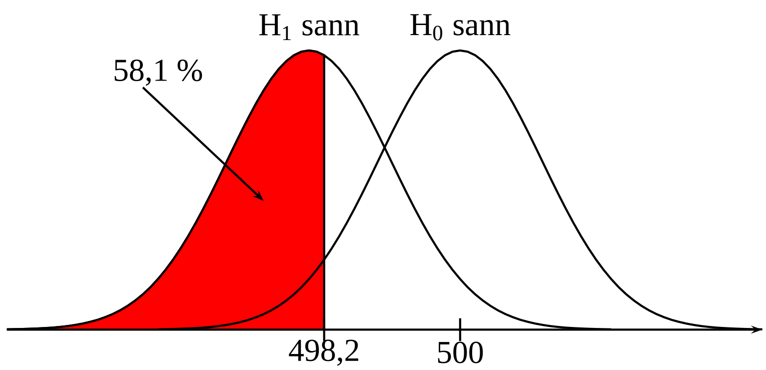
Om vi istället antar att mothypotsen är sann, måste vi precisera ett värde på μ. Vi antar att det sanna populationsmedelvärdet är 495 g. I så fall är stickprovsmedelvärdet normalfördelat med medelvärde μ = 495 g och standardavvikelse som förut $\sigma/\sqrt{n}$. Vi kan nu beräkna sannolikheten att förkasta H_0 om H_1 är sann som

$$P(\bar{x} < 498{,}2 \text{ om } H_1 \text{ sann}) = P\left(Z < \frac{498{,}2 - 495}{7{,}65/\sqrt{50}}\right) = P(Z < 2{,}98) = 1 - P(Z \geq 2{,}98)$$
$$\approx 100\% - 0{,}1\% = 99{,}9\%,$$

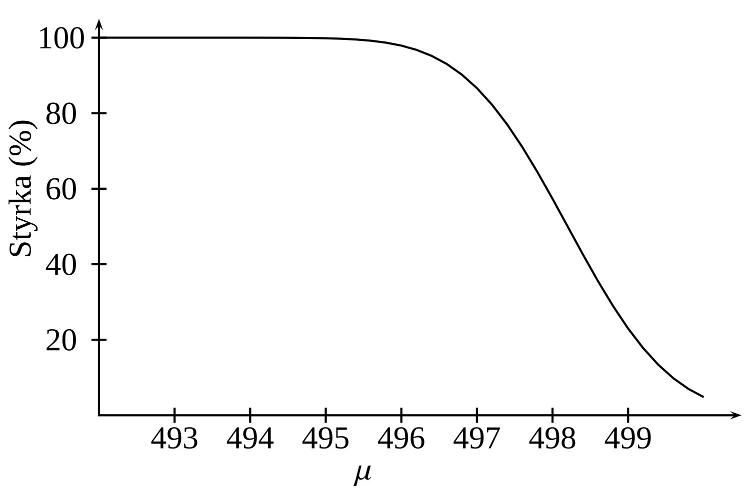
där Z som vanligt är en normalfördelad variabel med medelvärde 0 och standardavvikelse 1. Vi kan nu rita in fördelningen för $\bar{x}$ när mothypotsen är sann i figur 1 ovan och skugga styrkan, se figur 2. Vi har alltså beräknat att om det verkliga medelvärdet är 495 g så är sannolikheten 99,9 % att det upptäcks med ett test. Om beräkningarna upprepas med μ = 498 under H_1 får vi styrkan till 58,1 % istället, se figur 3. Alltså är sannolikheten 58,1 % att upptäcka om det verkliga medelvärdet på kaffepaketen är 498 g istället för 500 g. Vi kan beräkna styrkan för många värden på μ under mothypotesen. Dessa värden kan sedan plottas och vi får en graf över styrkefunktionen, se figur 4. Ur figur 4 ser vi att det är mycket stor sannolikhet, nästan 100 % att upptäcka om medelvikten på kaffepaketen är under 496 g. Vi ser också att om medelvikten är under den nominella vikten med 1 g så är sannolikheten bara 20 % att upptäcka det.



Figur 2: Styrkan om det sanna μ är 495.



Figur 3: Styrkan om det sanna μ är 498.



Figur 4: Styrkefunktionen.

Styrkefunktionen beräknas för fixa värden på α, σ och n. Styrkan påverkas även av vilka värden som dessa har. Signifikansnivån α väljer vi själva. Hur styrkan påverkas om signifikansnivån ändras kan vi förstå genom att titta på figur 2. En ökad signifikansnivå innebär att den vertikala linjen vid 498,2 flyttas till höger i figuren. Därmed kommer styrkan att öka. En minskad signifikansnivå flyttar istället linjen till vänster och styrkan minskar. Standarddavvikelsen är oftast inte så lätt att påverka, men om standardavvikelsen minskar så blir fördelningarna mindre utbredda och vi får en ökad styrka. Ökad stickprovsstorlek innebär också ökad säkerhet och därmed ökad styrka.

Övningsuppgifter

1. Beräkna styrkan för exemplet om det sanna värdet på μ är 498, men med en signifikansnivå på 1 %.

2. Beräkna styrkan för exemplet om det sanna värdet på μ är 498 med signifikansnivån 5 %, men om standardavvikelsen är hälften så stor, d.v.s. $\sigma = 3{,}83$.

3. Beräkna styrkan för exemplet om det sanna värdet på μ är 498 med signifikansnivån 5 %, men om stickprovsstorleken är dubbelt så stor, d.v.s. $n = 100$.

Svar: 1) 31,6 %, 2) 98 %, 3) 83,4 %.

Obs! Dessa värden är beräknade med dator och kan skilja sig lite från tabellvärden.