# Lösningsförslag till några uppgifter i tentamen LMA201/LMA521, 20160113

1.
$$\xi \in \mathrm{N}(35,3), \quad \eta \in \mathrm{N}(34,2).$$

(a) Resetiden mellan 7.30 0ch 8.10 är 40 min. Vi söker först

$$p = P(\xi \leq 40) = \Phi\left(\frac{40-35}{3}\right) = \Phi(1.67) = 0.95254...$$

Sätt $\zeta = x$, där $x$ är antal dagar av $n = 5$, då $A$ kommer innan 8.10. Då är $\zeta \in \mathrm{Bin}(5,p)$ och sökt sannolikhet är

$$P(\zeta \geq 4) = P(\zeta = 4) + P(\zeta = 5) = p^4(5(1-p)+p) = p^4(5-4p) \approx 0.979\,.$$

(b) Vi söker sannolikheten för händelsen $C = \{\eta \leq \xi\}$.

$$\eta - \xi \in \mathrm{N}(34-35, \sqrt{3^2+2^2}) = \mathrm{N}(-1, \sqrt{13}).$$

$$P(\eta - \xi \leq 0) = \Phi\left(\frac{0-(-1)}{\sqrt{13}}\right) = 0.609244... \approx 0.61\,.$$

2. (a) Låt $\mathcal{I}_j$ vara en indikatorvariabel för student nr $j$. Det är lämpligt att sätta

$$\mathcal{I}_k = \begin{cases} 0, & \text{med sannolikhet } 1-p = 1-0.87 \\ 1, & \text{med sannollikhet } p = 0.87 \end{cases}$$

Då är $\sum_{j=1}^{200} \mathcal{I}_j =: \xi \in \mathrm{Bin}(200,p)$ och $\xi$ =antalet studenter, som kommer till en föreläsning en viss dag. Med CGS approximerar vi $\xi \in \mathrm{N}(np, \sqrt{np(1-p)}) = \mathrm{N}(174, 4.75605)$, ty $np(1-p) = 22.62 > 10$. Sökt sannolikhet är

$$P(\xi \geq 179)) = 1 - P(\xi < 179) = 1 - \Phi\left(\frac{179-174}{4.75605}\right) = 0.146562... \approx 0.147.$$

(b) Vi söker $x$ sådant att

$$\phi\left(\frac{x-174}{4.75605}\right) = 0.95 \Longleftrightarrow \frac{x-174}{4.75605} = 1.645 \Longleftrightarrow x = 181.823 \approx 182.$$

3.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{7}(1+x-x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{för övriga } x \end{cases}$$

(a) Väntevärdet

$$\frac{6}{7}\int_0^1 x(1+x-x^2)dx = \frac{6}{7}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right] = ... = \frac{1}{2}.$$

Variansen och standardavvikelse är

$$\frac{6}{7}\int_0^1 x^2(1+x-x^2)dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{140} \text{ resp. } \sqrt{\frac{11}{140}} \approx 0.28.$$

(b)

$$P(1/8 \leq \xi \leq 6/8 | 3/8 \leq \xi \leq 7/8) = \frac{\int_{3/8}^{6/8}(1+x+-x^2)dx}{\int_{3/8}^{7/8}(1+x+-x^2)dx} = ... = \frac{711}{932} \approx 0.76.$$

4. (a)

$$\overline{x} = 244.657,\ t_{7-1,0.025} = 2.44691, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{7}(x_i-\overline{x})}{6}} = ... = 1.08452$$

Konfidensintervallet är

$$\left[\overline{x} - \frac{t_{6,0.025}\cdot s}{\sqrt{7}}, \overline{x} + \frac{t_{6,0.025}\cdot s}{\sqrt{7}}\right] = [243.654, 245.66]$$

5. Låt $\xi$ =antal blå kulor dragna ur urna $A$ och $\eta$ =antal gröna kulor dragna ur urna B.

(a)

$$E = \{\xi = 2\} \text{ med sannolikhet } P(\xi = 2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

(b) Man drar nu 4 kulor ur urna $B$, som har fått två kulor från urna $A$. Sätt $E_j = \{\xi = j\}$ och $F = \{\eta = 2\}$ Då kan vi skriva

$$P(\eta = 2) = P(F) = P(F \wedge E_0) + P(F \wedge E_1) + P(F \wedge E_2),$$

ty $E_j$ är parvis disjunkta (och $E_2 = E$). Knepet att räkna ut dessa tre sannolikheter. Det gör vi med betingad sannolikhet.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ som kan skrivas } P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Då kan vi skriva

$$P(F) = \sum_{j=0}^{2} P(F|E_j)P(E_j)$$

$$P(E_0) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}, \quad P(E_1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{7}{2}}, \quad P(E_2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{7}{2}}$$

$$P(F|E_0) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{8}{4}}, \quad P(F|E_1) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{8}{4}}, \quad P(F|E_2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} \Longrightarrow$$

$$P(F) = \frac{15 \cdot 3 + 30 \cdot 12 + 6 \cdot 6^2}{\binom{7}{2} \cdot \binom{8}{4}} = \frac{207}{490} \approx 0.42.$$

$$P(F|E) = P(F|E_2) = P(\eta = 2|\xi = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{18}{35}.$$

Till sist skall vi beräkna $P(E|F)$. Enklast är att utnyttja

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E|F) \cdot P(F) = P(F|E)P(E) \Longrightarrow \\ P(E|F) &= P(F|E) \cdot \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{18}{35} \cdot \frac{2/7}{207/490} = \frac{8}{23} \approx 0.35. \end{aligned}$$

6. Låt $\xi$ =Antal trasiga komponenter och sannoolikheten att en komponent fungerar $= p = 0.96$.

(a)

$$P(\text{åtminstone en komponent trasig0}) = P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = \{\text{ober.}\} = 1 - p^6 \approx 0.217242.$$

(b) Låt $A$ vara händelsen att komponent $A$ fungerar. Då är händelsen att systemet fungerar

$$A \cup (B \cap C) \cup (D \cap E \cap F)$$

med komplementhändelse (de Morgans lagar)

$$A^c \cap (B \cap C)^c \cap (D \cap E \cap F)^c$$

och motsvarande sannolikhet för den ursprungliga händelsen är, p.g.a. oberoende

$$\begin{aligned} P(\text{systemet fungerar}) &= 1 - P(A^c)P((B \cap C)^c)P((D \cap E \cap F)^c) = \\ &= 1 - (1-p)(1-p^2)(1-p^3) = 0.999639 \text{ (Svar)}. \end{aligned}$$

(c) Vi söker

$$P(A \cap B \cap C|\text{systemet fungerar}).$$

Nu är $a \cap B \cap C \subset$ systemet fungerar. Alltså söks

$$\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(\text{systemet fungerar})} = \frac{p^3}{0.999639...} \approx 0.885 \text{ (svar)}.$$

7.

8.