1 Föreläsning I, Mängdlära och elementär sannolikhetsteori, LMA201, LMA521

1.1 Mängd (Kapitel 1)

En (oordnad) mängd A är en uppsättning av element. En sådan mängd kan innehålla ändligt eller oändlligt med element.

$$A := \{x_1, x_2, ..., x_n\}. \tag{1}$$

A har n element, alltså ett ändligt antal.
Ex.vis är

$$F = \{1, 2, 4, \sqrt{3}, 4, 2\} = \{1, 2, 4, \sqrt{3}\}\,.$$

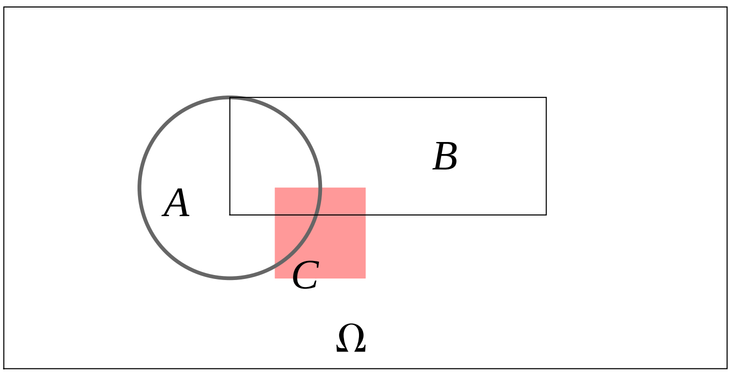
Antal element i mängden skrivs $|F|$, d.v.s. $|F| = 4$.

- Med $A \cup B$ menas mängden av de element som ligger i A eller B.
- Med $A \cap B$ menas mängden av de element som ligger i A och B.
- Med $A \setminus B$ menas mängden av de element som ligger i A men inte i B.
- Att ett element x finns i en mängd A skrivs $x \in A$.
- Med $A \subset B$ menas att om $x \in A$, så gäller $x \in B$. A är *delmängd* av B, alternativt B är *övermängd* till A.
- $\emptyset$ är den *tomma* mängden, mängden som inte innehåller något element.
- Givet en grundmängd Ω. Med $A \subset \Omega$. Då är $A^c = \Omega \setminus A$, komplementet till $\boldsymbol{A}$.

Kommentarer

- Att $A \subset B$ betyder att om $x \in A$ så är $x \in B$.
  Alternativt kan det skrivas som att $x \notin B \Longrightarrow x \notin A$.
- En likhet $A = B$ är alltså ekvivalent med att $A \subset B$ och $B \subset A$.

Ex 1 För att bevisa följande likheter räcker det att rita mängder. Börja med att rita en grundmängd Ω!



Venn-diagram med tre delmängder till en grundmängd Ω.

- $(A^c \cup B^c) = (A \cap B)^c$.
- $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (symmetrisk differens).
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ex 2 *Ett* kast med en tärning
Dess *utfall* är $1, 2, 3, 4, 5, 6$ och vi kan tala om mängden $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Denna mängd innehåller *alla* utfall och kallas *utfallsrummet*. Den betecknas Ω även i boken.
För en sannolikhet, ofta betecknad P eller p, gäller $0 \leq p \leq 1$.

Ex 3 Vad är sannolikheten att i *ett* tärningskast, få

(a) en 3:a eller en 6:a,

(b) ett udda tal,

(c) ett tal ≤ 5?

Lösning:

Det är naturligt att samtliga 6 utfall sker med samma sannolikhet och att *totala* sannolikheten är 1. Vi sätter Ω, som ovan.

(a) Som mängd betraktad $A = \{3, 6\}$. Den inträffar med sannolikheten $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

(b) Ett udda tal är $1, 3$ eller 5. Som mängd betraktad är det $B := \{1, 3, 5\}$. B innehåller 3 element. Det är då rimligt att sannolikheten för att får ett udda tal är
$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

(c) Ett tal ≤ 5 är $1, 2, 3, 4$ eller 5, alltså 5 utfall. Som mängd sätter vi
$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$
Sannolikheten som söks, d.v.s. att få ett tal ≤ 5 är $\dfrac{5}{6}$.

Kommentarer

- Sannolikheten för de 6 utfallen är densamma $\dfrac{1}{6}$. Man talar om *likformig sannolikhetsfördelning*.

(a) Vi införde beteckningen $|A|$, som antal element i mängden A. Här är $|\Omega| = 6$. Vi kan i (a) sätta $|A| = |\{3, 6\}| = 2$. Den sökta sannolikheten i (a) är
$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} =: P(A) = \frac{1}{3}.$$
Vi inför beteckningen M, för *antal möjliga utfall*. Då är
$$M = |\Omega| = 6.$$
P.s.s. inför vi G för *antal gynnsamma utfall*. Då är
$$G = |A| = 2.$$
Den sökta sannolikheten i (a) kan alltså skrivas
$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{G}{M} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(b) Här är

$$G = |B| = 3 \text{ och därmed är } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{G}{M} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

(c)

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{G}{M} = \frac{5}{6}\,.$$

- Begreppet *mängd* ersätts så småningom av begreppet *händelse*.
- *Sannolikhet* hänger ihop med *relativ frekvens*; Om man kastar en tärning, säg 100 gånger, bör c:a 1/6 vara 2:or, d.v.s. ungefär 16 till 17 gåner bör man få en 2:a.

Ex 4 Med samma mängder (händelser) som i föreående exempel, bestäm

(a) $A \cup B$

(b) $B \cap C$

(c) A^c

(d) och motsvarande sannolikheter.

Lösning:

(a)

$$A \cup B = \{3, 6\} \cup \{1, 3, 5, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}\,.$$

(b)

$$B \cap C = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 3, 5\} = B\,.$$

Speciellt är $B \subset C$.

(c) $A^c = \Omega \backslash A$ är ju *komplementet* till A och är $A^c = \{1, 2, 4, 5\}$ alltså mängden av de utfall som ligger i Ω men *inte* i A.

(d) Motsvarande sannolikheter är $P(A \cup B) = \dfrac{2}{3}$, $P(B \cap C) = \dfrac{1}{2}$ respektive $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Kommentarer

- I (a) är $P(A \cup B) = \dfrac{4}{6}$. Är det detsamma som att addera, d.v.s. är denna sannolikhet

$$P(A) + P(B)\,?$$

Vi ser att $P(A) + P(B) = \frac{2+3}{6} \neq \frac{4}{6}$. Vi skall justera så att vi får en likhet. $A \cap B = \{3\}$ och $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.
För att få likhet, får vi subtrahera $1/6$ på följande sätt

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B). \tag{2}$$

Vi ser att det numeriskt stämmer. Likheten beror på att i VL finns sannolikheten för $\{3\}$ finns i både A och B.
Likheten (2) gäller generellt i sannolikhetslära.

Ex 5 Två kast med en tärning
Vad är sannolikheten att

(a) första kast är jämnt.

(b) summan är 7,

(c) summan är udda.

Lösning:

(a) Att första kast är jämnt är oberoende av utfallet av andra kast. Således är den sannolikheten $\frac{1}{2}$.

(b) Summan är 7. Låt vågrät rad utgöra andra kast och lodrät rad utgöra 1:a kast.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Vi får $M = 6^2 = 36$ och $G = 6$, så att sökt sannolikhet är $P(\text{summan är } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(c) Summan är udda.

$G = 1{+}3{+}5{+}5{+}3{+}1 = 18,\ M = 36 \Longrightarrow P(\text{summan är udda}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Kommentarer

- Observera att $P(\text{summa} = x)$ inte är likformig, d.v.s. $P(\text{summa} = x)$ är olika för olika $x = 2, 3..., 12$.
- Vi inför en *stokastisk variabel*, här betecknad ξ med betydelsen ξ =summan av tärningskasten(-s poäng).