Tillämpad matematisk statistik LMA201 Tentamen 20170314 lösningar

1. Antal bilar, som kommer in i en rondell är poissonfördelat med väntevärde $\lambda = 2.5$ per minut.

   (a) Sätt $n = 60$ och $\xi_j \in \mathrm{Po}(2.5)$. Vi approximerar (CGS)

   $$\zeta := \sum_{j=1}^{60} \xi_j \sim \mathrm{N}(\mu = 60 \cdot 2.5, \sigma = \sqrt{60 \cdot 2.5}).$$

   Sökt sannolikhet är

   $$P(\zeta > 160) \approx 1 - \Phi\left(\frac{160 - 150}{\sqrt{2.5 \cdot 60}}\right) = 1 - \Phi(0.8165) \approx 0.207 \text{ (Svar (a))}$$

   3p

   (b) Sannolikheten att det i genomsnitt kommer in fler än 3 bilar per minut i rondellen ges approximativt av

   $$\mathbb{P}(\zeta > 3 \cdot 60) = 1 - \Phi\left(\frac{180 - 150}{\sqrt{150}}\right) = 1 - \Phi(2.449) \approx 0.0072.$$

   Svar: Sannolikheten att det kommer i genomsnitt 3 bilar per minut in i rondellen är 0.72%. 3p

2. Följande funktion $f(x) = \begin{cases} 12(x^2 - x^3), & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$ är given.

   (a) $f(x) = x^2(1 - x) \geq 0$ för $0 \leq x \leq 1$.

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 12 \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 12 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 12 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1.$$

   är därmed en frekvensfunktion. 2p

   (b) Väntevärde är

   $$\mu = 12 \int_0^1 x(x^2 - x^3)dx = 12 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

   Standardavvikelse för fördelningen:

   $$\sqrt{12 \int_0^1 x^2(x^2 - x^3)dx - \mu^2} = \sqrt{12\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{9}{25}} = \frac{1}{5}.$$

   4p

3. Låt $\xi_j \in \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, $j = 1, 2, ..., 5$. Vi vet att $\overline{\xi} \in \mathrm{N}(\mu, \sigma/\sqrt{5})$. Medelvärdet av dessa är $\overline{x} = 24.0$. Ett (symmetriskt) 95%:s konfidensintervall för μ då

(a) $\sigma = 1.8$ och $\lambda_{0.025} = 1.96$.

$$[\overline{x} - \sigma \cdot \lambda_{0.025}/\sqrt{5}, \overline{x} + \sigma \cdot \lambda_{0.025}/\sqrt{5}] = [22.4222, 25.5778]$$

2p

(b) σ okänd: Vi punktskattar σ med s.

$$s = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.12132...$$

Dessutom utnyttjar vi $t-$fördelningen:

$t_{0.025} = 2.78$ som ger intervallet $[24-2.78 \cdot 2.12/\sqrt{5}, 24+2.78 \cdot 2.12/\sqrt{5}] = [21.3643, 26.6357]$.

4p

4. Låt I stå för händelsen inbrott och L stå för händelsen larm under en given natt. Då gäller

$$P(L|I) = 0.99, \quad P(L|I^c) = 0.02, \quad P(I) = 0.001\,.$$

En natt ringer larmet. Sannolikheten som söks är

$$P(I|L) = \frac{P(I \cap L)}{P(L)}.$$

$$P(I \cap L) = P(L|I) \cdot P(I) = 0.99 \cdot 0.001 = 0.00099.$$

$$P(L) = P(L \cap I) + P(L \cap I^c) = P(L|I)P(I) + P(L|I^c)(1 - P(I)) = 0.02097$$

som ger

$$P(I|L) = \frac{P(I \cap L)}{P(L)} = \frac{0.00099}{0.0297} = \frac{99 \cdot 10^{-5}}{297 \cdot 10^{-4}} \approx 3.33\%.$$

5p

5. En urna A innehåller fyra röda och 3 gula kulor.

(a) En kula väljs slumpmässigt. Låt ξ_1 vara antal röda kulor vid denna dragning. Sannolikheten att den är röd är

$$P(\xi_1 = 1) = \frac{4}{7}.$$

1p

(b) En annan urna B innehåller två röda och tre gula kulor. Sätt ξ_2 =antal röda kulor vi får i denna andra dragning. Sannolikheten att man då får två röda kulor är

$$\begin{aligned} P(\xi_2 = 2) &= P(\xi_1 = 0 \cap \xi_2 = 2) + P(\xi_1 = 1 \cap \xi_2 = 2) = \\ &= P(\xi_2 = 2|\xi_1 = 0) \cdot P(\xi_1 = 0) + P(\xi_2 = 2|\xi_1 = 1) \cdot P(\xi_1 = 1) = \\ &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{3}{7} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1 \cdot 3}{7 \cdot 15} + \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 15} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

4p

6. Ett elektriskt system fungerar om komponent B och C fungerar eller om komponent A fungerar... Händelsen att A fungerar efter ett år betecknas A och p.s.s. för B och C.
   Händelserna A och C är oberoende. Följande sannolikheter gäller (för ett år).
   $$P(A) = P(B) = P(C) = 0.98, \quad P(B \cap C) = 0.96$$
   och sannolikheten för att *minst* en komponent inte fungerar är 0.05.

   (a) Vi har att $P(A^c \cup B^c \cup C^c) = 0.05$. Nu är
   $$P(A^c \cup B^c \cup C^c) = P((A \cap B \cap C)^c) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 0.05,$$
   så att $P(A \cap B \cap C) = 0.95$. Sannolikheten att systemet fungerar (efter ett år) kan skrivas
   $$P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) = 0.98 + 0.96 - 0.95 = 0.99.$$
   3p

   (b) Sannolikheten att systemet fungerar, om komponent C fungerar (efter ett år) kan uttryckas som
   $$\begin{aligned} P(A \cup B|C) &= \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \\ &= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \\ &= \frac{0.98^2 + 0.96 - 0.95}{0.98} = 0.990204 \approx 0.99 \end{aligned}$$
   3p

7. (a) Det finns fem olika sätt som medför att Josefina har bollen exakt en gång under de tre första kasten: Anna-Anders-Anna-Josefina, Anna-Josefina-Anna-Anders, Anna-Josefina-Anders-Anna, Anna-Anders-Josefina-Anna eller Anna-Anders-Josefina-Anders. Den sökta sannolikheten blir alltså:
   $$0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.8 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.567.$$

   (b) Skall lösa $\pi P = \pi$ där $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ är en sannolikhetsvektor och P är övergångsmatrisen. Efter matrismultiplikation får vi ekvationerna
   $$0.7\pi_2 + 0.8\pi_3 = \pi_1$$
   $$0.7\pi_1 + 0.2\pi_3 = \pi_2$$
   $$0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 = \pi_3$$
   och
   $$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

   Lösning av ekvationsystemet ger att $\pi = (0.425, 0.344, 0.231)$ med tre decimalers noggrannhet. Sannolikheten att det är Anders som har bollen vid en tidpunkt långt in i framtiden blir alltså ungefär 0.344.

8. (a)

$$
\begin{aligned}
l_A &= \frac{54+73+55+78}{4} - \frac{53+75+52+77}{4} = 0.75 \\
l_{AB} &= \frac{53+73+52+78}{4} - \frac{54+75+55+77}{4} = -1.25 \\
l_{ABC} &= \frac{54+75+52+78}{4} - \frac{53+73+55+77}{4} = 0.25
\end{aligned}
$$

3p

(b) Man ser att teckenkolumnen motsvarar kolumnen för trefaktorsamspelet ABC. Man har alltså använt generatorn $D = ABC$. Vi får den definierande relationen $I = ABCD$ som då har ett ord, nämligen $ABCD$.

Alias till faktor A blir då $A \cdot I = AABCD = BCD$. 2p

9. Vi beräknar först stationära fördelningen för antalet *trasiga* komponenter $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$. Vi har att (enligt snabb-metoden i boken)

$$\pi_2 = \frac{0.03 \cdot 0.06}{0.3 \cdot 0.3}\pi_0 = 0.02\pi_0$$

och

$$\pi_1 = \frac{0.06}{0.3}\pi_0 = 0.2\pi_0.$$

Eftersom $\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1$ får vi $1.22\pi_0 = 1$, dvs $\pi_0 = 0.820$. Så $\pi_1 = 0.164$ och $\pi_2 = 0.016$. Stationära fördelningen för antalet *hela* komponenter blir alltså $(0.016, 0.164, 0.820)$. Det följer att

$$E(X(t)) = 0 \cdot 0.016 + 1 \cdot 0.164 + 2 \cdot 0.82 = 1.804$$

om t stort (ungefärligen).