Tillämpad matematisk statistik LMA521
Tentamen 20160314

Tid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Kursboken **Matematisk Statistik** av Ulla Dahlbom. Formelsamlingen **Tabell- och formelsamling i matematisk statistik, försöksplanering och kvalitetsstyrning** av Håkan Blomqvist. Boken och formelsamlingen får ej innehålla extra anteckningar, men understrykningar, sticks och markeringar är tillåtna. **Chalmersgodkänd räknare.**
Examinator: Johan Tykesson
Telefonvakt: Johan Tykesson, 0703182096. Rond ca 9.30 och 11.30.
Betygsgränser: $0-19$ ger betyg U, $20-29$ betyg 3, $30-39$ betyg 4, $40-50$ betyg 5.

Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
OBS: text på tre sidor!

1. (7 poäng) Antalet hjortar som passerar ett visst skogsparti under en dag kan betraktas som en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärde 2. Antag att antalet hjortar som passerar under olika dagar är oberoende av varandra. Man tittar nu på 100 dagar.

   (a) Beräkna approximativt sannolikheten att det passerar mindre än eller lika med 220 hjortar under de 100 dagarna.

   (b) Låt η vara antalet dagar (av de 100) som det passerar exakt en hjort. Vilken fördelning har η? Beräkna approximativt sannolikheten att η är mindre än eller lika med 25.

   Motivera eventuella approximationer du gör vid lösandet av a och b ovan.

2. (2+2+2 poäng) Antag att ξ är en kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 8x^7 & \text{för } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

   (a) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för ξ.

   (b) Beräkna den betingade sannolikheten

$$P(0.7 \leq \xi \leq 0.8 \,|\, 0.4 \leq \xi \leq 0.8).$$

   (c) Låt $\eta = \xi^2$. Beräkna variansen för η.

3. (2+2 poäng) Antag att A, B och C är händelser. Antag att det gäller att $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.5$, A och B är oberoende, och att $P(A \cup B \cup C) = 0.95$.

   (a) Beräkna $P(A \cup B)$.

   (b) Beräkna $P(A^c \cap B^c \cap C)$.

4. (7 poäng) I en låda finns det 10 glödlampor. Fyra av lamporna är av typ A och de övriga 6 är av typ B. Livstiden för en lampa av typ A är exponentialfördelad med väntevärde 200 timmar. Livstiden för en lampa av typ B är exponentialfördelad med väntevärde 220 timmar. Antag nu att man väljer en lampa slumpmässigt.

   (a) Vad är sannolikheten att lampan fortfarande fungerar efter 230 timmars användning? (Dvs, vad är sannolikheten att lampans livstid är större än eller lika med 230?)

   (b) Antag att man ser att lampan fortfarande fungerar efter 230 timmars användning. Beräkna den betingade sannolikheten att lampan är av typ A givet detta.

5. (3+3 poäng) En fabrik tillverkar säckar med torrfoder för hundar. Fabrikens kunder har satt som övre toleransgräns $T_{\ddot{o}} = 20.5$ kilogram och undre toleransgräns $T_u = 19.5$ kilogram. Man gör en liten undersökning där man mäter vikten på 6 slumpmässigt utvalda säckar. Mätningarna kan antas oberoende av varandra och vi antar att de kommer från en normalfördelning med okänt väntevärde μ och okänd standardavvikelse σ. Man får mätvärdena (i kilogram)

$$20.12,\ 20.01,\ 20.12,\ 20.02,\ 19.93,\ 19.98$$

   (a) Beräkna ett 95% tvåsidigt konfidensintervall för σ.

   (b) Skatta kapabilitetsindex (duglighetsindex) och korrigerat kapabilitetsindex (korrigerat duglighetsindex) för tillverkningsprocessen med hjälp av mätvärdena ovan. (Vi har inte tillgång till normalfördelningspapper eller duglighetsblanketter så du får lov att skatta μ med $\bar{x}$ och σ med s.) Verkar det som att spridningen är tillräckligt liten? Verkar det som att processen är bra centrerad? Motivera utgående från de tumregler vi lärt oss. (6 säckar är förstås för lite för att få bra skattningar men det bortser vi från här.)

6. (7 poäng) En grossist köper in ett parti på 6000 USB-minnen. För att avgöra om partiet skall accepteras eller avvisas används en dubbel provtagningsplan som fungerar på följande vis: I urval 1 kontrolleras 20 USB-minnen. Om antalet defekta USB-minnen i urval 1 är mindre än eller lika med 1 så accepteras partiet. Om antalet defekta USB-minnen i urval 1 är större än eller lika med 4 så avvisas partiet. I övriga fall så går man till urval 2. I urval 2 kontrolleras 40 nya USB-minnen. Om det totala antalet defekta USB-minnen i urval 1 och urval 2 är mindre än eller lika med 3 så accepteras partiet. Annars avvisas partiet. Med andra ord, man har en dubbel provtagningsplan med parametrar $n_1 = 20$, $n_2 = 40$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $r_1 = 4$, $r_2 = 4$. Antag nu att felkvoten i partiet är 0.08. Låt A vara händelsen att partiet accepteras. Låt B vara händelsen att antalet defekta enheter i urval 1 är lika med 2.

   (a) Beräkna $P(A)$.

   (b) Beräkna den betingade sannolikheten $P(B|A)$.

   Motivera eventuella approximationer du gör vid lösandet av uppgiften.

7. (2+4 poäng) Man undersökte hur faktorerna A (temperatur), B (rotationshastighet), C (katalysator 1) och D (katalysator 2) påverkade resultatet i ett kemiförsök. Ett fullständigt faktorförsök med de olika faktorerna inställda på två olika nivåer (+ eller -) gjordes. Man fick följande resultat (i procent av ett visst ämne) vid de 16 olika försöken:

Nr.	A	B	C	D	Resultat y
1	-	-	-	-	55.6
2	+	-	-	-	56.0
3	-	+	-	-	65.5
4	+	+	-	-	65.2
5	-	-	+	-	65.3
6	+	-	+	-	65.4
7	-	+	+	-	75.2
8	+	+	+	-	75.4
9	-	-	-	+	55.0
10	+	-	-	+	55.1
11	-	+	-	+	65.5
12	+	+	-	+	65.3
13	-	-	+	+	65.1
14	+	-	+	+	65.2
15	-	+	+	+	78.0
16	+	+	+	+	75.4

(a) Beräkna tvåfaktorsamspelet l_{BC}.

(b) Antag att man också var intresserad av faktorerna E, F och G. Man gör ett reducerat faktorförsök. Man väljer teckenkolumner för A, B, C och D som ovan. Antag att man har valt generatorerna $E = ABC$, $F = BCD$ och $G = ABCD$. Beräkna alla ord (alla "I") i detta reducerade faktorförsök samt bestäm upplösningen. Antag att man tycker det är mycket viktigt att huvudeffekten för faktor B ej sammanblandas med något tvåfaktorsamspel. Är detta ett bra reducerat faktorförsök ur det hänseendet? Motivera!

8. (7 poäng) I en urna finns det 3 gula, 4 blåa och 5 gröna kulor. Antag att man drar 3 kulor slumpmässigt utan återläggning. Låt ξ vara antalet gröna kulor som dras och låt η vara antalet olika färger som dras (Dvs, $\eta = 1$ om de tre kulorna har samma färg, $\eta = 3$ om alla tre kulorna har olika färger och $\eta = 2$ i övriga fall.)

(a) Beräkna väntevärde och varians för η.

(b) Beräkna $P(\{\xi = 1\} \cap \{\eta = 2\})$.

Lycka till!