LMA521: Statistisk kvalitetsstyrning

Föreläsning 3

Anders Hildeman

Föregående föreläsning

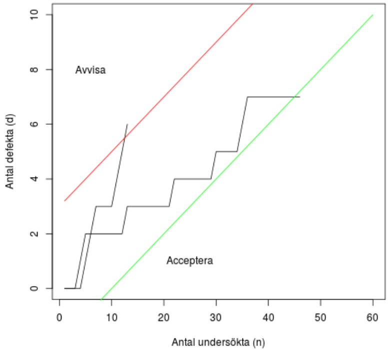
- Dubbel provtagningsplan
- Tabeller för Dubbel provtagningsplan

Dagens innehåll

1. Genomsnittsligt provuttag.
2. Genomgång av problem 1.16 från boken.
3. Genomsnittslig kontrollomfattning.
4. Genomsnittslig utgående kvalitet.
5. Genomgång av problem 1.24 från boken.

Sekventiell provtagningsplan

För resonemanget från dubbel provtagningsplan vidare. Från urval 2 kan man gå vidare till urval 3 etc. Detta kallas för sekventiell provtagningsplan. (Ingår inte i kursen!)



Figur: För varje kontrollerad enhet undersöker man ifall antal defekta är inom intervallet (mellan röd och grön linje).

Genomsnittsligt provuttag

Vi vill ha ett mått på hur många enheter vi i genomsnitt kommer att kontrollera.

Definition: Genomsnittsligt provuttag

ASN(p) = genomsnittsligt provuttag (Average Sample Number)
Förväntat antal enheter kontrollerade för given provtagningsplan och p-värde.

$$ASN(p) = \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(\text{Accepterar eller avvisar då k kontrollerats})$$

- Enkel provtagningsplan
  Man kontrollerar alltid n:st enheter.
  $$ASN(p) = n$$
- Dubbel provtagningsplan
  $ASN(p) = n_1 + n_2\mathbb{P}(c_1 < \xi_1(p) < r_1)$

Problem: 1.16

Beräkna ASN för ett parti med felkvoten 6%. Använd den dubbla provtagningsplanen $n_1 = 30, n_2 = 60, c_1 = 0, c_2 = 2$ och $r_1 = r_2 = 3$.

Problem: 1.16

Beräkna ASN för ett parti med felkvoten 6%. Använd den dubbla provtagningsplanen $n_1 = 30, n_2 = 60, c_1 = 0, c_2 = 2$ och $r_1 = r_2 = 3$.

Lösning: 1.16

$p = 0.06$ och vi antar binomialapproximation ($\frac{n}{N} < 0.1$) som vanligt. $\xi_1 \sim Bin(n = 30, p = 0.06)$

$$\mathbb{P}(0 < \xi_1 < 3) = \sum_{k=1}^{2} \binom{30}{k} 0.06^k \cdot 0.94^{30-k}$$

$$= 30 \cdot 0.06 \cdot 0.1662 + \frac{30 \cdot 29}{2} 0.0036 \cdot 0.1768 = 57.6\%$$

$$\Rightarrow ASN(6\%) = 30 + 60 \cdot 0.576 = 64.56$$

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = 2n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$			Approx. värde på $ASN(p_1)/n_1$
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10	
1	14.5	0	1	0.16	0.84	2.32	1.273
2	8.07	0	2	0.30	1.07	2.42	1.511
3	6.48	1	3	0.60	1.80	2.89	1.238
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Sista kolumnen i tabellerna för dubbel provtagningsplan ger oss ett approximativt värde för ASN(p_1).

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = 2n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$			Approx. värde på $ASN(p_1)/n_1$
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10	
1	14.5	0	1	0.16	0.84	2.32	1.273
2	8.07	0	2	0.30	1.07	2.42	1.511
3	6.48	1	3	0.60	1.80	2.89	1.238
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

T.ex. om vi vill ta reda på $ASN(p_1)$ för vår dubbla provtagningsplan från föregående exempel.

Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = 2n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtag-ningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$			Approx. värde på $ASN(p_1)/n_1$
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10	
1	14.5	0	1	0.16	0.84	2.32	1.273
2	8.07	0	2	0.30	1.07	2.42	1.511
3	6.48	1	3	0.60	1.80	2.89	1.238
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$p_1 = \frac{0.30}{30} = 0.01$$

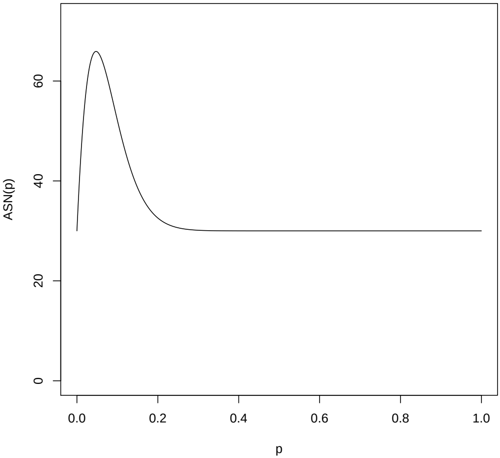
Tabell: Tabell för dubbel provtagningsplan när $n_2 = 2n_1$ och $\alpha = 5\%, \beta = 10\%$.

Provtag-ningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på $n_1 p$ då $L(p) =$			Approx. värde på $ASN(p_1)/n_1$
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10	
1	14.5	0	1	0.16	0.84	2.32	1.273
2	8.07	0	2	0.30	1.07	2.42	1.511
3	6.48	1	3	0.60	1.80	2.89	1.238
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$p_1 = \frac{0.30}{30} = 0.01$$

$$ASN(p_1) = 1.511 \cdot 30 = 45.33 \approx 45.419 \text{ (korrekt svar)}$$

Faktum är att eftersom $ASN(p)$ beror på p för en dubbel provtagningsplan så kan vi rita ut den som en graf.



Figur: ASN(p) för den dubbla provtagningsplanen från föregående exempel.

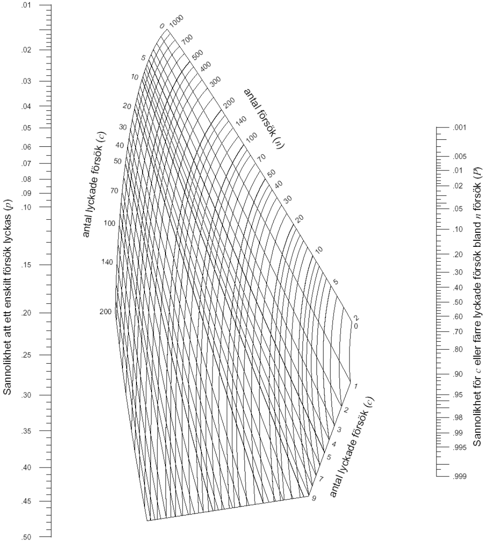
Vi kan jämföra detta med en enkel provtagningsplan med samma producent och konsumentrisk. Alltså: $p_1 = 1\%$ och $p_2 = 8.07 \cdot p_1 = 8.07\%$ (från tabellen). För att ta reda på den enkla provtagningsplanen så använder vi oss av binomialfördelningsnomogrammet,

$$L(1\%) = 0.95,$$

$$L(8.07\%) = 10\%.$$

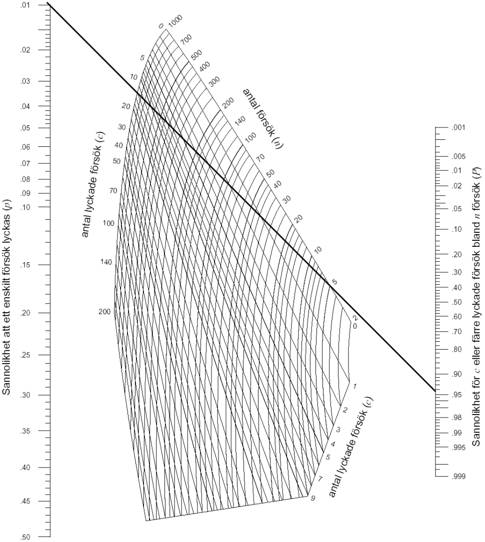
NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n,p)$; X = antal lyckade försök



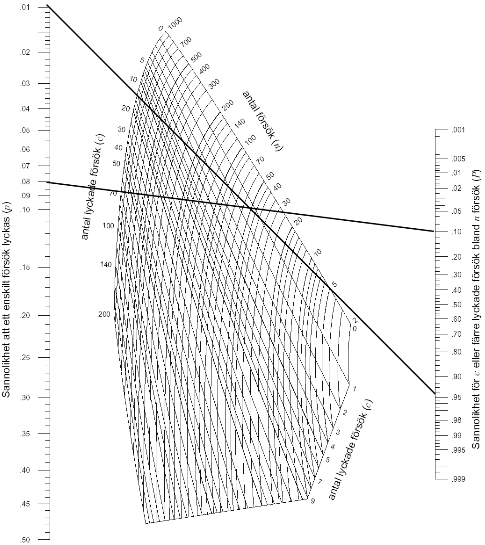
NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n,p)$; X = antal lyckade försök



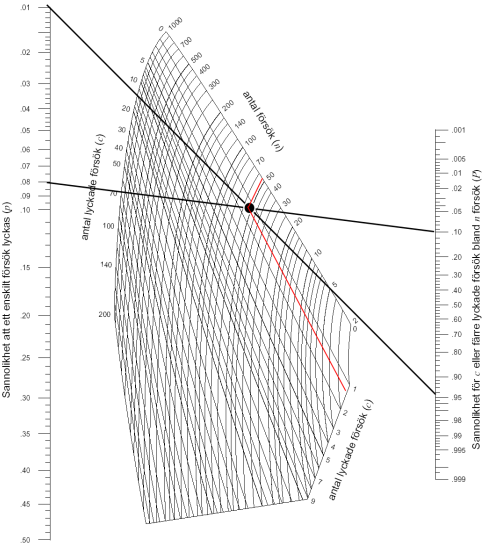
NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \leq c)$ där $X \in Bin(n, p)$; X = antal lyckade försök



NOMOGRAM OVER BINOMIALFÖRDELNINGEN

$P = P(X \le c)$ där $X \in Bin(n,p)$; X = antal lyckade försök



Vi kan jämföra detta med en enkel provtagningsplan med samma producent och konsumentrisk. Alltså: $p_1 = 1\%$ och $p_2 = 8.07 \cdot p_1 = 8.07\%$ (från tabellen). För att ta reda på den enkla provtagningsplanen så använder vi oss av binomialfördelningsnomogrammet,

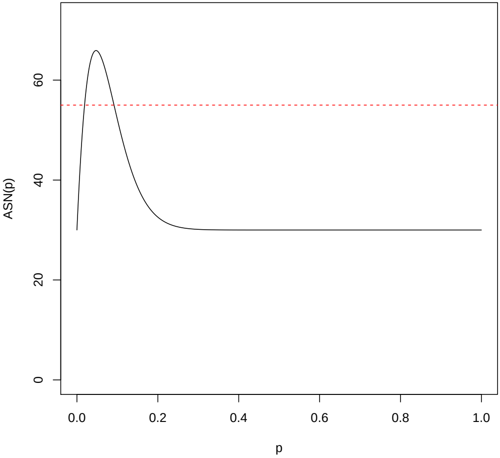
$$L(1\%) = 0.95,$$

$$L(8.07\%) = 10\%.$$

$$n = 55$$

$$c = 2$$

För de flesta p-värden är ASN bättre med den dubbla provtagningsplanen. Men inte i intervallet $[0.02, 0.09]$.



Figur: ASN(p) för dubbel provtagningsplan och enkel provtagningsplan.

Genomsnittslig kontrollomfattning

Vad gör man efter att man valt att avvisa ett helt parti?
I många fall vill man kontrollera hela partiet för att få en förståelse för varför så många var defekta och för att sälja de som faktiskt fungerade.
ATI är ett mått som berättar hur många man genomsnittsligt kan behöva kontrollera givet att ett avvisat parti allkontrolleras.

Definition: Genomsnittslig kontrollomfattning

ATI(p) = genomsnittslig kontrollomfattning (Average Total Inspection)
Förväntat antal enheter som kommer kontrolleras.

$$ATI(p) = \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(\text{Accepterar då k kontrollerats}) + N\mathbb{P}(\text{Partiet avvisas})$$

- Enkel provtagningsplan

$$ATI(p) = nL(p) + N(1 - L(p))$$

- Dubbel provtagningsplan

$$ATI(p) = n_1\mathbb{P}(\xi_1 \leq c_1) + (n_1 + n_2)\mathbb{P}((\xi_1 + \xi_2 \leq c_2) \cap (\xi_1 > c_1))$$

$$+ N\mathbb{P}((\xi_1 \geq r_1) \cup ((c_1 < \xi_1 < r_1) \cap (\xi_1 + \xi_2 \geq r_2)))$$

$ATI(p)$ varierar beroende på p för både en enkel och dubbel provtagningsplan.

Exempel: dubbel provtagningsplan

Antag provtagningsplanen
$n_1 = 20, n_2 = 30, c_1 = 2, r_1 = 5, c_2 = 4, r_2 = 5$. Partiet består av
$N = 1000$ enheter.
Vad blir $ATI(p = 10\%)$?

Lösning: första termen

Antag binomialfördelning: $\xi_1 \sim Bin(n = 20, p = 10\%)$
$n_1 \mathbb{P}(\xi \leq c_1) = 20 \sum_{k=0}^{2} \binom{20}{k} 0.1^k \cdot 0.9^{20-k} = 20 \cdot 0.6769 = 13.538.$

Lösning: andra termen

$$\xi_2 \sim Bin(n = 30, p = 10\%)$$

$$\mathbb{P}((\xi_1 + \xi_2 \leq c_2) \cap (\xi_1 > c_1)) = \sum_{k=3}^{4} \mathbb{P}(\xi_2 \leq 4 - k)\mathbb{P}(\xi_1 = k)$$

$$\mathbb{P}(\xi_2 \leq 0) = 0.9^{30} = 4.239\%$$

$$\mathbb{P}(\xi_2 \leq 1) = 4.239\% + 30 \cdot 0.1 \cdot 0.9^{29} = 18.369\%$$

$$\mathbb{P}(\xi_1 = 3) = \binom{20}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^{17} = 19.012\%$$

$$\mathbb{P}(\xi_1 = 4) = \binom{20}{4} 0.1^4 \cdot 0.9^{16} = 8.978\%$$

$$(n_1 + n_2)\mathbb{P}((\xi_1 + \xi_2 \leq c_2) \cap (\xi_1 > c_1)) \\ = 50(0.1837 \cdot 0.1901 + 0.0424 \cdot 0.0898) = 1.936$$

Lösning: tredje termen

$$\mathbb{P}((\xi_1 \geq r_1) \cup (\xi_1 + \xi_2 > c_2)) = \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \geq 5)$$
$$= \mathbb{P}(\xi_1 \geq 5) + \sum_{k=3}^{4} \mathbb{P}(\xi_2 \geq 5 - k)\mathbb{P}(\xi_1 = k)$$
$$\mathbb{P}(\xi_1 = 3) = 19.012\%, \quad \mathbb{P}(\xi_1 = 4) = 8.978\%$$
$$\mathbb{P}(\xi_1 \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(\xi_1 \leq 4) = 1 - 0.677 - 0.19 - 0.09 = 4.3\%$$
$$\mathbb{P}(\xi_2 \geq 5 - 3) = 1 - \mathbb{P}(\xi_2 \leq 1) = 81.63\%$$
$$\mathbb{P}(\xi_2 \geq 5 - 4) = 1 - \mathbb{P}(\xi_2 \leq 0) = 95.76\%$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}((\xi_1 \geq r_1) \cup (\xi_1 + \xi_2 > c_2)) = 0.043 + 0.816 \cdot 0.19$$
$$+ 0.958 \cdot 0.09 = 28.43\%$$
$$N \cdot 0.2843 = 284.3$$

Exempel: dubbel provtagningsplan

Antag provtagningsplanen
$n_1 = 20, n_2 = 30, c_1 = 2, r_1 = 5, c_2 = 4, r_2 = 5$. Partiet består av
$N = 1000$ enheter.
Vad blir $ATI(p = 10\%)$?

Lösning:

$$ATI(0.1) = 13.54 + 1.94 + 284.3 = 299.78$$

Genomsnittlig utgående kvalitet

Man kan också vara intresserad av den genomsnittsliga utgående felkvoten. (Hur många fel kunderna upptäcker)
Detta säger någonting om hur effektiv kvalitetsstyrningen har varit.

Definition: Genomsnittlig utgående kvalitet

AOQ(p) = genomsnittslig utgående kvalitet (Average Outgoing Quality)
Förväntad sannolikhet att en enhet är trasig hos de enheter som skickas vidare efter kvalitetskontrollen.

$$AOQ(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D-k}{N} \mathbb{P}(d = k \cap \text{acceptera})$$

Detta värde blir samma oavsett om man väljer att allkontrollera alla avvisade partier eller bara slänga dem.

Det finns approximativa formler för både enkel- och dubbel-provtagningsplan.

- Enkel provtagningsplan

$$AOQ(p) \approx pL(p)\frac{N-n}{N}$$

- Dubbel provtagningsplan

$$AOQ(p) \approx p\frac{N-n_1}{N}A_1 + p\frac{N-n_1-n_2}{N}A_2$$

$$A_1 = \mathbb{P}(\xi_1 \leq c_1)$$

$$A_2 = \mathbb{P}((c_1 < \xi_1 < r_1) \cap (\xi_1 + \xi_2 \leq r_2))$$

Problem: 1.24 a)

Antag att du har en enkel provtagningsplan $n = 80, c = 3$.
Partistorleken är 1000 enheter.
Beräkna den genomsnittsliga utgående kvaliteten vid en ingående felkvot på 5%.

Problem: 1.24 a)

Antag att du har en enkel provtagningsplan $n = 80, c = 3$.
Partistorleken är 1000 enheter.
Beräkna den genomsnittsliga utgående kvaliteten vid en ingående felkvot på 5%.

Lösning: 1.24 a)

Enligt definition:
$AOQ(p) = \sum_{k=0}^{c} \frac{D-k}{N} \mathbb{P}(\xi = k) = \{\text{binomial approximation}\} = \sum_{k=0}^{3} (0.05 - \frac{k}{N}) \binom{80}{k} 0.05^k \cdot 0.95^{80-k} = 2.05\%.$
Enligt approximation: $AOQ(p) \approx 0.05 \cdot L(0.05) \frac{10^3 - 80}{10^3} = 0.05 \cdot \left(\sum_{i=0}^{3} \binom{80}{i} 0.05^i \cdot 0.95^{80-i} \right) \frac{920}{10^3} = 0.046 \cdot 0.428 = 1.969\%$

Maximal genomsnittlig utgående kvalitet

Ett stort AOQ värde är dåligt (mer defekta enheter).
AOQL är det största AOQ värdet som kan fås för given provtagningsplan.

Definition: Gränsen för genomsnittlig utgående kvalitet

AOQL = gränsen för genomsnittslig utgående kvalitet (Average Outgoing Quality Limit)

$$AOQL = \max_{0 \leq p \leq 1} AOQ(p)$$

Ingår inte i kursen.

Acceptanskontroll enligt variabelmetoden

Tidigare: (godkänd eller defekt).
Om kontrollen innebär att man mäter någonting och får ett kvantitativt värde, då får man mer information än bara sant/falskt.

Givet vissa antaganden kan man dra slutsatser med mindre antal mätningar än för attributmetoden eftersom man fått den här extra informationen.

- Mätningarna antas fördelad som någon sannolikhetsfördelning med okända parametrar (typiskt normalfördelning).
- Parametrarna skattas från mätningarna.
- Sannolikheten att ett värde är oacceptabelt högt/lågt räknas ut med hjälp av sannolikhetsfördelningen.

Ingår inte i kursen.

Sammanfattning av dagens innehåll

- Genomsnittsligt provuttag ($ASN(p)$).
  Genomsnittsligt antal kontrollerade enheter per parti. Fördelen med dubbel provtagningsplan framför enkel är att ASN kan göras mindre.
- Genomsnittslig kontrollomfattning ($ATI(p)$)
  Om man antar allkontroll av avvisade partier. ATI beskriver det genomsnittsliga antalet enheter som måste kontrolleras.
- Genomsnittslig utgående kvalitet ($AOQ(p)$)
  Sannolikheten att en slumpmässigt vald enhet är defekt efter att den gått igenom kvalitetskontrollen.