1 Föreläsning 3; Mer om sannolikhet

1.1 Betingad sannolikhet

Sannolikheten för en mängd/händelse påverkas av vad man vet eller inte vet om händelsen.

Ex 1 Om du har en hobby, ett specialintresse, såsom musik eller sport, kan man få frdågan, om du är bra i det som du har hobby. Vad svarar man på en sådan fråga? Kansk så här:
"Det beror vad man jämför med."

■

Ex 2 Antag att man frågar någon, slumpmässigt, om personen är aktiv inom fotboll, d.v.s. organiserad under RF och med en fotbollsförening, förkortat ff).

- Vi utgår från att Sveriges befolkning är $9 \cdot 10^6$ (personer), att antal organiserade i RF är $3 \cdot 10^6$ och att antal medlemmar i Fotbollsföreningar är 450 000. Vi använder oss av *relativa frekvenser* som sannolikheter.
- Inför beteckningar för händelser;
  - F är händelsen att en person är medlem i en fotbollsförening (F).
  - R är händelsen att en person är medlem i RF.
  - Då är
    $$P(R) = \frac{1}{3} \text{ och } P(F) = \frac{1}{20}$$
    är händelsen att en person är medlem i en fotbollsförening.
  - R är händelsen att en person är medlem i RF.
- Om man slumpmässigt träffar på en person, som man vet, är medlem i RF, så är sannolikheten att personen är med i en F
  $$P(F|R) = \frac{450\,000}{3000\,000} = \frac{3}{20}.$$
  Jämfört med $P(F)$ är den inte samma.
- Den kallas *betingad sannolikhet* och skrivs $P(F|R)$, sannolikheten att en slumpvist vald person är med i ett F *förutsatt* att personen är ansluten till i RF.
- Hur beräknas $P(F|R)$? Vi beräknar den som
  $$P(F|R) = \frac{P(F)}{P(R)}.$$
  Nu är alla som är med en F, d.v.s. tillhör F också (automatiskt) även i R, d.v.s. $F \subset R$. Mer allmänt finns situationer sådana att $R \not\subset F$. Därför skall täljaren skrivas $P(F \cap R)$, alltså
  $$P(F|R) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)} \tag{1}$$

■

Ex 3 För ett varumärke av billarm gäller följande.
Om larmet löser ut, är det 99% säkert att det är inbrott i bilen. Sannolikheten för att larmet löses ut under ett år är 0.001. Sannolikheten för ett inbrott under ett år är 0.2%.
Vilken sannolikhet är intressant för bilägaren? Går den sannolikheten att beräkna?

Lösning

Det är rimligt från bilägarens syvinkel, att larmet löses ut *om* det är inbrott. d.v.s. att $P(L|I)$ är stor. Sannolikheterna vi har är

$$99\% = 0.99 = P(I|L), \quad P(I) = 0.002, \quad P(L) = 0.001.$$

Vi får från (1)

$$\begin{aligned} P(I \cap L) &= P(L) \cdot P(I|L) = 0.00099 \text{ som ger att} \\ P(L|I) &= \frac{P(I \cap L)}{P(I)} = \frac{0.00099}{0.002} = 0.495. \end{aligned}$$

Alltså löses larmet ut i mindre än 50% av fallen med inbrott.

■

Kommentarer

- Det rör sig alltså om ett överkänsligt larm i detta exempel.
- Hur kan sannolikheterna $P(L|I)$ och $P(I|L)$ vara så olika? I den första sannolikheten jämför vi med I och i den andra med L.

Ex 4 I en tidningsartikel, stod det att 95% av alla tunga missbrukare (T) har någon gång använt hasch (H). I artikeln hävdades det att detta var en orsak till att bekämpa användningen av H.
Är det en rimlig slutsats?

Lösning

Vi tolkar den relativa frekvensen 0.95 som en betingad sannolikhet: Om man är T, så har man använt H, d.v.s.

$$P(H|T) = 0.95 = \frac{P(H \cap T)}{P(T)}.$$

Att H är farligt (inkörsport till T) betyder att $P(T|H)$ skall vara stor. Den sannolikheten kan skrivas

$$P(T|H) = \frac{P(H \cap T)}{P(H)}.$$

Täljarna har desamma men inte nämnarna. Vi vet inte vilka värden dessa har men det kan ju vara så att

$$P(T) = 0.005 \text{ och } P(H) = 0.1.$$

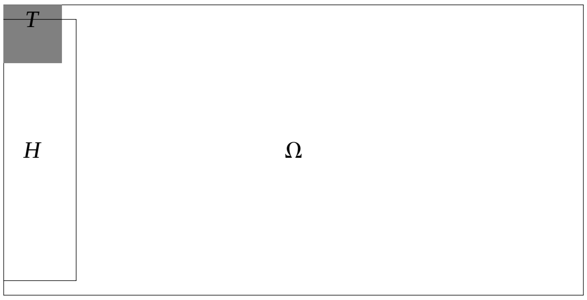
Då får vi

$$\begin{aligned} P(H \cap T) &= P(H|T) \cdot P(T) = 0.95 \cdot 0.005 = 0.00475 \Rightarrow \\ P(T|H) &= \frac{P(H \cap T)}{P(H)} = \frac{0.00475}{0.1} = 0.0475. \end{aligned}$$

■

Kommentarer

- Som i exemplet med billarmet rör det sig om två betingade sannolikheter som jämförs med $P(T) = 0.005$ respektive $P(H) = 0.1$. Tydligen är H en mycket större mängd än I, d.v.s. betydligt fler använder H än är T.
- Illustration av händelser och sannolikheter.



Sannolikheten $P(H|T)$ är stor och $P(T|H)$ är liten.

1.2 Oberoende händelser

Vad innebär dett för två händelser A och B att $P(A|B) = P(A)$.? Det betyder att sannolikheten för A under förutsättning att B inträffat (VL) är densamma som sannolikheten för A, alltså oberoende av att B inträffat (eller ej).

Ex 5 Antag att $P(A) = 0.7 = P(A|B)$, d.v.s. att sannolikheten påverkas inte av händelsen B. Det betyder att

$$0.7 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \text{ som ger att } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

■

Resultatet ovan tas som definition av oberoende händelser.

Definition 1 Två händelser A och B är *oberoende* om

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2}$$

Ex 6 Givet följande sannolikheter

$$P(A) = \frac{1}{5}, \quad P(B^c) = \frac{3}{10} \text{ oc h } P(A \cap B) = \frac{7}{50}.$$

(a) Visa att A och B är oberoende.

(b) Gäller det att A^c och B^c är oberoende?

(c) Kan resultatet i (b) generaliseras?

Lösning

(a) $P(B) = 1 - P(B^c) = \dfrac{7}{10}$.

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{50} \text{ som ju är } P(A \cap B)$$

Och alltså är de oberoende.

(b)

$$\begin{aligned} P(A^c) \cdot P(B^c) &= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)] \end{aligned} \tag{4}$$

Vi ser att det nästsista uttrycket i (3) är identiskt med (4).

(c) Resultatet i (b) kan alltså generaliseras, d.v.s.

$$A \text{ och } B \text{ oberoende} \Longleftrightarrow A^c \text{ och } B^c \text{ oberoende.} \tag{5}$$

■

Kommentarer

- Även A och B^c samt A^c och B är oberoende, omm A och B oberoende.
- För två möten den ena ishockey Frölunda-Skellefteå och den andra fotboll Öis-Gais. Låt A vara mängden/händelsen att Frölunda vinner och B att Gais vinner. Det är rimligt att A och B är oberoende och p.s.s. att A^c och B är oberoende.
- Att A och B är oberoende är inte detsamma som att A och B är disjunkta. Om de är disjunkta följer det att $A \subset B^c$ (Rita!).
- Att två händelser är disjunkta innebär att de inte kan inträffa samtidigt. Då är de verkligen beroende!
- Antag att två A och B är disjunkta. Eftersom de är disjunkta är $A \cap B = \emptyset$ och $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. Om de är oberoende, är

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0 \text{ så att } P(A) = 0 \text{ eller } P(B) = 0.$$

  För dessa händelser medför oberoende alltså att $P(A) = 0$ eller $P(B) = 0$.