LMA521: Statistisk kvalitetsstyrning

Föreläsning 1

Anders Hildeman

Föreläsningens innehåll

1. Kvalitet
2. Acceptanskontroll enligt attributmetoden
3. Enkel provtagningsplan
4. Design av enkel provtagningsplan med binomialnomogram
5. Genomgång av problem 1.5 från boken.

Kvalitet

En tillverkad produkt (eller utförd tjänst) måste leva upp till vissa krav för att vara användbar.

Vad dessa krav är bestäms av yttre faktorer såsom marknad och lagstiftning men också av inre faktorer såsom ideal, stolthet, produktionsprocess, etc.

Kvalitet = uppfyllande av krav/förväntningar

Exempel:

Vilka skor har bäst kvalitet?

1. Sko 1: Håller 3 år med 70% sannolikhet men 1 år med 30% sannolikhet.
2. Sko 2: Håller 2 år med 100% sannolikhet.

Exempel:

Vilka skor har bäst kvalitet?

1. Sko 1: Håller 3 år med 70% sannolikhet men 1 år med 30% sannolikhet.
2. Sko 2: Håller 2 år med 100% sannolikhet.

Oftast efterfrågar marknaden förutsägbarhet. Sko 2 skulle därför vara att föredra även om den förväntade livslängden är längre för sko 1. Bra kvalitet är oftast associerat med liten spridning.

Vad kan dålig kvalitet bero på?

Vad kan dålig kvalitet bero på?

- Dålig kvalitet hos inköpta komponenter.
- Problem med tillverkningsprocessen.
- Kraven är orealistiska.

Kursen berör inte hur kvaliteten kan förbättras. Istället kommer vi gå igenom hur man upptäcker bristande kvalitet.

Hur upptäcker man bristande kvalitet?

Hur upptäcker man bristande kvalitet?

Man kontrollerar de producerade enheterna och ser om de lever upp till kraven. Man kontrollerar då en eller flera egenskaper (kvalitetsvariabler) hos enheterna .

Om man kontrollerar alla de producerade enheterna kallas det för allkontroll?

I många fall är inte allkontroll möjligt. Inspektionen kan vara för dyr för att genomföra på alla enheter eller inspektionen kan kräva att enheten förstörs.

Istället får man kontrollera ett urval av de producerade enheterna och dra en slutsats om alla enheter från resultatet. (acceptanskontroll).

Acceptanskontroll

Under acceptanskontroll så kontrollerar man n enheter slumpvist utvalda från de N möjliga.

På grund av slumpen i vilket urval man väljer så kan man, givet samma parti av enheter, dra olika slutsatser om man gör om kontrollen flera gånger.
Slumpen $\Rightarrow$ behov av statistik!

Den uppmätta kvalitetsvariabeln kan vara antingen kvalitativ eller kvantitativ.

Definition: Kvalitativ kvalitetsvariabel

Från kontrollen av en enhet kategoriseras den till en grupp (antingen felfri eller defekt).

Definition: Kvantitativ kvalitetsvariabel

Från kontrollen av en enhet tilldelas den ett tal. Från detta tal kan man se hur långt bort från kravgränserna enheten befinner sig.

En kvantitativ kvalitetsvariabel ger lite mer information. Det är dessutom lätt att kategorisera även den som felfri eller defekt beroende på om värdet är inom kvalitetsgränserna.

Acceptanskontroll enligt attributmetoden

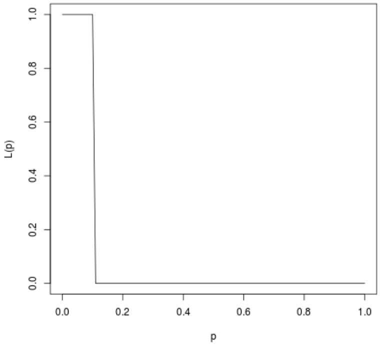
Om kvalitetsvariabeln är kvalitativ så används acceptanskontroll enligt attributmetoden.

1. Dra ett urval från ett parti av enheter.
2. Klassificera enheterna från urvalet som defekta eller felfria.
3. Avgör om hela partiet skall accepteras eller avvisas baserat på antalet defekta och felfria i urvalet.

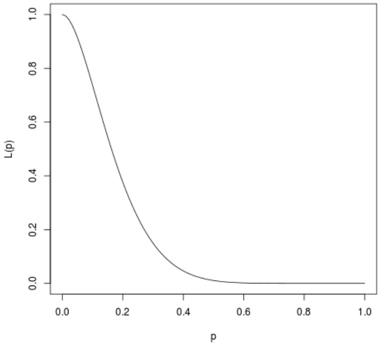
Acceptanssannolikheten, $L(p)$, beror på den totala sannolikheten att en enhet är defekt, $p = \frac{D}{N}$, samt n.
Här, är N totalt antal enheter, D totalt antal defekta enheter och n är stickprovsstorleken. p är sanolikheten att en slumpvist vald enheter är defekt.

Grafen av $L(p)$ och p kallas för OC-kurvan (Operating Characteristic Curve).

$L(p)$ är avtagande och idealt vill man att den skall se ut som i figur 1a. Det gör den vid allkontroll. Vid acceptanskontroll kommer kurvan tyvärr att få ett flackare utseende, figur 1b. Detta beror på slumpen i stickprovsurvalet.



(a) Allkontroll.



(b) Acceptanskontroll med $n < N$.

Målet med att designa en acceptanskontrollplan är att justera OC-kurvan så att den passar behoven så bra som möjligt.

Typiskt så vill man hålla n liten men samtidigt se till så att OC-kurvan blir så optimal som möjligt. D.v.s hög sannolikhet att acceptera för små p-värden och låg sannolikhet att acceptera för höga p-värden.

Enkel provtagningsplan

Definition: Enkel provtagningsplan

Välj ut n stycken enheter från de N existerande i partiet. Om $d < r$, acceptera partiet.

- N: Partiets storlek
  Antalet enheter som existerar i partiet.
- n: provgruppsstorleken
  Antalet enheter som kontrolleras.
- d: Antalet defekta enheter i provgruppen.
- r: avvisningstalet
  En, på förhand bestämd, gräns för hur många enheter som minst måste vara defekta för att man skall avvisa partiet.
- c: acceptanstalet
  Hur många enheter som mest kan tillåtas vara defekta i provgruppen utan att avvisa partiet. ($c = r - 1$).

Antal defekta enheter som upptäcks motsvarar ju det klassiska problemet med att man har en urna med N:st bollar av två färger, D är blå och resten är gröna. Man plockar sedan upp n:st ur urnan (utan återläggning).
Vad är sannolikhetsfördelningen för antal blå bollar som man plockat upp?

Enkel provtagningsplan

Vi vet sedan de första veckorna i kursen att detta kan modelleras med en slumpvariabel, ξ, som är hypergeometriskt fördelad, $\xi \sim Hyp(N, n, p)$, där $p = \frac{D}{N}$.

Sannolikheten att acceptera partiet, $L(p) = \mathbb{P}(\xi < r) = \mathbb{P}(\xi \leq c)$.

$$\mathbb{P}(\xi \leq c) = \sum_{i=0}^{c} \frac{\binom{Np}{i}\binom{N-Np}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

Som vi minns så är den hypergeometriska fördelningen lite jobbig att räkna på. Om vi skall räkna för hand kan vi istället använda oss av några approximationer från tidigare i kursen.

Approximationer: Hypergeometrisk fördelning

- Binomialfördelning: Ifall $\frac{n}{N} < 0.1$

$$\xi \sim Bin(n, p)$$

- Poissonfördelning: Ifall $\frac{n}{N} + p < 0.1$ och $n > 10$

$$\xi \sim Po(\lambda = Np)$$

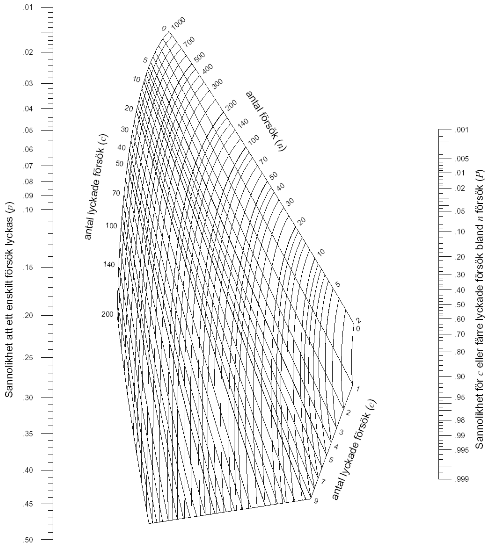
- Normalfördelning: Ifall $\frac{n}{N} < 0.1$ och $np(1-p) > 10$.

$$\xi \sim N\left(\mu = np, \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)\right)$$

- Vanligtvis i den här kursen kommer vi approximera den Hypergeometriska fördelningen med en binomialfördelning.
- Även denna är lite småjobbig att räkna på men vi kan ta fram acceptanssannolikheter med hjälp av tabeller för binomialfördelningen eller ett binomialfördelningsnomogram.

NOMOGRAM OVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n,p)$; X = antal lyckade försök



Exempel: Räkna ut acceptanssannolikheten

Ett parti om 1000 enheter innehåller 240 defekta. Vad är acceptanssannolikheten om provgruppsstorleken är 10 och avvisningstalet är 2?

Exempel: Räkna ut acceptanssannolikheten

Ett parti om 1000 enheter innehåller 240 defekta. Vad är acceptanssannolikheten om provgruppsstorleken är 10 och avvisningstalet är 2?

Lösning: Räkna ut acceptanssannolikheten

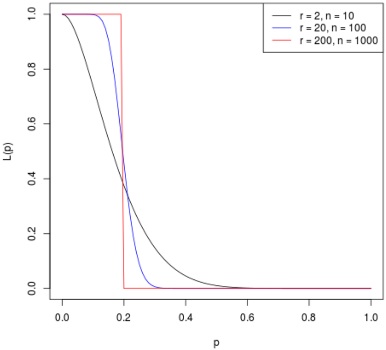
$N = 1000, n = 10, r = 2, p = \frac{240}{1000} = 0.24$
Binomial approximationen kan användas ty $\frac{n}{N} = 0.01 < 0.1$.

$$\xi \sim Bin(N = 10, p = 0.24)$$

$$L(p = 0.24) = \mathbb{P}(\xi < r) = \sum_{i=0}^{1} \binom{10}{i} (0.24)^i (0.76)^{10-i}$$
$$= 0.76^{10} + 10 \cdot 0.24 \cdot 0.76^9 \approx 26,7\%$$

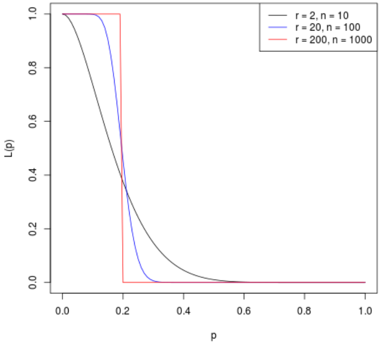
Antag att partiet borde ha avvisats om 20% eller mer av enheterna var defekta.

Vi räknade ut att med föreslagen enkel provtagningsplan så skulle det vara 26.7% risk att vi accepterade partiet även om antalet defekta enheter var 24%.

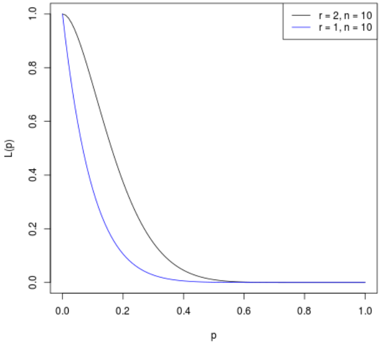


Figur: OC-kurvan för föregående exempel med olika stora provgrupper.

För att minska risken att acceptera när så inte borde så kan man förutom att öka n även minska r. Detta leder dock till att man kommer avvisa fler gånger när man inte borde.



(a) OC-kurvan för föregående exempel fast olika stora provgrupper.



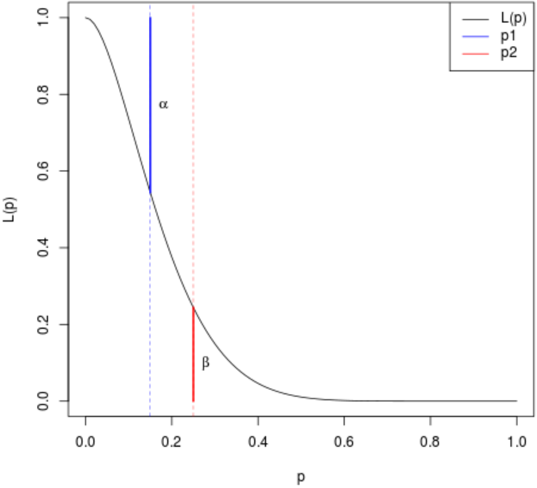
(b) OC-kurvan för föregående exempel fast olika stora avvisningstal.

Definition: Typer av fel

- Typ I fel: Avvisar ett bra parti. (Dyrt för producenten)
- Typ II fel: Accepterar ett dåligt parti. (Dåligt för konsumenten)

Definition: Kvalitetsgränser

- p_1 = Acceptabel kvalitetsnivå, <u>AQL</u>: Största felkvoten som kan anses vara tillfredsställande som processgenomsnitt
- p_2 = gränskvalitet, <u>LTPD</u>: Det sämsta värdet på kvalitetsnivån som konsumenten är villig att acceptera
- α = <u>producentrisk</u>: Risken att göra ett typ I fel vid p_1.
- β = <u>konsumentrisk</u>: Risken att göra ett typ II fel vid p_2.



Figur: OC-kurvan med producentrisk och konsumentrisk.

Vi bestämmer p_1 och p_2 samt de risker vi är beredda att ta vid dessa gränser (producentrisken och konsumentrisken). Alltså, $L(p_1) = 1 - \alpha, L(p_2) = \beta$

Den enkla provtagningsplanen har två parametrar (n, c).

Två ekvationer och två okända parametrar! Nu behöver man bara lösa ut bästa n och c värden från dessa krav. Om vi kan approximera den hypergeometriska fördelningen med en binomialfördelning så kan ett binomialfördelningsnomogram hjälpa oss här.

Problem: 1.5 a) (SK)

Ett företag har bestämt att ett bra parti innehåller högst 4% defekta enheter. Ett sådant parti skall accepteras med sannolikheten 95%. Ett dåligt parti innehåller minst 15% defekta enheter. Acceptanssannolikheten för ett sådant parti får bara vara 10%.

a) Vilken enkel provtagningsplan bör detta företag använda så att dessa villkor blir uppfyllda?

Problem: 1.5 a) (SK)

Ett företag har bestämt att ett bra parti innehåller högst 4% defekta enheter. Ett sådant parti skall accepteras med sannolikheten 95%. Ett dåligt parti innehåller minst 15% defekta enheter. Acceptanssannolikheten för ett sådant parti får bara vara 10%.

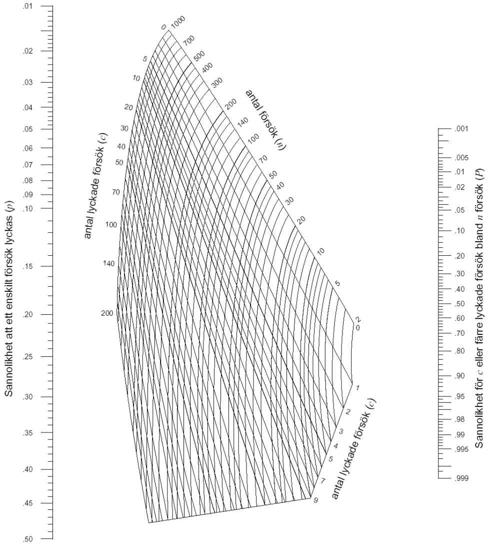
a) Vilken enkel provtagningsplan bör detta företag använda så att dessa villkor blir uppfyllda?

Lösning: 1.5 a) (SK)

$p_1 = 4\%,\ L(p_1) = 95\% = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 5\%$
$p_2 = 15\%,\ L(p_2) = 10\% = \beta$
Antag $N >> n$ eftersom det inte står något om storleken på N.
Därför kan vi approximera med en binomialfördelning för utfallet av antal defekta i provgruppen, $\xi \sim Bin(n, p)$.

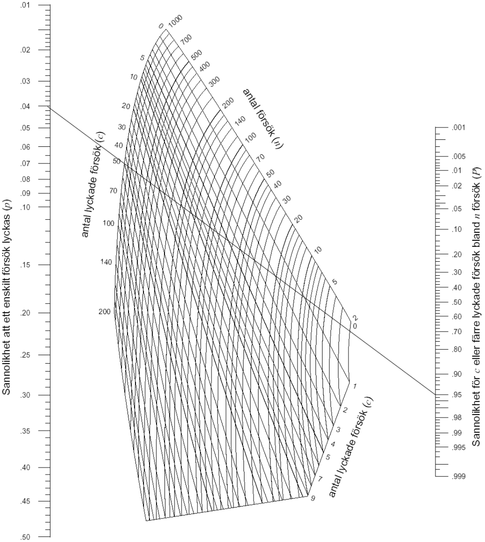
NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n, p)$; $X =$ antal lyckade försök



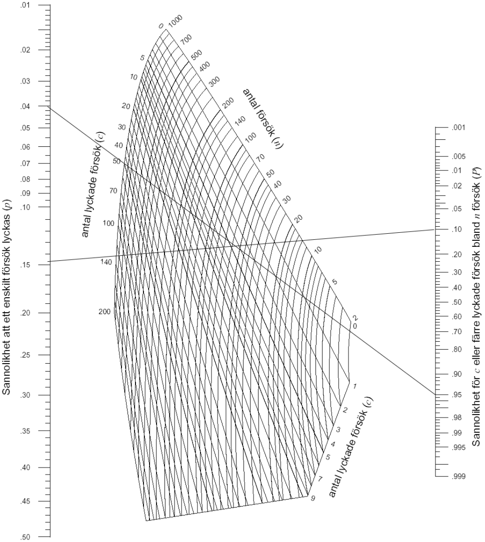
NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n, p)$; X = antal lyckade försök



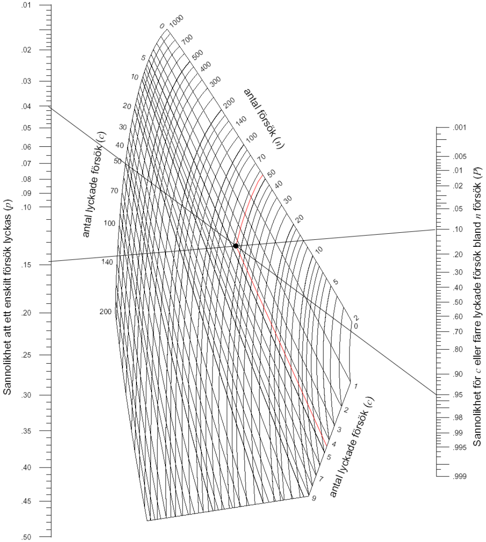
NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n, p)$; X = antal lyckade försök



NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n, p)$; X = antal lyckade försök



Lösning: 1.5 a) (SK)

Från binomialmonogrammet såg vi: $n \approx 60, c \approx 5$

Problem: 1.5 b) (SK)

Kontrollera att allting stämmer genom att räkna ut $L(p_1)$ och $L(p_2)$.

Lösning: 1.5 a) (SK)

Från binomialmonogrammet såg vi: $n \approx 60, c \approx 5$

Problem: 1.5 b) (SK)

Kontrollera att allting stämmer genom att räkna ut $L(p_1)$ och $L(p_2)$.

Lösning: 1.5 b) (SK)

$$L(4\%) = \sum_{i=0}^{5} \binom{60}{i} (0.04)^i (0.96)^{60-i} = 96.8\%$$

$$L(15\%) = 9.68\%$$

Sammanfattning

- Kvalitet
  Uppfyllandet av krav
- Acceptanskontroll
  Gör ett urval som är mindre än alla enheter i partiet. Dra slutsats om partiets kvalitet från detta urval.
- Enkel provtagningsplan
  En plan för hur man skall dra slutsatsen om partiets kvalitet givet en mindre urvalsgrupp.
- Design av enkel provtagningsplan med binomialnomogram:
  Dra linjer i ett binomialmonogram för att avgöra optimala n- och c-värden i den enkla provtagningsplanen. Fungerar bara om $n < \frac{N}{10}$ eftersom den är baserad på binomialapproximationen.