LMA521 20160113

1. a) ξ = restiden för student A. ξ är $N(35, 3)$

$P(\text{anländer innan } 8.10) = P(\xi < 40) = P(\xi \leq 40)$

$= P\left(\frac{\xi - 35}{3} \leq \frac{40-35}{3}\right) = \Phi(5/3) \approx \Phi(1.67) = 0{,}9525$

η = antal dagar hon kommer i tid.

η är $Bin(n=5, p=0{,}9525)$

$P(\eta \geq 4) = P(\eta = 4) + P(\eta = 5) = \binom{5}{4} 0{,}9525^4 (1-0{,}9525)$

$+ \binom{5}{5} 0{,}9525^5 (1-0{,}9525)^0 = 5 \cdot 0{,}9525^4 \cdot (1-0{,}9525)$

$+ 0{,}9525^5 = 0{,}195 + 0{,}784 = \boxed{0{,}979}$

b) ξ = restiden för student A. ξ är $N(35, 3)$

γ = restiden för student B. γ är $N(34, 2)$

Söker: $P(\gamma < \xi) = P(\gamma - \xi < 0)$

Vi har $\gamma - \xi$ är $N(34-35, \sqrt{3^2+2^2}) = N(-1, \sqrt{13})$

$\Rightarrow P(\gamma - \xi < 0) = P\left(\frac{\gamma - \xi - (-1)}{\sqrt{13}} < \frac{0-(-1)}{\sqrt{13}}\right)$

$= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) = \Phi(0{,}277) \approx \boxed{0{,}61}$

2.) Låt η = antalet elever som kommer t. föreläsningen.

a) Då är η $Bin(n=200, p=0.87)$

Vi ser $np(1-p) = 200 \cdot 0{,}87 \cdot 0{,}13 = 22{,}62 > 10$.

Så η är approx $N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(174, 4{,}76)$

$$P(\eta > 179) = 1 - P(\eta \leq 179) = 1 - P\left(\frac{\eta - 174}{4{,}76} \leq \frac{179-174}{4{,}76}\right)$$
$$= 1 - \Phi(1{,}05) = 1 - 0{,}8531 = \boxed{0{,}1469}$$

b) Vill bestämma d så att $P(\eta \leq d)$ större än 0,95

så litet som möjligt

$$P(\eta \leq d) = P\left(\frac{\eta - 174}{4{,}76} \leq \frac{d-174}{4{,}76}\right) = \Phi\left(\frac{d-174}{4{,}76}\right)$$

$$= 0{,}95 \iff \frac{d-174}{4{,}76} = 1{,}645 \iff d = 1{,}645 \cdot 4{,}76 + 174$$
$$= 181{,}8$$

$\Rightarrow$ Välj $d = 182$

Svar: $\boxed{182}$ platser bör finnas.

3.) a) $E(\xi) = \int_0^1 x \frac{6}{7}(1+x-x^2)dx =$

$= \frac{6}{7}\int_0^1 x + x^2 - x^3 dx = \frac{6}{7}\left[x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 \right]_0^1 =$

$= \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{6}{7}\left(\frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \right)$

$= \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$E(\xi^2) = \frac{6}{7}\int_0^1 x^2 + x^3 - x^4 dx = \frac{6}{7}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$

$= \frac{6}{7}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{7}\left(\frac{20}{60} + \frac{15}{60} - \frac{12}{60} \right)$

$= \frac{6}{7}\,\frac{23}{60} = \frac{23}{70}$

$\Longrightarrow Var(\xi) = \frac{23}{70} - \frac{1}{4} = \ldots = \frac{11}{140} \approx 0{,}0786$

b) $Var(1-5\xi) = Var(-5\xi) = (-5^2)Var(\xi) =$
$= 25\, Var(\xi) \approx 25 \cdot 0{,}0786 = \boxed{1{,}965}$

c) $P(1/8 \leq \xi \leq 6/8 \mid 3/8 \leq \xi \leq 7/8) =$

$= \frac{P(\{1/8 \leq \xi \leq 6/8\} \cap \{3/8 \leq \xi \leq 7/8\})}{P(3/8 \leq \xi \leq 7/8)}$

$= \frac{P(3/8 \leq \xi \leq 6/8)}{P(3/8 \leq \xi \leq 7/8)} = \frac{\int_{3/8}^{6/8} \frac{6}{7}(1+x-x^2)dx}{\int_{3/8}^{7/8} \frac{6}{7}(1+x-x^2)dx}$

$= \ldots = \frac{\left(\frac{711}{1792}\right)}{\left(\frac{233}{448}\right)} \approx \boxed{0{,}763}$

4. $\bar{x} = 244,657$

a) $s = \sqrt{\frac{1}{6}\left((243,4 - \bar{x})^2 + \ldots + (244,2 - \bar{x})^2\right)} = \ldots = 1,08452$

Ett 95% konfidensintervall för μ då σ är okänt och vi har $n = 7$ mätningar ges av

$$\bar{x} \pm t(6) \cdot \frac{s}{\sqrt{7}} = 244,657 \pm 2,45 \cdot \frac{1,085}{\sqrt{7}} =$$

6 = antal frihetsgrader

$\alpha = 0,05$

$$\approx \boxed{244,657 \pm 1,005}$$

b) Skattningen av duglighetsindex:

$$C_p = \frac{T_ö - T_u}{6s} \approx \frac{255 - 245}{6 \cdot 1,085} \approx \boxed{1,54}$$

Skattningen av korrigerat duglighetsindex:

$$C_{pk} = C_p\left(1 - (M\right) = C_p\left(1 - \frac{|M - \bar{x}|}{(T_ö - T_u)/2}\right)$$

$$\approx 1,54\left(1 - \frac{|250 - 244,657|}{(255 - 245)/2}\right) = \ldots \approx -0,105.$$

$$M = \frac{T_ö + T_u}{2} = \frac{255 + 245}{2} = 250$$

Slutsats: Vi ser att $C_p \geq 1,33$ så spridningen är OK, men $C_{pk} < 1,33$ så processen tycks vara dåligt centrerad relativt kundens krav.

5.1

Låt ξ = antalet blå som dras från urna A.

$$P(\xi=0) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{3}{21}$$

$$P(\xi=1) = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{12}{42}\cdot 2 = \frac{24}{42} = \frac{12}{21}$$

$$P(\xi=2) = 1 - P(\xi=0) - P(\xi=1) = 1 - 3/21 - 12/21 = \frac{16}{21}$$

Låt η = antalet gröna som dras från urna B. Fördelningen för η beror på vad ξ blev.

Om $\xi = 0$ är η $Hyp(8, 4, \frac{6}{8})$

$\xi = 1$ är η $Hyp(8, 4, 5/8)$

$\xi = 2$ är η $Hyp(8, 4, 4/8)$

Så $$P(\eta=2 \mid \xi=0) = \frac{\binom{6}{2}\binom{2}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{\left(\frac{6!}{2!4!}\right)\cdot 1}{\left(\frac{8!}{4!4!}\right)} =$$

$$\frac{\frac{5\cdot 6}{2}\cdot 1}{\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$$

$$P(\eta=2 \mid \xi=1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{\left(\frac{5!}{2!\cdot3!}\right)\cdot 3}{70} = \frac{\left(\frac{4\cdot5}{2}\right)\cdot 3}{70}$$

$$= \frac{30}{70} = 3/7.$$

$$P(\eta=2 \mid \xi=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{\left(\frac{4!}{2!2!}\right)\left(\frac{4!}{2!2!}\right)}{70} = \frac{36}{70} = \frac{18}{35}$$

$$\Rightarrow P(\eta=2) = \frac{3}{14}\cdot\frac{3}{21} + \frac{3}{7}\cdot\frac{12}{21} + \frac{18}{35}\cdot\frac{6}{21} = \ldots = 0{,}42$$

forts →

Observera nu att

$$P(E) = P(\xi = 2) = \boxed{6/21 \ (\approx 0,29)}$$

$$P(F) = P(\eta = 2) = \boxed{0,42}$$

$$P(F|E) = P(\eta = 2 \mid \xi = 2) = \boxed{18/35 \quad \approx 0,51}$$

$$P(E|F) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes sats}}}{=} \frac{P(F|E)\,P(E)}{P(F)} \approx \frac{0,51 \cdot 0,29}{0,42} \approx \boxed{0,35}$$

6.

a) P(minst en trasig) = 1 − P(alla hela)

$= 1 - 0{,}96^6 \approx \boxed{0{,}217}$

oberoende

b) Låt G_1 = övre vägen funkar

G_2 = mellanvägen funkar

G_3 = undre vägen funkar

Oberoende $\Longrightarrow$ $P(G_1) = 0{,}96^3 \approx 0{,}884736$

$P(G_2) = 0{,}96^2 = 0{,}9216$

$P(G_3) = 0{,}96$

additionssatsen

$P(\text{systemet funkar}) = P(G_1 \cup G_2 \cup G_3) =$

$P(G_1) + P(G_2) + P(G_3) - P(G_1 \cap G_2) - P(G_2 \cap G_3) - P(G_1 \cap G_3)$
$+ P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) \approx$

oberoende

$= P(G_1) + P(G_2) + P(G_3) - P(G_1)P(G_2) - P(G_2)P(G_3) - P(G_1)P(G_3)$
$+ P(G_1)P(G_2)P(G_3) = \ldots \approx \boxed{0{,}999639}$

c) $P(G_1 \mid \text{syst funk}) = \dfrac{P(G_1 \cap \{\text{syst funk}\})}{P(\text{syst funk})} = \left\{ \begin{array}{c} G_1 \cap \{\text{syst funk}\} \\ = G_1 \end{array} \right\}$

$= \dfrac{P(G_1)}{P(\text{syst funk})} \approx \dfrac{0{,}884736}{0{,}999639} \approx \boxed{0{,}885056}$

7.) Teckentabell för AC:

a)

+
+
−
+
−
+
+
−
+
−
−
+
−
+

$$\Rightarrow l_{AC} = \frac{1}{8}(20{,}1 + 19{,}8 + 27{,}0 + 25{,}2 + 20{,}2 + 20{,}2 + 22{,}8 + 24{,}1)$$

$$- \frac{1}{8}(22{,}9 + 25 + 18{,}1 + 19 + 22{,}9 + 26{,}5 + 19{,}2 + 18{,}3)$$

$$= \boxed{0{,}9375}$$

b) $I_1 = ABE \quad I_2 = ACF \quad I_3 = ABCDG$

$I_4 = I_1 I_2 = ABEACF = BCEF \quad I_5 = I_2 I_3 = \cancel{A}\cancel{C}F\,\cancel{A}B\cancel{C}DG = BDFG$

$I_6 = I_1 I_3 = \cancel{A}\cancel{B}E\cancel{A}\cancel{B}CDG = CDEG$

$I_7 = I_1 I_2 I_3 = \cancel{A}\cancel{B}E\,\cancel{A}\cancel{C}F\,\cancel{A}\cancel{B}\cancel{C}DG = ADEFG$

$\Rightarrow$ kortaste ordet har längd 3 $\Rightarrow$ upplösning $\underline{\overline{III}}$.

c) Tag tex $E = ABC \quad F = ABD \quad G = BCD$

Då fås $I_1 = ABCE \quad I_2 = ABDF \quad I_3 = BCDG$

$I_4 = I_1 I_2 = \cancel{AB}CE\,\cancel{AB}DF = CDEF \quad I_5 = I_2 I_3 = A\cancel{B}\cancel{D}F\,\cancel{B}C\cancel{D}G = ACFG$

$I_6 = I_1 I_3 = A\cancel{B}\cancel{C}E\cancel{B}\cancel{C}DG = ADEG$

$I_7 = I_1 I_2 I_3 = \cancel{A}\cancel{B}\cancel{C}E\,\cancel{A}\cancel{B}\cancel{D}F\,B\cancel{C}\cancel{D}G = BEFG$

$\Rightarrow$ kortaste ordet har längd 4 $\Rightarrow$ upplösning $\underline{\overline{IV}}$.

8.)

$$P(\text{acc efter urval } 1) = \binom{30}{0}0{,}1^0\,0{,}9^{30} + \binom{30}{1}0{,}1^1\,0{,}9^{29} + \binom{30}{2}0{,}1^2\,0{,}9^{28} = \ldots = 0{,}41135$$

$$P(\text{acc efter urval } 2) = \binom{30}{3}0{,}1^3\,0{,}9^{27}\binom{30}{0}0{,}1^0\,0{,}9^{30} + \binom{30}{3}0{,}1^3\,0{,}9^{27}\binom{30}{1}0{,}1^1\,0{,}9^{29} + \binom{30}{4}0{,}1^4\,0{,}9^{26}\binom{30}{0}0{,}1^0\,0{,}9^{30}$$

$$= 0{,}01001 + 0{,}03336 + 0{,}00751 = 0{,}05088$$

$$\Rightarrow ATI(0{,}1) = 30\cdot 0{,}41135 + 60\cdot 0{,}05088 + 5000\cdot(1-0{,}41135-0{,}05088) = \boxed{2704{,}2}$$ ← sökta väntevärdet

Variansen blir:

$$30^2\cdot 0{,}41135 + 60^2\cdot 0{,}05088 + 5000^2(1-0{,}41135-0{,}05088) - \left(ATI(0{,}1)\right)^2 = 1{,}34\cdot 10^7 - 2704{,}2^2 \approx \boxed{6{,}13\cdot 10^6}$$

Approximationen OK eftersom $\frac{n_1+n_2}{5000} = \frac{60}{5000} < 0.1$