Lösningar LMA521 20160314

1.

Låt ξ_i = antalet hjortar som passerar under dag i $(i=1,\ldots,100)$

a) Låt $T=\sum_{i=1}^{100}\xi_i$. Vi har $\mu=E(\xi_i)=\lambda=2$

och $\sigma=\sqrt{\lambda}=\sqrt{2}$

$n>30 \Rightarrow$ CGS $\Rightarrow$ T är approx $N(2\cdot 100, \sqrt{100}\sqrt{2})$

$= N(200, 10\cdot\sqrt{2})$

$$P(T\leq 220)=P\left(\frac{T-200}{10\cdot\sqrt{2}}\leq\frac{220-200}{10\cdot\sqrt{2}}\right)\approx\Phi\left(\frac{20}{10\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\Phi(\sqrt{2})\approx\Phi(1{,}41)\approx\boxed{0{,}9207}$$

b) $P(\text{exakt en hjort under en dag})=\frac{e^{-2}\cdot 2^1}{1!}=2e^{-2}\approx 0{,}2707$

$\Longrightarrow$ η är $Bin(n=100, p=2e^{-2})$

Eftersom $np(1-p)=100\cdot 2e^{-2}(1-2e^{-2})\approx 19{,}76>10$

Så är η approx $N(np,\sqrt{np(1-p)})$

$=N(27{,}07,\ 4{,}44)$

$$P(\eta\leq 25)=P\left(\frac{\eta-27{,}07}{4{,}44}\leq\frac{25-27{,}07}{4{,}44}\right)\approx\Phi(-0{,}47)$$

$$=1-\Phi(0{,}47)=1-0{,}6808=\boxed{0{,}3192}$$

2.

a) $E(\xi) = \int_0^1 x \, 8x^7 \, dx = \int_0^1 8x^8 \, dx = \left[\frac{8x^9}{9}\right]_0^1 = \boxed{\frac{8}{9}}$

$E(\xi^2) = \int_0^1 8x^9 dx = \left[\frac{8x^{10}}{10}\right]_0^1 = \frac{8}{10}$

$\Rightarrow Var(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = \frac{8}{10} - \left(\frac{8}{9}\right)^2$

$= \ldots \approx \frac{4}{405}$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{Var(\xi)} = \sqrt{\frac{4}{405}} \approx \boxed{0,0994}$

b) $P(\underbrace{0,7 \leq \xi \leq 0,8}_{A} \mid \underbrace{0,4 \leq \xi \leq 0,8}_{B}) =$

$= P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{\uparrow}{=} \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\int_{0,7}^{0,8} 8x^7 dx}{\int_{0,4}^{0,8} 8x^7 dx}$

A med för B

$= \frac{\left[x^8\right]_{0,7}^{0,8}}{\left[x^8\right]_{0,4}^{0,8}} = \frac{0,8^8 - 0,7^8}{0,8^8 - 0,4^8} \approx \boxed{0,6590}$

c) $\eta = \xi^2$

$Var(\eta) = E(\eta^2) - (E(\eta))^2 = E(\xi^4) - (E(\xi^2))^2$

$= \left\{ E(\xi^4) = \int_0^1 x^4 \, 8x^7 dx = \int_0^1 8x^{11} dx = \left[\frac{8x^{12}}{12}\right]_0^1 = \frac{8}{12} \right\}$

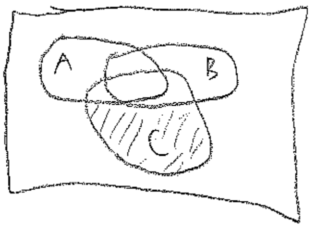
$\underset{\uparrow}{=} \frac{8}{12} - \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \ldots = \frac{2}{75} \approx \boxed{0,02667}$

enligt a)

3a) $P(A \cup B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{additionssatsen}}}{=} P(A)+P(B) - P(A \cap B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oberoende}}}{=} P(A)+P(B) - P(A)P(B)$

$= 0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}5^2 = 1 - 0{,}25 = \boxed{0{,}75}$

b) Venn-diagram:



Det strechade området /// $= A^c \cap B^c \cap C$

Vi ser att $P(A^c \cap B^c \cap C) = P(A \cup B \cup C) - P(A \cup B)$

$= 0{,}95 - 0{,}75 = \boxed{0{,}2}$

4.1

a) Låt ξ = slumpmässigt vald lampas livslängd

Låt $D = \{\xi \geq 230\}$

$E = \{$lampan är av typ A$\}$

Då fås $P(D) = P(D|E)P(E) + P(D|E^c)P(E^c)$.

Vi har $P(E) = \frac{4}{10}$ och $P(E^c) = \frac{6}{10}$

Dessutom gäller $P(D|E) = \int_{230}^{\infty} \frac{1}{200} e^{-\frac{x}{200}} dx$

$$= \left[-e^{-\frac{x}{200}}\right]_{230}^{\infty} = e^{-\frac{230}{200}} \approx 0,3166$$

På samma sätt fås $P(D|E^c) = e^{-\frac{230}{220}} = 0,3515$

Så $P(D) = 0.3166 \cdot 0.4 + 0.3515 \cdot 0.6 = \boxed{0,3375}$

b) Söker $P(E|D)$.

Enligt Bayes sats är $P(E|D) = \frac{P(D|E)\,P(E)}{P(D)} =$

$$= \frac{0,3166 \cdot 0.4}{0,3375} \approx \ldots \approx \boxed{0,3752}$$

enligt a)

5.1

a) $\bar{x} = \frac{1}{6}(20,12 + \ldots + 19,98) = 20,03$

$$s = \sqrt{\frac{1}{5}\left((20,12-20,03)^2 + \ldots + (19,98-20,03)^2\right)} = 0,0764$$

$\alpha = 0,05$, antal frihetsgrader $= 6-1=5$

$$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0,025} = 12,833$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0,975} = 0,8312$$

Ett 95 % konfidensintervall blir:

$$\left[\sqrt{\frac{5\cdot 0,0764^2}{12,833}}, \sqrt{\frac{5\cdot 0,0764^2}{0,8312}}\right] = \boxed{[0,0477,\ 0,1874]}$$

b) Skattning av C_p blir $\frac{T_ö - T_u}{6s} = \frac{20,5-19,5}{6\cdot 0,0764} = 2,1815$

Målvärdet $M = \frac{T_ö + T_u}{2} = \frac{20,5+19,5}{2} = 20$

$$\Rightarrow CM = \frac{|20-20,03|}{\frac{1}{2}(20,5-19,5)} = \frac{0,03}{0,5} = 0,06$$

$\Rightarrow$ Skattning av C_{pk} blir

$$C_p(1-CM) = 2,1815\cdot(1-0,06) = 2,1815\cdot 0,94 = 2,0506$$

Vi ser att $C_p \geq 1,33$ och $C_{pk} \geq 1,33$.

Det ser ut som att processens spridning är tillr. liten och dessutom bra centrerad.

6.

Låt d_1 = antalet defekta i urval 1

d_2 = —— " —— 2

a) $\frac{n_1+n_2}{N} < 0.1$ så d_1 approx $Bin(20$ d_2 approx $Bin(40$)

Partiet accepteras om:

$d_1 = 0$

$d_1 = 1$

$d_1 = 2 \quad d_2 = 0$

$d_1 = 2 \quad d_2 = 1$

$d_1 = 3 \quad d_2 = 0$

d_1 & d_2 approx oberoende

$$P(\text{partiet acc.}) = P(A) \overset{\downarrow}{=}$$

$$P(d_1=0) + P(d_1=1) + P(d_1=2)P(d_2=0) + P(d_1=2)P(d_2=1) + P(d_1=3)P(d_2=0)$$

$$= \binom{20}{0} 0{,}08^0\, 0{,}92^{20} + \binom{20}{1} 0{,}08^1\, 0{,}92^{19}$$

$$+ \binom{20}{2} \cdot 0{,}08^2\, 0{,}92^{18} \binom{40}{0} 0{,}08^0\, 0{,}92^{40} + \binom{20}{2} 0{,}08^2\, 0{,}92^{18} \binom{40}{1} 0{,}08^1\, 0{,}92^{39}$$

$$+ \binom{20}{3} 0{,}08^3\, 0{,}92^{17} \binom{40}{0} 0{,}08^0\, 0{,}92^{40}$$

$$= 0{,}1887 + 0{,}3282 + 0{,}0097 + 0{,}0336 + 0{,}0050$$

$$= \boxed{0{,}5652}$$

b) $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(d_1=2,\ d_2=0) + P(d_1=2,\ d_2=1)}{P(A)}$$

$$\underset{\text{enligt a)}}{=} \frac{0{,}0097 + 0{,}0336}{0.5652} = \boxed{0{,}0766}$$

7.) Teckentabell för BC:

a)

1	+
2	+
3	−
4	−
5	−
6	−
7	+
8	+
9	+
10	+
11	−
12	−
13	−
14	−
15	+
16	+

$$l_{BC} = \frac{(y_1 + y_2 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{15} + y_{16})}{8}$$

$$- \frac{(y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14})}{8}$$

$$= \frac{(55,6 + 56 + 75,2 + 75,4 + 55 + 55,1 + 78 + 75,4)}{8}$$

$$- \frac{(65,5 + 65,2 + 65,3 + 65,4 + 65,5 + 65,3 + 65,1 + 65,2)}{8}$$

$$= \boxed{0.4}$$

b) Generatorer: $E = ABC$ $F = BCD$ $G = ABCD$

$I_1 = \boxed{ABCE}$ $I_2 = \boxed{BCDF}$ $I_3 = \boxed{ABCDG}$

$I_4 = I_1 I_2 = AB\cancel{C}E\cancel{B}\cancel{C}DF = \boxed{AEDF}$

$I_5 = I_1 I_3 = \cancel{A}\cancel{B}\cancel{C}E\cancel{A}\cancel{B}\cancel{C}DG = \boxed{DEG}$

$I_6 = I_2 I_3 = \cancel{B}\cancel{C}\cancel{D}FA\cancel{B}\cancel{C}\cancel{D}G = \boxed{AFG}$

$I_7 = I_1 I_2 I_3 = \cancel{A}\cancel{B}\cancel{C}E\,BCDF\,\cancel{A}\cancel{B}\cancel{C}\cancel{D}G = \boxed{BCEFG}$

Kortaste ordet har längd $3 \Rightarrow$ upplösningen $= 3$.

Sammanblandningsmönstret för B:

$B = BI_1 = \cancel{B}ABCE = ACE$ $BI_2 = B BCDF = CDF$

$BI_3 = BABCDG = ACDG$ $BI_4 = BAEDF$ $BI_5 = BDEG$

$BI_6 = BAFG$ $BI_7 = BBCEFG = CEFG$

Visar: B blandas bara med 3-faktor och högre ordningens samspel. Så bra ur detta hänseende.

8.

12 kulor:

3 gula 4 blå 5 gröna

ξ = antal dragna gröna. η = antal olika dragna färger.

a)

$$P(\eta=1) = P(3 \text{ gula}) + P(3 \text{ blå}) + P(3 \text{ gröna})$$

$$= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} =$$

$$= \ldots = \frac{3}{44} \approx 0{,}06818$$

$$P(\eta=3) = P(1 \text{ gul}, 1 \text{ blå}, 1 \text{ grön})$$

$$= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3\cdot4\cdot5}{220} = \ldots = \frac{3}{11} \approx 0{,}2727$$

$$P(\eta=2) = 1 - P(\eta=1) - P(\eta=3) \approx 1 - 0{,}06818 - 0{,}2727$$

$$= 0{,}65912$$

$$\Rightarrow E(\eta) = 1\cdot 0{,}06818 + 2\cdot 0{,}65912 + 3\cdot 0{,}2727$$

$$\approx \boxed{2{,}2045}$$

$$E(\eta^2) = 1^2\cdot 0{,}06818 + 2^2\cdot 0{,}65912 + 3^2\cdot 0{,}2727 = 5{,}15896$$

$$\Rightarrow Var(\eta) = 5{,}15896 - 2{,}2045^2 \approx \boxed{0{,}2991}$$

b)

$$P(\{\xi=1\}\cap\{\eta=2\}) = P(1 \text{ grön } \& \ 2 \text{ blå}) + P(1 \text{ grön } \& \ 2 \text{ gula})$$

$$= \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{12}{3}} = \ldots = \frac{9}{44} \approx 0{,}2045.$$