Lösningsförslag , LMA521, 20190426

1. (a) Låt ξ var komponentens livslängd, d.v.s. $\xi \in \text{Exp}(1/200)$. Sannolikheten att komponentens livslängd överstiger 150 h är $P(\xi > 150) = e^{-150/200} = e^{-3/4} =:$ p. Numeriskt är $p = 0.47\ldots$. 2p

   (b) Man har fem identiska komponenter som i (a). Sannolikheten att exakt tre av dessa fem har livslängd som överstiger 150 h är $\binom{5}{2}p^3(1-p)^2 = 0.29$. 3p

2. Ett nytt bostadsområde om 900 lägenheter. Man räknar med att för ett hushåll (=en lägenhet) gäller att sannolikheten att hushållet har 0, 1 och 2 bilar är 0.3, 0.6 respektive 0.1.

(a) (b) Förväntat antal bilar för ett givet hushåll är

$$\mu = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8, \quad V = \sigma^2 = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 0.36$$

1p+1p

   (c) Man räknar med att göra 750 parkeringsplatser. Låt ζ vara summan av alla hushålls bilar. Då är, m.h.a. CGS, $\zeta \in \text{N}(0.8 \cdot 900, 0.6 \cdot 30) = \text{N}(720, 18)$. Sannolikheten att det finns p-platser till alla bilar är

$$P(\zeta \leq 750) = \Phi\left(\frac{750 - 720}{18}\right) = \Phi(5/3) = 0.95.$$

3p

   (d) Antal p-platser täcker 90% av behovet:

$$P(\zeta \leq n) = \Phi\left(\frac{n - 720}{18}\right) = 0.90 \iff \frac{n - 720}{18} = \lambda_{0.10} = 1.3 \iff n = 734.4$$

   Svar;. Man behöver 735 p-platser för att täcka behovet med sannolikheten 90%.

3p

3. Ett observerat stickprov 25.5, 24.5, 23.5, 23, 23.5 av en normalfördelning är givet. Medelvärdet $\overline{x} = 24.0$ och standardavvikelsen skattas till $s = 1.0$.

   (a) Ett tvåsidigt konfidensintervall av fördelningens väntevärde: Vi behöver kvantilen $t_{4,0.025} = 2.78$. Detta ger kofidensintervall med gränser

$$\overline{x} \pm \frac{t_{4,0.025} \cdot s}{\sqrt{5}} \text{ d.v.s. } (22.7, 25.3).$$

2p

   (b) Ett 95% uppåt begränsat konfidensintervall av standardavvikelsen σ^2: $\chi^2_{4,0.05} =$ 0.71. Övre gräns är

$$\sqrt{\frac{4 \cdot s^2}{\chi^2_{4,0.05}}} = \frac{2s}{\sqrt{0.71}} = 1.4$$

3p

   (c) Ett 90% tvåsidigt konfidensintervall av standardavvikelsen σ har samma övre gräns som i (a). Undre gräns är

$$\sqrt{\frac{4 \cdot s^2}{\chi^2_{4,0.95}}} = \frac{2s}{\sqrt{9.5}} = 0.39$$

   som ger intervallet $(0.39, 1.4)$. 2p

4. Givet sannolikheterna för två händelser A och B:

$$P(B|A) = \frac{2}{5}, \quad P(B|A^c) = \frac{7}{18} \text{ och } P(A^c \cap B^c) = \frac{11}{28}.$$

Beräkna sannolikheterna...

   (a)

$$P(A): \quad P(A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c|A^c)} = \frac{P(A^c \cap B^c)}{1 - P(B|A^c)} = \frac{11/28}{11/18} = \frac{9}{14} \iff P(A) = \frac{5}{14}.$$

3p

(b)

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^c)=P(B|A)\cdot P(A)+P(B|A^c)\cdot P(A^c)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{14}+\frac{9}{14}\cdot\frac{7}{18}=1/7+1/4=\frac{11}{28}.$$

3p

5. En pluton bestående av 30 soldater skall delas in i tio grupper vardera på tre soldater. Vi väljer först $\binom{30}{3}$ för första gruppen, $\binom{27}{3}$ för andra ända tills tiondes gruppen $\binom{3}{3}$. Enligt multiplikationsprincipen

$$\binom{30}{3}\cdot\binom{27}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{3}{3}=\frac{30!}{(3!)^{10}}.$$

Detta tal skall divideras med 10! för att inte ta hänsyn till inbördes ordning, alltså är antal olika indelningar som finns

$$\frac{30!}{6^{10}\cdot 10!}=1.2\cdot 10^{18}.$$

5p

6.1

a) $P(\xi_1 > -1) = 1 - P(\xi_1 \le -1) = 1 - P(\underbrace{\frac{\xi_1 - 1}{1}}_{\sim N(0,1)} \le \underbrace{\frac{-1-1}{1}}_{=-2})$

$= 1 - \Phi(-2) = 1 - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) = \boxed{0{,}9772}$

b) $P(\xi_1 \le 1 \mid \xi_1 > -1) = \dfrac{P(\{\xi_1 \le 1\} \cap \{\xi_1 > -1\})}{P(\xi_1 > -1)}$

$= \dfrac{P(-1 < \xi_1 \le 1)}{P(\xi_1 > -1)} = \dfrac{P\left(\frac{-1-1}{1} < \frac{\xi_1 - 1}{1} \le \frac{1-1}{1}\right)}{P(\xi_1 > -1)}$

$= \dfrac{\Phi(0) - \Phi(-2)}{P(\xi_1 > -1)} = \dfrac{0{,}5 - (1 - \Phi(2))}{P(\xi_1 > -1)} =$

$\underset{\text{enl. a)}}{=} \dfrac{0{,}5 - (1 - 0{,}9772)}{0{,}9772} \approx \boxed{0{,}4883}$

c) $P(\xi_1 + \xi_2 \le 4) = \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + \xi_2 \sim N(1+2, \sqrt{1^2+1^2}) \\ \quad = N(3, \sqrt{2}) \end{array} \right\}$

$= P\left(\underbrace{\frac{(\xi_1 + \xi_2) - 3}{\sqrt{2}}}_{\sim N(0,1)} \le \underbrace{\frac{4-3}{\sqrt{2}}}_{\approx 0{,}71}\right) \approx \Phi(0{,}71) \approx \boxed{0{,}7611}$

7.)

a) $$l_A = \frac{(54{,}5 + 78{,}7 + 54{,}1 + 79{,}6)}{4} - \frac{(52{,}8 + 73{,}5 + 57{,}2 + 78{,}5)}{4} = 1{,}975$$

$$l_B = \frac{(73{,}5 + 78{,}7 + 78{,}5 + 79{,}6)}{4} - \frac{(52{,}8 + 54{,}5 + 57{,}2 + 54{,}1)}{4} = 22{,}175$$

$$l_C = \frac{(57{,}2 + 54{,}1 + 75{,}5 + 79{,}6)}{4} - \frac{(52{,}8 + 54{,}5 + 73{,}5 + 78{,}7)}{4} = 1{,}725$$

b) $N = 8$ försök. $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Det 95% referensintervallet blir $0 \pm \frac{2 \cdot 1{,}96 \cdot 0{,}8}{\sqrt{8}} =$

$= 0 \pm 1{,}1087.$

Vi ser att l_A, l_B & l_C hamnar utanför intervallet.
Dessa är alltså signifikanta effekter.

8. a) Avläsning i nomogrammet ger att en lämplig enkel provtagningsplan ges av urvalsstorlek $n = 90$ och acceptanstal $c = 5$. Med andra ord, testa 90 resistorer, och acceptera partiet om antalet defekta i urvalet är ≤ 5, annars avvisa.

b) $$\frac{p_2}{p_1} = \frac{0,1}{0,03} = 3,33$$

På rad 9 i tabellen över planer med $n_1 = n_2$ ser vi att det står 3,38 i kolumnen p_2/p_1. Detta är det som ligger närmast 3,33. Alltså blir $c_1 = 2$ och $c_2 = 6$.

I rad 9, kolumn 0,95 ser vi att $n_1 p_1 \approx 1,72 \Rightarrow$

$$n_1 \approx \frac{1,72}{p_1} = \frac{1,72}{0,03} \approx 57,33$$

I rad 9, kolumn 0,1 ser vi att $n_1 p_2 \approx 5,82$

$$\Rightarrow n_1 \approx \frac{5,82}{0,1} \approx 58,2$$

Så vi väljer $n_1 = n_2 = 58$ (det är OK att välja 57 också)

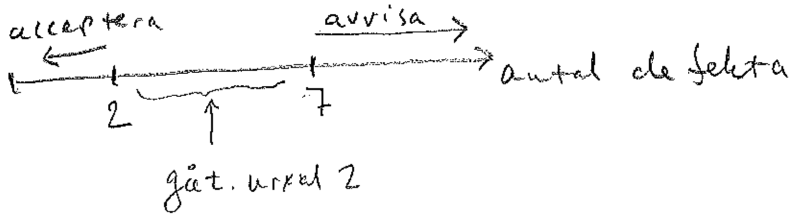
Så den dubbla planen blir: $n_1 = n_2 = 58$

$c_1 = 2$, $c_2 = 6$

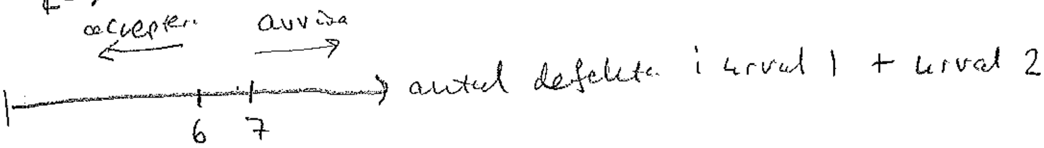
$r_1 = r_2 = c_2 + 1 = 7$

Med andra ord:

urval 1: testa 58 resistorer



urval 2: testa 58 resistorer



9.) $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{10}(7{,}0 + \dots + 7{,}0) = 6{,}91$

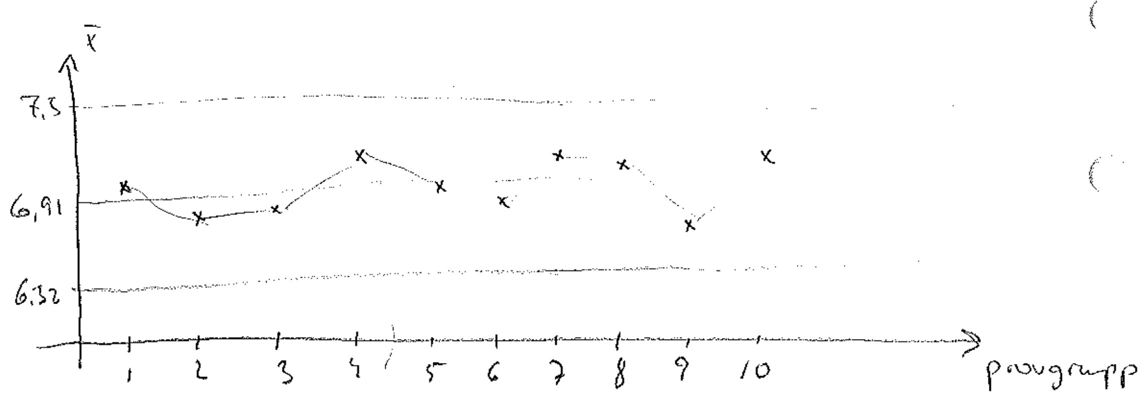
$\bar{s} = \frac{1}{10}(0{,}2 + \dots + 0{,}4) = 0{,}41$

Övre och undre gränser för $\bar{x}$-diagram (med s-metoden) ges av $\bar{\bar{x}} \pm A_3\bar{s} = 6{,}91 \pm 1{,}427 \cdot 0{,}41 \approx 6{,}91 \pm 0{,}59 = [6{,}32 \ 7{,}5]$

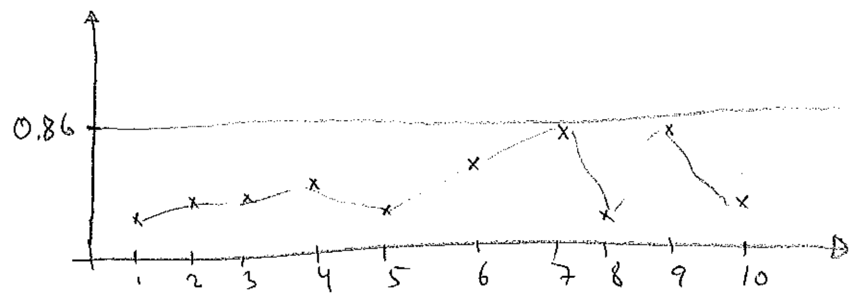
övre gräns för s-diagram $= B_4\bar{s} = 2{,}089 \cdot 0{,}41 = 0{,}8565$

undre —— " —— $= B_3\bar{s} = 0 \cdot 0{,}41 = 0$

$\bar{x}$-diagrammet:



s-diagrammet



Inga värden utanför gränserna så slutsatsen blir att processen är i statistisk kontroll.

NOMOGRAM ÖVER BINOMIALFÖRDELNINGEN
$P = P(X \le c)$ där $X \in Bin(n, p)$; X = antal lyckade försök

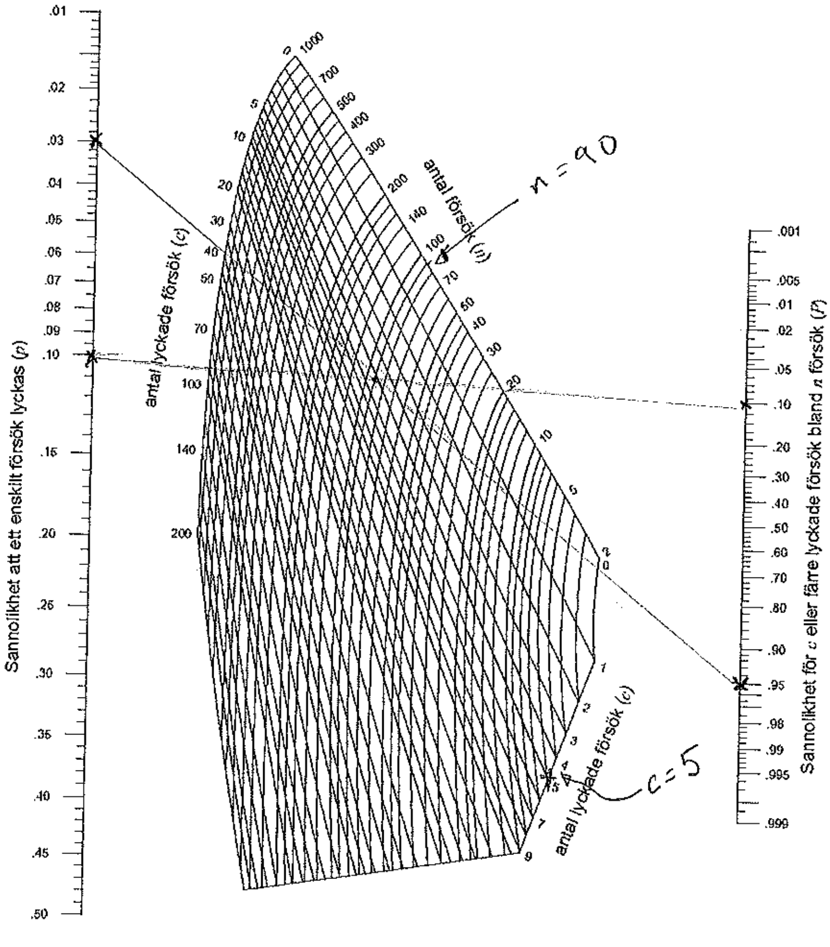


Figure 1: Binomialnomogram.